X čas računskih vježbi iz Signala i sistema

Zadatak 1. Odrediti Z-transformaciju kauzalnog signala $x(n)$:

$$x(n) = \frac{1}{2^n}u(n) + \frac{1}{3^n}u(n)$$

Rješenje:

Z-transformacija signala $x(n)$ je po definiciji:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

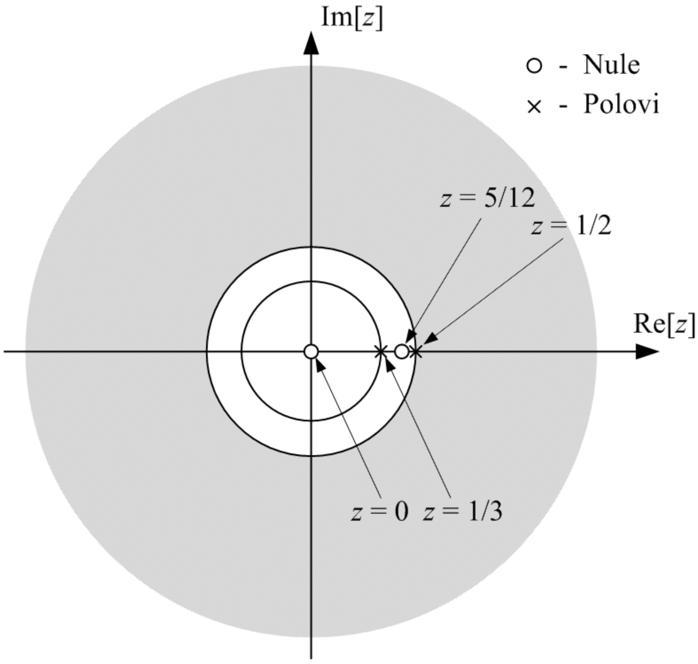
Uvrstimo naš signal u definiciju:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}.$$

Oblast konvergencije prve komponente je $\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > 1/2$, a druge je $|z| > 1/3$, a to znači da je oblast konvergencije čitavog signala $|z| > 1/2$. Prethodni izraz dalje svodimo na:

$$X(z) = \frac{2-(5/6)z^{-1}}{\left(1-\frac{z^{-1}}{2}\right)\left(1-\frac{z^{-1}}{3}\right)}\frac{z^2}{z^2} = \frac{z(2z-5/6)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}.$$

Dijagram nula i polova Z-transformacije signala $x(n)$ i njegova oblast konvergencije (osenčeno) su prikazani na donjoj slici:



Navešćemo nekoliko značajnih osobina Z-transformacije:

- Oblast konvergencije Z-transformacije bilo kog signala je prsten u Z-ravni, centriran oko koordinatnog početka;
- Oblast konvergencije ne sme uključiti nijedan pol!
- U slučaju kauzalnog niza (ograničenog sa leve strane), oblast konvergencije se prostire od beskonačnosti (ponekad se tačka $z = \infty$ može isključiti iz oblasti konvergencije, što zavisi od samog signala, tj. tačke od koje on počinje), do kružnice poluprečnika R, koja prolazi kroz pol najudaljeniji od koordinatnog početka (u našem primeru najudaljeniji pol se nalazi u tački z =1/2).

- U slučaju antikauzalnog niza (ograničenog sa desne strane), oblast konvergencije se prostire od koordinatnog početka (ponekad se tačka $z = 0$ može isključiti iz oblasti konvergencije, što opet zavisi od samog signala, tj. tačke u kojoj se on završava), do kružnice poluprečnika R, koja prolazi kroz pol najbliži koordinatnom početku.
- U slučaju niza neograničenog sa obe strane, oblast konvergencije je prsten u Z-ravni. U ovom slučaju se niz posmatra kao suma njegovog kauzalnog i antikauzalnog dela, pa polovi tih delova određuju položaj prstena u Z-ravni.
- U slučaju ograničenog niza, oblast konvergencije je čitava Z-ravan, pri čemu se mogu isključiti tačke 0 i/ili ∞, što zavisi od početka i kraja niza.

Zadatak 2. Odrediti Z-transformaciju sledećih nizova:

a) $x(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$

b) $x(n) = \dfrac{1}{2^n}\left[u(n) - u(n-10)\right]$;

c) $x(n) = (1/2)^{|n|}$.

Rješenje:

a) $X(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = z + 1 + z^{-1} = 1 + z + \dfrac{1}{z}$.

Znači, oblast konvergencije isključuje tačke 0 i ∞, jer u prvoj član $1/z$ divergira, a u drugoj član z divergira.

b) $X(z) = \sum\limits_{n=0}^{9}\left(\dfrac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \dfrac{1-(1/2)^{10} z^{-10}}{1-(1/2)z^{-1}}\dfrac{z^{10}}{z^{10}} = \dfrac{z^{10}-(1/2)^{10}}{z^9(z-1/2)}$.

Dijagram nula i polova Z-transformacije ovog signala $x(n)$ i njegova oblast konvergencije su prikazani na donjoj slici pod a).

c) $X(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|n|} z^{-n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} z^{-n} + \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-n} z^{-n}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, \qquad \text{oblast konvergencije: } \underline{|z| > \frac{1}{2}}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} z^{n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^{n+1} = \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n} =$$

$$= \frac{z}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{z}{2-z} = -\frac{z}{z-2}, \qquad \text{oblast konvergencije: } \underline{\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 2}$$

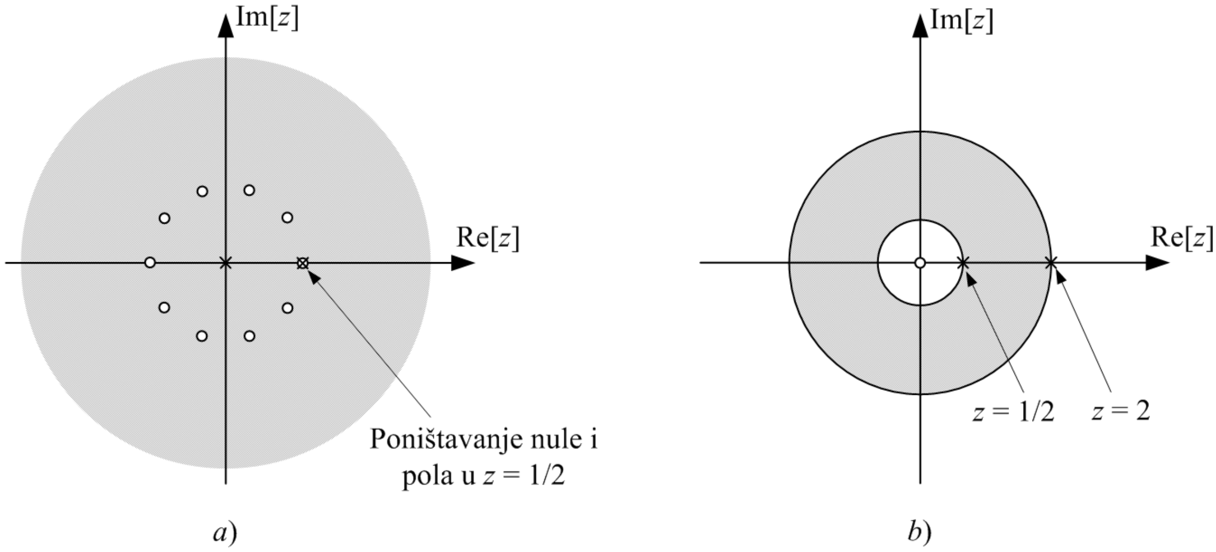
Dakle:

$$X(z) = \frac{z}{z-1/2} - \frac{z}{z-2} = -\frac{3}{2}\frac{z}{(z-1/2)(z-2)}.$$

Oblast konvergencije Z-transformacije ovog signala je prsten definisan:

$$\frac{1}{2} < |z| < 2$$

i prikazana je na slici b).



Zadatak 3. Data je Z-transformacija:

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}.$$

Odrediti inverznu Z-transformaciju pod uslovom da je oblast konvergencije:

a) $|z|>\frac{1}{3}$;

b) $\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}$;

c) $|z|<\frac{1}{4}$.

Rješenje:

Prilikom traženja inverzne Z-transformacije nećemo koristiti definicioni integral, već ćemo ići na prepoznavanje signala čiju Z-transformaciju znamo. Ukoliko je Z-transformacija data u obliku razlomka, kao što je u našem slučaju, prvo ćemo razbiti taj razlomak na parcijalne razlomke, a onda ćemo tumačiti svaku od dobijenih komponenti. Pri tom ćemo koristiti dva transformaciona para, jedan za kauzalni i jedan za antikauzalni signal.

$$a^n u(n) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}, \quad \underline{|z|>a}$$

$$-a^n u(-n-1) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{z}{z-a}, \quad \underline{|z|<a}$$

Razvoj $X(z)$ u parcijalne razlomke izgleda:

$$X(z)=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

a) U ovom slučaju, oba razlomka tumačimo kao Z-transformacije kauzalnih nizova, tj.:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)+2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \quad \leftrightarrow \quad \frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad \underline{|z|>\frac{1}{3}}.$$

b) U ovom slučaju, prvi razlomak tumačimo kao Z-transformaciju kauzalnog, a drugi kao Z-transformaciju antikauzalnog niza, tj.:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)-2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1) \quad \leftrightarrow \quad \frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad \underline{\frac{1}{4}<|z|<\frac{1}{3}}$$

c) U ovom slučaju, oba razlomka tumačimo kao Z-transformacije antikauzalnih nizova, tj.:

$$-\left(\frac{1}{4}\right)^n u(-n-1)-2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1) \quad \leftrightarrow \quad \frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad \underline{|z|<\frac{1}{4}}.$$

Kada bi prvi razlomak tumačili kao Z-transformaciju antikauzalnog, a drugi kao Z-transformaciju kauzalnog niza, onda njihov zbir ne bi imao Z-transformaciju, jer im se oblasti konvergencije ne bi sekle u Z-ravni.