1 DIGITALNA OBRADA SIGNALA - I računske vježbe

1.1 Zadatak 1

Ispitati linearnost i vremensku invarijantnost datog sistema. Sistem je opisan jednačinom: $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(2-n) + 2$

Linearnost: Sistem je linearan ukoliko: pod pretpostavkama da ulazni signal $x_1(n)$ na izlazu daje $y_1(n)$ i da ulazni signal $x_2(n)$ na izlazu daje $y_2(n)$; dobijamo na izlazu signal $Ay_1(n) + By_2(n)$ ukoliko je ulazni signal $Ax_1(n) + Bx_2(n)$, za proizvoljno A i B.

Pretpostavke zapisujemo sa:

$$y_1(n) - \frac{1}{2}y_1(n-1) = x_1(2-n) + 2 \tag{1}$$

$$y_2(n) - \frac{1}{2}y_2(n-1) = x_2(2-n) + 2 \tag{2}$$

Trebamo pokazati da, ukoliko važe (1 i 2), takođe vrijedi i:

$$[Ay_1(n) + By_2(n)] - \frac{1}{2}[Ay_1(n-1) + By_2(n-1)] = \tag{3a}$$

$$= Ax_1(2-n) + Bx_2(2-n) + 2 \tag{3b}$$

Ako (1) pomnožimo sa A i (2) pomnožimo sa B pa ih nakon toga saberemo dobijamo sledeću jednačinu

$$Ay_1(n) + By_2(n) - \frac{1}{2}Ay_1(n-1) - \frac{1}{2}By_2(n-1) =$$
$$= Ax_1(2-n) + Bx_2(2-n) + 2A + 2B$$

što se razlikuje od (3), dakle sistem nije linearan.

Vremenska invarijantnost: Sistem je vremenski invarijantan ako pod pretpostavkom da je $y_1(n)$ odziv na proizvoljni signal $x_1(n)$, vrijedi da je odziv na $x_1(n-N)$ signal $y_1(n-N)$.

Pretpostavku zapisujemo kao:

$$y_1(n) - \frac{1}{2}y_1(n-1) = x_1(2-n) - 2. \tag{4}$$

Treba da dokažemo da, uz gornju pretpostavku, važi:

$$y_1(n-N) - \frac{1}{2}y_1(n-1-N) = x_1(2-n-N) - 2 \tag{5}$$

U jednačinu (4) uvedimo smjenu $n \longleftarrow n' - N$. Dobijamo:

$$y_1(n'-N) - y_1(n'-N-1) = x_1(2-n'+N) - 2 \tag{6}$$

Poredeći jednačine (5) i (6) zaključujemo da jednačina (5) ne može biti tačna za proizvoljni signal $x_1(n)$, dakle sistem nije vremenski invarijantan.

1.2 Zadatak 2

Ispitati linearnost i vremensku invarijantnost datog sistema. Sistem je opisan jednačinom $y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) = x(n) + 2x(n-1)$*. A nakon toga naći odziv na ulazne signale:*

a) $x_1(n) = \delta(n)$; b) $x_2(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-2)$

Linearnost: Provjerimo da li su za proizvoljno A i B: $Ax_1(n) + Bx_2(n)$ i $Ay_1(n) + By_2(n)$ par ulaz-izlaz, ukoliko su $(x_1(n), y_1(n))$ i $(x_2(n), y_2(n))$ parovi ulaz-izlaz datog sistema. Po pretpostavci vrijedi:

$$\begin{aligned} y_1(n) - \frac{1}{4}y_1(n-1) &= x_1(n) + 2x_1(n-1) \qquad (7a) \\ y_2(n) - \frac{1}{4}y_2(n-1) &= x_2(n) + 2x_2(n-1) \end{aligned}$$

Trebamo pokazati da vrijedi:

$$[Ay_1(n) + By_2(n)] - \frac{1}{4}[Ay_1(n-1) + By_2(n-1)] = \qquad (8)$$

$$= [Ax_1(n) + Bx_2(n)] + 2[Ax_1(n-1) + Bx_2(n-1)] \qquad (9)$$

pomnožimo prvu jednačinu u (7a) sa A, drugu sa B i saberimo ih. Dobićemo:

$$\begin{aligned} &Ay_1(n) + By_2(n) - \frac{1}{4}[Ay_1(n-1) + By_2(n-1)] = \\ &= Ax_1(n) + Bx_2(n) + 2Ax_1(n-1) + 2Bx_2(n-1) \end{aligned}$$

što tumačimo kao dokaz da $Ax_1(n) + Bx_2(n)$ i $Ay_1(n) + By_2(n)$ predstavljaju par ulaz-izlaz, odnosno da je sistem linearan.

Vremenska invarijantnost: Sistem je vremenski invarijantan ako pod pretpostavkom da je $y_1(n)$ odziv na proizvoljni signal $x_1(n)$ vrijedi da je odziv na $x_1(n-N)$ signal $y_1(n-N)$. Pretpostavku zapisujemo u obliku:

$$y_1(n) - \frac{1}{4}y_1(n-1) = x_1(n) + 2x_1(n-1) \qquad (10)$$

Treba da dokažemo da važi:

$$y_1(n-N) - \frac{1}{4}y_1(n-1-N) = x_1(n-N) + 2x_1(n-1-N),$$

što ćemo učiniti ako uvedemo smjenu $n \longleftarrow n' - N$ u jednačinu (10) Dobijamo:

$$y_1(n'-N) - \frac{1}{4}y_1(n'-N-1) = x_1(n'-N) + 2x_1(n'-N-1)$$

Poredeći prethodne dvije relacije zaključujemo da su one identične, odnosno sistem je vremenski invarijantan.

Odziv sistema na $\delta(n)$: Jednačina koja opisuje odziv je:

$$y(n) - \frac{1}{4}y(n-1) = \delta(n) + 2\delta(n-1)$$

Vidimo da za $n < 0$ gornja jednačina postaje $y(n) = \frac{1}{4}y(n-1)$. Pretpostavimo da je sistem kauzalan, odnosno da nema odziva prije pojavljivanja pobude, odakle slijedi da je $y(n) = 0$ za $n < 0$, jer nam je pobuda $\delta(n)$ koje je definisano kao:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{za } n = 0; \\ 0, & \text{za } n \neq 0. \end{cases} \tag{11}$$

dakle, pojavljuje se tek u $n = 0$.

Za $n = 0$ imamo da je $y(0) = \frac{1}{4}y(-1) + \delta(0) + 2\delta(-1) = 1$.

Za $n = 1$ imamo $y(1) = \frac{1}{4}y(0) + \delta(1) + 2\delta(0)$, odnosno $y(1) = \frac{1}{4} + 2$.

Za $n \geq 2$ imamo $y(n) = \frac{1}{4}y(n-1)$, odnosno: $y(2) = \frac{1}{4}y(1) = \frac{1}{4}(\frac{1}{4} + 2)$, $y(3) = \frac{1}{4}y(2) = \frac{1}{4^2}(\frac{1}{4} + 2)$, $y(4) = \frac{1}{4}y(3) = \frac{1}{4^3}(\frac{1}{4} + 2)$ ... Zaključujemo da važi: $y(n) = \frac{1}{4^{n-1}}(\frac{1}{4} + 2)$ za $n \geq 1$ (obratite pažnju da nam se i izraz koji dobijamo za izlaz u trenutku $n = 1$ uklopio u dobijenu opštu formulu).

Odziv sistema na $\delta(n)$ je:

$$y(n) = \begin{cases} 1, \ \text{za} \ n = 0 \\ \frac{1}{4^{n-1}}(\frac{1}{4} + 2) \ \text{za} \ n \geq 1 \end{cases} . \tag{12}$$

Polazeći od ranije navedene definicije za delta impuls (11) i definicije za jedinični step impuls:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & \text{za } n \geq 0; \\ 0, & \text{za } n < 0. \end{cases} ,$$

i znajući da pomjeranje po vremenu znači da je:

$$u(n-1) = \begin{cases} 1, & \text{za } n \geq 1; \\ 0, & \text{za } n < 1 \end{cases} ,$$

dobijeni odziv sistema (12) možemo zapisati kao:

$$y(n) = \delta(n) + \frac{1}{4^{n-1}}(\frac{1}{4} + 2)u(n-1).$$

Odziv sistema na $\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-2)$: Sistem je linearan i vremenski invarijantan (dokazali smo u prvom dijelu zadatka). Dakle, na osnovu poznatog odziva $y_1(n) = \delta(n) + \frac{1}{4^{n-1}}(\frac{1}{4} + 2)u(n-1)$ sistema na signal $\delta(n)$ možemo pronaći odziv na signal $\delta(n-2)$ kao $y_2(n) = \delta(n-2) + \frac{1}{4^{n-3}}(\frac{1}{4} + 2)u(n-3)$ (ovdje smo iskoristili svojstvo vremenske invarijantnosti). Dalje, odziv na linearnu kombinaciju dva ulazna signala $(\delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-2))$ dobijamo kao odgovarajuću linearnu kombinaciju odziva na pojedinačne signale:

$$\begin{aligned} y(n) &= y_1(n) - \frac{1}{2}y_2(n) = \\ &= \delta(n) + \frac{1}{4^{n-1}}(\frac{1}{4} + 2)u(n-1) - \frac{1}{2}(\delta(n-2) + \frac{1}{4^{n-3}}(\frac{1}{4} + 2)u(n-3)) \\ &= \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-2) + \frac{1}{4^{n-1}}(\frac{1}{4} + 2)(u(n-1) - \frac{1}{2}\frac{1}{4^{-2}}u(n-3)) = \\ &= \delta(n) - \frac{1}{2}\delta(n-2) + \frac{1}{4^{n-1}}(\frac{1}{4} + 2)(u(n-1) - 8u(n-3)) \end{aligned}$$