	UNIVERZITET CRNE GORE **ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET**	

STUDIJSKI PROGRAM:	***ENERGETIKA I AUTOMATIKA***
PREDMET:	***SIGNALI I SISTEMI***
FOND ČASOVA:	***2+1+1***

LABORATORIJSKA VJEŽBA BROJ 1

NAZIV:	***PREDSTAVLJANJE SIGNALA NA RAČUNARU I RAZVOJ FUNKCIJE U FURIER-OV RED***

CILJEVI VJEŽBE:

- Predstavljanje signala u Matlab-u,
- Razumijevanje aproksimacije funkcije Furier-ovim redom.

POTREBAN PRIBOR:

IME I PREZIME: ________________________________.

BROJ INDEKSA: ________.

BROJ POENA:	
OVJERAVA:	
DATUM:	

1. APARATURA

Na raspolaganju su sljedeći uređaji i oprema:

- PC

Za izvođenje laboratorijske vježbe potreban je softverski paket Matlab. U vježbi je predpostavljeno da su studenti osposobljeni za korišćenje pomenutog softvera.

2. TEORIJSKA OSNOVA LABORATORIJSKE VJEŽBE

Predstavljanje kontinualnih signala

Kontinualne signale karakteriše beskonačan skup mogućih vrijednosti i kao takvi se ne mogu predstaviti na računaru. Po Nikvistovoj teoremi, kontinualni signal ograničenog opsega, sa maksimalnom frekvencijom f_m, može se u potpunosti rekonstruisati na osnovu diskretnog signala dobijenog njegovim odabiranjem sa korakom T, ne većim od recipročne vrijednosti dvostruke maksimalne frekvencije. Stoga, predstavljanje signala u Matlab-u zahtijeva njegovu digitalizaciju.

Neka je $f(t)$ kontinualni signal maksimalne frekvencije f_m, gdje je $a \leq t \leq b$. Digitalnu verziju ovoga signala predstavlja niz odbiraka funkcije $f(t)$ uzetih u tačkama $a+nT$, $n=0,1,\ldots$ U obradi signala T se naziva periodom odabiranja i prema Nikvistovoj teoremi mora biti zadovoljen uslov: $T \leq 1/2f_m$.

Dakle, digitalizacija u Matlab-u se može obaviti kroz tri koraka:

- određivanje periode odabiranja
  $T \leq 1/f_m$;
- formiranje vremenske ose
  $n=a:T:b$;
- uzimanja odbiraka signala shodno formiranoj vremenskoj osi
  $fd=f(n)$.

Ilustrujmo ovo na jednom primjeru.

Primjer 1. Prikazati signal $f(t)=10\sin(10\pi t)$ na intervalu [-3,3].

```
fm=5;
T=1/4/fm;
n=-3:T:3;
f=10*sin(10*pi*n);
plot(n,f);
```

Specijalne funkcije

U obradi signala od posebnog značaja su Heaviside-ova i Dirac-ova funkcija, koje su definisane respektivno:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}.$$

Njihova realizacija u Matlab-u je prilično jednostavna. Ako je `n` vremenska osa, $h(t)$ se može realizovati na sljedeći način

```
h=n>=0;
```

a $\delta(t)$ kao

```
d=n==0;
```

U Matlabu postoje i ugrađene naredbe pomoću kojih se realizuju ove funkcije, a to su *heaviside* i *dirac*.

Razvoj signala u Furier-ov red

Razvoj proizvoljne periodične funkcije u trigonometrijski Fourier-ov red se može izvršiti na sljedeći način:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \tag{1}$$

Koeficijenti razvoja funkcije $f(t)$ a_0, a_n i b_n se dobijaju na osnovu relacija:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

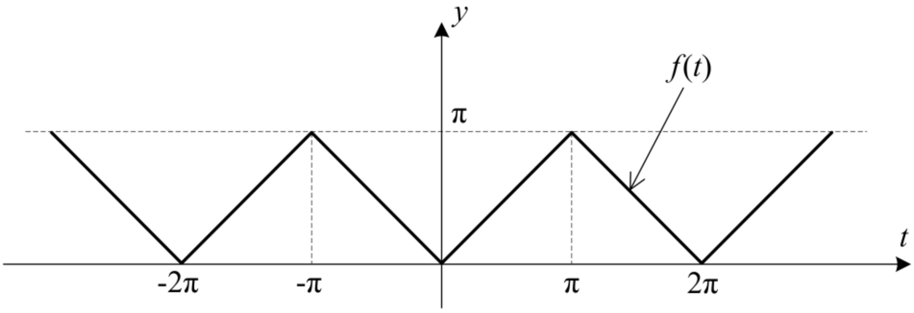
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

gde je T trajanje osnovne periode, a ω_0 osnovna (fundamentalna) učestanost.

Kao što se da vidjeti, suma u relaciji (1) je beskonačna i kao takva se ne može prikazati na računaru. Stoga, ona se ograničava. Jedan član ove sume se naziva harmonikom. Konačan broj harmonika izazvaće grešku u aproksimaciji. Što je taj broj veći, to je i aproksimacija vjerodostojnija. Tačnost aproksimacije se može sagledati preko srednje kvadratne greške:

$$e = \sum_{t=a}^{b} (f_d(t) - f(t))^2.$$

Primjer 2. Izvršiti razvoj funkcije $f(t)$ prikazane na Slici 1. u tigonometrijski Furier-ov red.



Slika 1 - Signal iz Primjera 2.

Sa slike se da zaključiti da je funkcija $f(t)$ periodična sa trajanjem osnovnog perioda $T=2\pi$, odakle slijedi $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T = 1$. $f(t)$ se u osnovnom periodu može zapisati na sljedeći način:

$$f(t) = \begin{cases} |t|, & -\pi \le t \le \pi \\ 0, & \text{za ostalo} \end{cases},$$

na osnovu čega slijedi:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi}\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{t\sin(nt)}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n = 1,3,5,\ldots \\ 0, & n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |t|\sin(nt)\,dt = \big[|t| \text{ je parna funkcija}\big] = 0$$

Uvrštavanjem gornjih relacija u izraz (1) dobijamo:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos(t) + \frac{1}{3^2}\cos(3t) + \frac{1}{5^2}\cos(5t) + \cdots\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)t).$$

3. ZADACI LABORATORIJSKE VJEŽBE

Zadatak 1. Definisati i grafički prikazati signale:

$$x(t) = e^{-t}\sin(4t)$$

$$y(t) = \sin(2t)/2 + \cos(8t)/8$$

na intervalu $0 \le t < 2\pi$ sa korakom odabiranja $T=\pi/32$. U jednom grafičkom prozoru prikazati obje funkcije naredbom *plot*, a drugi grafički prozor izdJeliti na dva potprozora i u jednom potprozoru prikazati funkciju $x(t)$ naredbom *stem*, a u drugom prikazati funkciju $y(t)$ naredbom *stem*. Postaviti odgovarajuće oznake na graficima.

Zadatak 2. Periodična funkcija $f(t)$, koja se u osnovnom periodu može zapisati kao:

$$f(t) = |t|, \quad -\pi \le t \le \pi$$

ima razvoj u trigonometrijski Fourier-ov red oblika:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos(t) + \frac{1}{3^2}\cos(3t) + \frac{1}{5^2}\cos(5t) + \cdots\right] = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)t)$$

Napisati Matlab program koji formira funkciju $f(t)$ na intervalu $[-3\pi, 3\pi]$, sa $T=1/200$, i koji od korisnika traži unos broja N, koji predstavlja broj harmonika razvoja te funkcije u trigonometrijski Fourier-ov red. Nakon toga, program treba da u istom grafičkom prozoru prikaže način na koji suma jednosmerne komponente i harmonika konvergira originalnoj funkciji, pri čemu broj harmonika raste od 1 do N.

Pored pomenutih grafika, u grafičkom prozoru treba da stoji i vrijednost kvadratne greške aproksimacije prilikom dodavanja svakog od harmonika.

Zadatak 3. Periodična funkcija $f(t)$, koja se u osnovnom periodu može zapisati kao:

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{za } -\pi \le t < 0 \\ 1, & \text{za } 0 \le t < \pi \end{cases}$$

ima razvoj u trigonometrijski Fourier-ov red oblika:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left[\sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \cdots\right] = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\sin((2n-1)t)$$

Napisati Matlab program koji formira funkciju $f(t)$ na intervalu $[-3\pi, 3\pi]$, sa $T=1/100$, i koji od korisnika traži unos greške E, koja predstavlja tačnost razvoja te funkcije u trigonometrijski Fourier-ov red za konačan broj uzetih harmonika. Nakon toga, program treba da u istom grafičkom prozoru prikaže način na koji suma jednosmerne komponente i harmonika konvergira originalnoj funkciji, pri čemu broj harmonika raste sve dok je vrijednost kvadratne greške aproksimacija veća od E ili broj harmonika manji od 50.

4. ZAKLJUČAK