# VII čas računskih vježbi iz Signala i sistema

**Zadatak 1.** Ispitati periodičnost sledećih signala:

a) $x(n) = \sin(2\pi n/32)$;
b) $x(n) = \cos(9\pi n/82)$;
c) $x(n) = e^{jn/32}$;
d) $x(n) = \sin(\pi n/5) + \cos(5\pi n/6+\pi/4) - \sin(\pi n/4)$.

***Rješenje:***

Diskretni signal $x(n)$ je periodičan ako postoji ceo broj $N$ takav da je $x(n) = x(n+N)$. Najmanji broj $N$ za koji je zadovoljena prethodna relacija je osnovni period signala $x(n)$.

a) Umesto $n$ uvrstimo $n+N$ u polazni signal:

$$x(n+N) = \sin(2\pi(n+N)/32) = \sin(2\pi n/32+2\pi N/32)$$

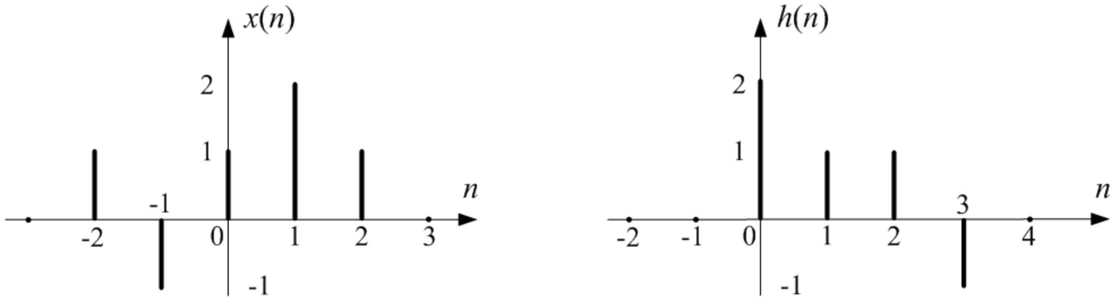
$\sin(n)$ je periodična sa periodom $2\pi$, pa ako postoji prirodan broj $N$ takav da je $2\pi N/32 = 2k\pi$, gde je $k$ ceo broj, tj. $N = 32k$, onda je $x(n)$ periodična. U našem slučaju, najmanji prirodan broj $N$ je 32, što predstavlja period ovog signala.

b) $x(n+N) = \cos(9\pi(n+N)/82) = \sin(9\pi n/82+9\pi N/82) = x(n)$ za $9\pi N/82 = 2k\pi$, tj. $N = 164k/9$. Period signala je $N = 164$ i to za $k=9$.

c) $x(n+N) = e^{j(n+N)/32}$. Prethodni signal je jednak $x(n)$ ako je $N/32 = 2k\pi$, odnosno $N = 64k\pi$, što svakako ne može biti prirodan broj. Zaključujemo da $x(n)$ nije periodičan signal!

d) Uraditi za vežbu. Trebalo bi da dobijete da je signal periodičan sa periodom $N = 120$.

**Zadatak 2.** Odrediti i grafički prikazati konvoluciju signala $x(n)$ i $h(n)$ prikazanih na slici. Pronaći energiju konvolucije ova dva signala.




***Rješenje:***

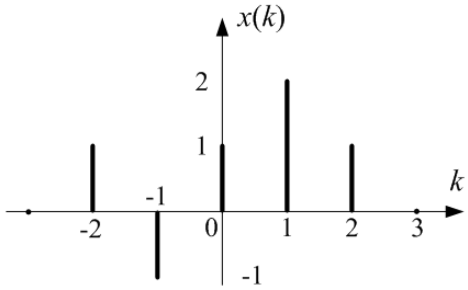
Konvolucija diskretnih signala $x(n)$ i $h(n)$ se definiše na sledeći način:

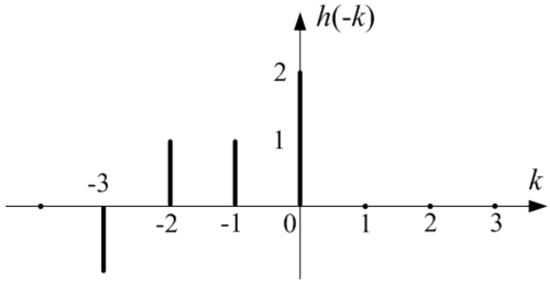
$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

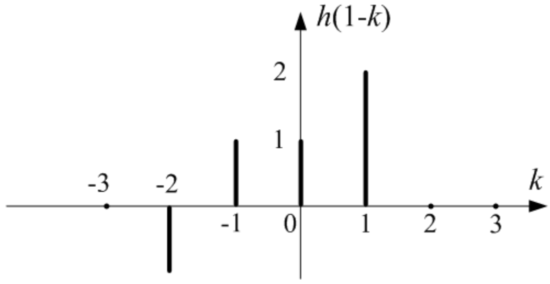
Na osnovu definicije i na osnovu gfrafičkog prikaza ove dve funkcije nalazimo $y(n)$ za razne vrednosti $n$. Mi ćemo grafički prikazati samo položaj funkcije $h(n\text{-}k)$ za $k=0$ i $k=1$.

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k) = 2-1+1 = 2$$

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k) = -1-1+1+4 = 3$$




$$y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(2-k)=1+1+2+2=6$$

$$y(3)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(3-k)=-1+2+1=2$$

$$y(4)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(4-k)=-2+1=-1$$

$$y(5)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(5-k)=-1$$

$y(n)=0,$ za $n\geq 6$.

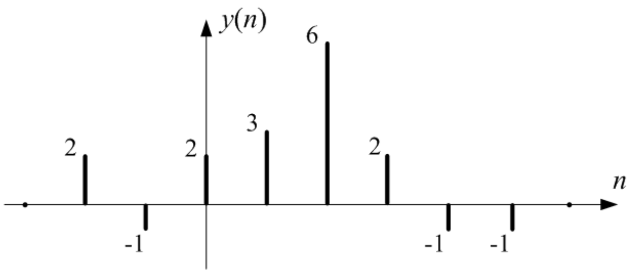
Slično, za negativne vrednosti $n$ dobijamo:

$y(-1)=-1$

$y(-2)=2$

$y(n)=0$ za $n<-2$.

Konvolucija ova dva signala je grafički prikazana na donjoj slici:




Analitički oblik ovog signala je:

$$y(n)=2\delta(n+2)-\delta(n-1)+2\delta(n)+3\delta(n-1)+6\delta(n-2)+2\delta(n-3)-\delta(n-4)-\delta(n-5).$$

Energija diskretnog signala $y(n)$ se određuje na osnovu relacije:

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| y(n) \right|^2 .$$

U našem slučaju imamo:

$$E_y = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 + 3^2 + 6^2 + 2^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 60.$$

**Zadatak 3.** Ispitati linearnost i vremensku invarijantnost sistema opisanih izrazima:

a) $y(n) = x(n\text{-}2)$;
b) $y(n) = e^{x(n)}$.

***<u>Rješenje:</u>***

Za sistem kažemo da je *linearan* ukoliko je odziv sistema na linearnu kombinaciju signala jednak linearnoj kombinaciji odziva na pojedine signale, tj. ako operatorom $T$ modelujemo uticaj sistema na ulazne signale $x_1(n)$ i $x_2(n)$, onda se linearnost zapisuje kao:

$$T\left[Ax_1(n) + Bx_2(n)\right] = AT\left[x_1(n)\right] + BT\left[x_2(n)\right]$$

gde su $A$ i $B$ proizvoljne konstante.

Diskretni sistem je *vremenski invarijantan* ukoliko se njegove karakteristike ne menjaju u vremenu, tj. ako je $y(n)$ odziv vremenski invarijantnog sistema na ulazni signal (pobudu) $x(n)$, onda je njegov odziv na $x(n\text{-}N)$ jednak $y(n\text{-}N)$, gde je $N$ proizvoljan ceo broj.

U našem slučaju:

a) $T\left[Ax_1(n) + Bx_2(n)\right] = Ax_1(n\text{-}2) + Bx_2(n\text{-}2) = AT\left[x_1(n)\right] + BT\left[x_2(n)\right]$.

Dakle, sistem je linearan.

$$T\left[x(n\text{-}N)\right] = x(n\text{-}N\text{-}2) = x(n\text{-}2\text{-}N) = y(n\text{-}N).$$

Dakle, sistem je vremenski invarijantan.

b) $T\left[Ax_1(n) + Bx_2(n)\right] = e^{Ax_1(n)+Bx_2(n)} = e^{Ax_1(n)}e^{Bx_2(n)} \neq AT\left[x_1(n)\right] + BT\left[x_2(n)\right]$

Dakle, sistem nije linearan.

$$T\left[x(n\text{-}N)\right] = e^{x(n\text{-}N)} = y(n\text{-}N).$$

Dakle, sistem je vremenski invarijantan.