1 DIGITALNA OBRADA SIGNALA - III računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

Odrediti Fourier-ovu transformaciju signala:

$$x(n) = 0.5[1 + cos(\pi n/N)][u(n+N) - u(n-N-1)]$$

Rješenje:
Signal $x(n)$ možemo napisati kao:

$$x(n) = 0.5[1 + cos(\pi n/N)]x_1(n)$$

gdje je:

$$x_1(n) = u(n+N) - u(n-N-1)$$

Dalje možemo pisati:

$$x(n) = 0.5[1 + 1/2(e^{j\pi n/N} + e^{-j\pi n/N})]x_1(n)$$

gdje smo iskoristili: $cosn = 1/2(e^{jn} + e^{-jn})$.

Ukoliko se podsjetimo osobina Fourier-ove transformacije diskretnog signala:

a) Ako je $X(e^{j\omega})$ Fourier-ova transformacija diskretnog signala $x(n)$, Fourier-ova transformacija signala koji se dobija množenjem datog signala kompleksnim eksponencijalnim nizom $e^{j\omega_0 n}$ će biti:

$$FT\{x(n)e^{j\omega_0 n}\} = X(e^{j(\omega-\omega_0)}).$$

b) Ako su $X(e^{j\omega})$ i $Y(e^{j\omega})$ Fourier-ove transformacije diskretnih signala $x(n)$ i $y(n)$, Fourier-ova transformacija njihove linearne kombinacije je jednaka linearnoj kombinaciji pojedinih Fourier-ovih transformacija:

$$FT\{Ax(n) + By(n)\} = AX(e^{j\omega}) + BY(e^{j\omega}).$$

zaključujemo da će Fourier-ove transformacija signala $x(n)$ biti:

$$X(e^{j\omega}) = 0.5[X_1(e^{j\omega}) + 1/2(X_1(e^{j(\omega-\pi/N)}) + X_1(e^{j(\omega+\pi/N)}))] \tag{1}$$

Dakle, dovoljno je izračunati Fourier-ovu transformaciju signala $x_1(n)$, na osnovu jednačine (1) će se, množenjem $X_1(e^{j\omega})$ konstantom i pomjeranjem po frekvenciji, dobiti Fourijer-ova transformacija signala x(n).

Signal $x_1(n)$ je poznat kao "pravougaoni prozor", dok je signal $x(t)$ poznat kao "Hanningov prozor".

Pogledajmo za koje vrijednosti je signal $x_1(n)$ različit od nule:

$$u(n+N) = \begin{cases} 1, & \text{za } n \geq -N \\ 0, & \text{za } n < -N \end{cases}$$

$$u(n-N-1)=\begin{cases}1, & \text{za} \ \ n \geq N+1 \\ 0, & \text{za} \ \ n < N+1\end{cases}$$

pa će biti:

$$x_1(n)=u(n+N)-u(n-N-1)=\begin{cases}1, & \text{za} \ \ -N \leq n \leq N \\ & 0, \ \ \text{drugdje}\end{cases}=\begin{cases}1, & \text{za} \ \ |n| \leq N \\ 0, & \text{za} \ \ |n| > N\end{cases}$$

Sada možemo računati Fourier-ovu transformaciju signala $x_1(n)$:

$$X_1(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-N}^{N} 1e^{-j\omega n}$$

Ovo je suma geometrijskog reda čiji je prvi član $e^{j\omega N}$ i koji ima $2N+1$ elemenata, pa će biti:

$$\begin{aligned} X_1(e^{j\omega}) &= e^{j\omega N}\frac{1-(e^{-j\omega})^{2N+1}}{1-e^{-j\omega}}=\frac{e^{j\omega N}-e^{-j\omega(N+1)}}{1-e^{-j\omega}}\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}}= \\ &= \frac{e^{j\omega(N+1/2)}-e^{-j\omega(N+1/2)}}{e^{j\omega/2}-e^{-j\omega/2}}=\frac{\sin(\omega(N+1/2))}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

Nakon zamjene dobijene Fourier-ove transformacije $X_1(e^{j\omega})$ u (1) dobija se Fourier-ova transformacija signala $x(n)$:

$$X(e^{j\omega})=0.5[\frac{\sin(\omega(N+1/2))}{\sin(\omega/2)}+1/2\frac{\sin((\omega-\pi/N)(N+1/2))}{\sin((\omega-\pi/N)/2)}+1/2\frac{\sin((\omega+\pi/N)(N+1/2))}{\sin((\omega+\pi/N)/2)}]$$

1.2 Zadatak 2.

Odrediti Fourier-ovu transformaciju diskretnog signala $x(n)=nu(5-n)u(n+5)$. Sa $X(e^{j\omega})$ je označena Fourier-ova transformacija signala $x(n)$. Odrediti $X(e^{j0})$, $X(e^{j\pi})$, $X(e^{j\pi/2})$, $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$ i $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$.

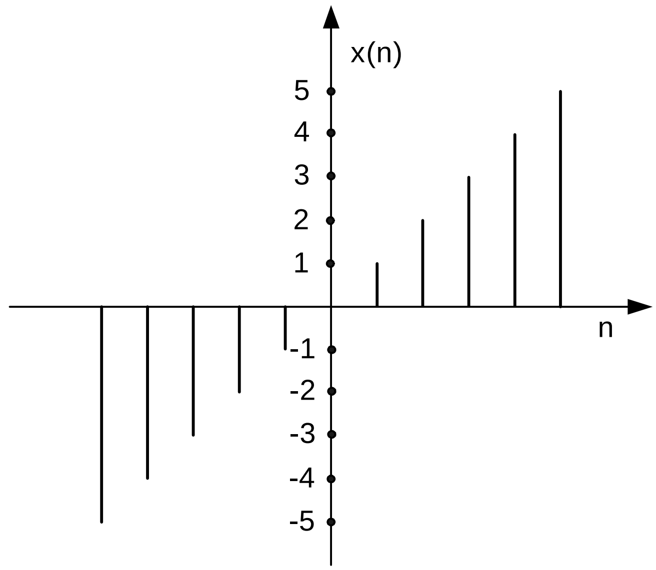
Rješenje:

Prvo ćemo grafički predstaviti signal $x(n)$ i vidjeti za koje vrijednosti n je različit od nule. Znamo da je:

$$\begin{aligned} u(5-n) &= \begin{cases}1, n \leq 5 \\ 0, n > 5\end{cases} \\ u(n+5) &= \begin{cases}1, n \geq -5 \\ 0, n < -5\end{cases} \end{aligned}$$

pa će biti:

$$x(n)=nu(5-n)u(n+5)=\begin{cases}n, |n| \leq 5 \\ 0, |n| > 5\end{cases}$$



Po definiciji Fourier-ove transformacije diskretnog signala je:

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-5}^{5} ne^{-j\omega n} = \sum_{n=-5}^{-1} ne^{-j\omega n} + 0 + \sum_{n=1}^{5} ne^{-j\omega n} = \\ &= \sum_{n=1}^{5} -ne^{j\omega n} + \sum_{n=1}^{5} ne^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{5} n(-e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}) = \\ &= \sum_{n=1}^{5} n2j\frac{(-e^{j\omega n} + e^{-j\omega n})}{2j} = -\sum_{n=1}^{5} n2j\sin(\omega n) \end{aligned}$$

Dobili smo da je Fourier-ova transformacija signala $x(n)$ koji je neparan imaginarna, što se poklapa sa teorijskim očekivanjem.

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j0n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = \sum_{n=-5}^{5} n = 0$$

$$X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(n) = 0$$

Da bismo odredili vrijednost $X(e^{j\pi/2})$ pođimo opet od definicije Fourier-ove transformacije:

$$X(e^{j\pi/2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\pi/2n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-j)^n x(n)$$

Imajući na umu vrijednosti pojedinih stepena $(-j^n)$ date u sledećoj tabeli

n	1	2	3	4	5
$(-j)^n$	$-j$	-1	j	1	$-j$
$(-j)^{-n}$	j	-1	$-j$	1	j

dobijamo:

$$\begin{aligned} X(e^{j\pi/2}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-j)^n x(n) = \\ &= jx(-5)+x(-4)-jx(-3)-x(-2)+jx(-1)+x(0)-jx(1)-x(2)+jx(3)+x(4)-jx(5) = \\ &= -5j+3j-j-j+3j-5j=-6j \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j0\omega}d\omega = 2\pi x(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\left(X(e^{j\omega})\right)^* d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^*(m)e^{j\omega m} d\omega = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(m)\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(m)\delta(m-n) = \\ &= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = 2\pi\sum_{n=-5}^{5} n^2 = 220\pi \end{aligned}$$

Kod zadnjeg izvođenja (Parsevalova teorema) iskorišteno je $\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega = 2\pi$ za $n=m$ i $\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(m-n)}d\omega = \frac{1}{j(m-n)}(e^{j\pi(m-n)} - e^{-j\pi(m-n)}) = 0$ za $n \neq m$.