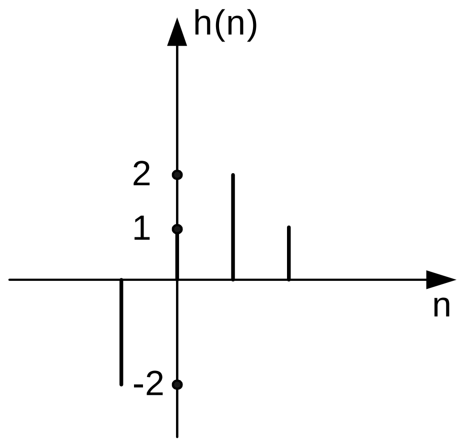
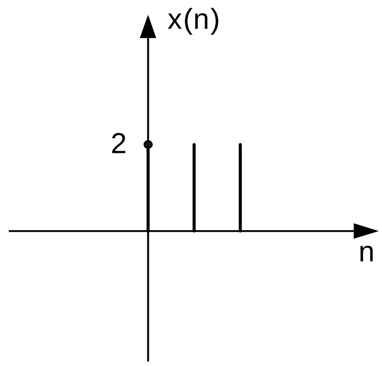
1 DIGITALNA OBRADA SIGNALA - II računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

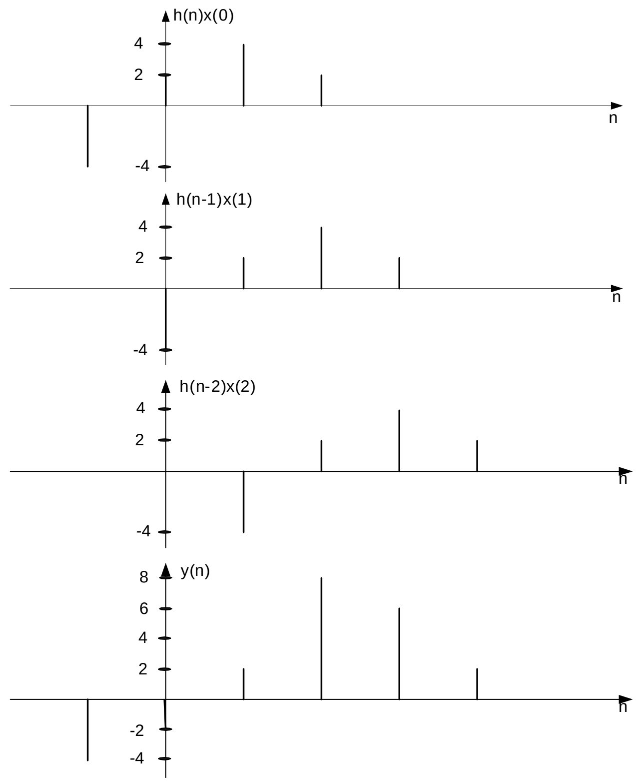
Odrediti konvoluciju signala $x(n) = 2\left[u(n) - u(n-3)\right]$ *i signala* $h(n)$ *koji je grafički predstavljen na slici dolje.*



Grafički predstavimo i signal $x(n)$



i odredimo konvoluciju grafičkim putem:



Za grafičko određivanje signala smo iskoristili činjenicu da je signal $x(n)$ različit od nule samo za $n = 0,\ 1$ i 2, tako da konvoluciju možemo napisati u obliku:

$$
\begin{aligned}
y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{2} x(k)h(n-k) = x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + x(2)h(n-2).
\end{aligned}
$$

II način: Signal $h(n)$, koji je zadat grafički, se može i analitički predstaviti kao:

$$h(n) = -2\delta(n+1) + \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2),$$

pa konvoluciju možemo zapisati u obliku:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\left[u(k) - u(k-3)\right]\left[-2\delta(n-k+1) + \delta(n-k) + 2\delta(n-k-1) + \delta(n-k-2)\right] =$$

$$= \sum_{k=-0}^{2} 2\left[-2\delta(n-k+1) + \delta(n-k) + 2\delta(n-k-1) + \delta(n-k-2)\right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 2[-2\delta(n+1) + \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) - 2\delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3) \\
&\qquad -2\delta(n-1) + \delta(n-2) + 2\delta(n-3) + \delta(n-4)] = \\
&= -4\delta(n+1) - 2\delta(n) + 2\delta(n-1) + 8\delta(n-2) + 6\delta(n-3) + 2\delta(n-4)
\end{aligned}$$

Konvoluciju možemo tražiti i direktnim putem:

$$\begin{aligned}
y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \\
&= 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[u(k) - u(k-3)\right]\left[-2\delta(n-k+1) + \delta(n-k) + 2\delta(n-k-1) + \delta(n-k-2)\right] = \\
&= 2[-2(u(n+1) - u(n-2)) + u(n) - u(n-3) + 2(u(n-1) - u(n-4)) + u(n-2) - u(n-5)]
\end{aligned}$$

Naravno, svi navedeni načini određivanja konvolucije signala daju za rezultat isti signal, samo predstavljen na različite načine.

2 Zadatak 2.

Odrediti konvoluciju signala $x(n) = e^{-|n|}$ *i* $h(n) = u(n+5) - u(n-6)$

Pođimo od definicije konvolucije:

$$\begin{aligned}
y(n) &= x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \qquad (1) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|}(u((n-k)+5) - u((n-k)-6))
\end{aligned}$$

kako je:

$$u((n-k)+5) = \begin{cases} 1, & \text{za } k \leq n+5 \\ 0, & \text{za } k > n+5 \end{cases}$$

i:

$$u((n-k)-6) = \begin{cases} 1, & \text{za } k \leq n-6 \\ 0, & \text{za } k > n-6 \end{cases}$$

zaključujemo da je:

$$(u((n-k)+5)-u((n-k)-6)) = \begin{cases} 1, \text{ za } n-5 \le k \le n-5 \\ 0, \text{ za ostale vrijednosti } k \end{cases}$$

Beskonačna suma u (1) se svodi na 11 članova za $n-5 \le k \le n+5$

$$y(n) = \sum_{k=n-5}^{n+5} e^{-|k|}$$

Polazeći od definicije apsolutne vrijednosti:

$$|k| = \begin{cases} k, \text{ za } k \ge 0 \\ -k, \text{ za } k < 0 \end{cases},$$

kod konvolucione sume razlikujemo tri slučaja:

I slučaj: Ukoliko je $n+5 \le 0$, odnosno $n \le -5$, biće $k \le 0$ za sve članove sume i $|k| = -k$. Naime, ako je najveće $k = n+5$ u sumi manje od nule, sigurno će i ostali biti manji od nule, pa pišemo:

$$y(n) = \sum_{k=n-5}^{n+5} e^{k} = e^{n-5}\frac{1-e^{11}}{1-e} = e^{n}\frac{e^{-5}-e^{6}}{1-e} = e^{n}\frac{e^{0.5}}{e^{0.5}}\frac{e^{-5.5}-e^{5.5}}{e^{-0.5}-e^{0.5}} = e^{n}\frac{\sinh 5.5}{\sinh 0.5}$$

II slučaj: $n-5 \ge 0$, $k = n-5$ kao najmanje k u sumi je veće od nule, odnosno $n \ge 5$, tada je $k \ge 0$ za sve članove sume i $|k| = k$:

$$y(n) = \sum_{k=n-5}^{n+5} e^{-k} = e^{-n+5}\frac{1-e^{-11}}{1-e^{-1}} = e^{-n}\frac{e^{5}-e^{-6}}{1-e^{-1}} = e^{-n}\frac{e^{-0.5}}{e^{-0.5}}\frac{e^{5}-e^{-6}}{e^{0.5}-e^{-0.5}} = e^{-n}\frac{\sinh 5.5}{\sinh 0.5}$$

III slučaj: $-5 < n < 5$, sada je neko k negativno, a neko pozitivno, pa konvolucionu sumu razbijamo na dvije sume:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=n-5}^{n+5} e^{-|k|} = \sum_{k=n-5}^{-1} e^{k} + \sum_{k=0}^{n+5} e^{-k} = e^{n-5}\frac{1-e^{5-n}}{1-e} + \frac{1-e^{-(n+6)}}{1-e^{-1}} = \\ &= e^{-1/2}\frac{e^{n-5}-1}{e^{-1/2}-e^{1/2}} + e^{1/2}\frac{1-e^{-(n+6)}}{e^{1/2}-e^{-1/2}} = \frac{1}{e^{0.5}-e^{-0.5}}(e^{-0.5}-e^{n-5.5}+e^{0.5}-e^{-n-5.5}) = \\ &= \frac{-e^{-5.5}(e^{n}+e^{-n})+e^{-0.5}+e^{0.5}}{e^{0.5}-e^{-0.5}} = \frac{\cosh 0.5 - e^{-5.5}\cosh(n)}{\sinh 0.5} \end{aligned}$$

Konačno je:

$$y(n) = \begin{cases} e^{-|n|}\frac{\sinh 5.5}{\sinh 0.5} & \text{za } |n| \ge 5 \\ \frac{\cosh 0.5 - e^{-5.5}\cosh(n)}{\sinh 0.5} & \text{za } |n| < 5 \end{cases}$$