VIII čas računskih vježbi iz Signala i sistema

Zadatak 1. Odrediti impulsni odziv $h(n)$ kauzalnog sistema opisanog jednačinom:

$$y(n)-\frac{1}{3}y(n-1)=x(n)$$

Rješenje:

Da bismo odredili impulsni odziv, uzećemo $x(n)=\delta(n)$ i zadaćemo početne uslove. Pošto smo pretpostavili da je sistem kauzalan, imamo da je $h(n)=0$ za $n<0$.

Jednačinu sistema napišimo u obliku:

$$y(n)=\frac{1}{3}y(n-1)+x(n)$$

I za $x(n)=\delta(n)$ imamo da je $y(n)=h(n)$. Određujemo $h(n)$ za $n\geq 0$.

$$h(0)=\frac{1}{3}h(-1)+\delta(0)=1$$

$$h(1)=\frac{1}{3}h(0)+\delta(1)=\frac{1}{3}$$

$$h(2)=\frac{1}{3}h(1)=\frac{1}{3^2}$$

$$\vdots$$

$$h(n)=\frac{1}{3}h(n-1)=\frac{1}{3^n}$$

Dakle, impulsni odziv sistema je:

$$h(n)=\frac{1}{3^n}u(n).$$

Zadatak 2. Odrediti impulsni odziv $h(n)$ sistema opisanog jednačinom:

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+2x(n-1)+x(n-2)$$

pod uslovom da je sistem:

a) kauzalan,
b) antikauzalan.

Koji od sistema je stabilan?

Rješenje:

a) Kod kauzalnog sistema nema odziva pre pobude, pa je $y(n)=0$ za n<0.

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+2x(n-1)+x(n-2)$$

Za $x(n)=\delta(n)$ imamo:

$$h(0)=1,\qquad h(1)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2},\qquad h(2)=\frac{9}{4}=\frac{9}{2^2},\qquad h(3)=\frac{9}{8}=\frac{9}{2^3}$$

$$h(4)=\frac{9}{16}=\frac{9}{2^4},\ldots\qquad \boxed{h(n)=\delta(n)+\frac{5}{2}\delta(n-1)+\frac{9}{2^n}u(n-2)}$$

Ovde možemo odmah odrediti i stabilnost sistema. Sistem je stabilan ako njegov impulsni odziv zadovoljava relaciju:

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|<\infty$$

U našem slučaju:

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)\right|=1+\frac{5}{2}+9\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{7}{2}+\frac{9}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{7}{2}+\frac{9}{4}2=8.$$

Dakle, ovaj sistem je stabilan.

b) Kod antikauzalnog sistema odziv postoji pre pobude. Sistem se opisuje na sledeći način:

$$y(n-1)=2y(n)-2x(n)-4x(n-1)-2x(n-2),\text{ odnosno:}$$

$$y(n)=2y(n+1)-2x(n+1)-4x(n)-2x(n-1)$$

Za $x(n)=\delta(n)$, $y(n)$ je različito od 0 za $n\leq 1$:

$$h(1)=-2,\qquad h(0)=2(-2)-4=-8,\qquad h(-1)=2(-8)-2=-18,$$

$$h(-2)=2(-18),\qquad h(-3)=2^2(-18),...,\qquad \boxed{h(n)=-2\delta(n-1)-8\delta(n)-18*2^{-1-n}u(-1-n)}$$

U ovom slučaju imamo:

$$S=2+8+18+2*18+2^2*18+...\to\infty$$

Dakle, ovaj sistem nije stabilan.

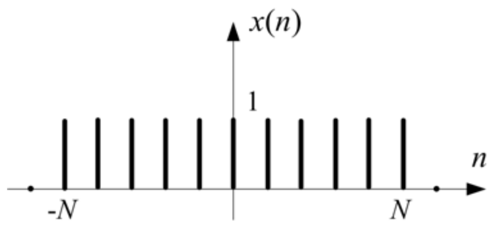
<u>Napomena</u>: Kod kauzalnih sistema izlaz ne zavisi od budućih vrednosti ulaznog signala, dok je kod antikauzalnih (nekauzalnih) sistema to moguće. To dalje znači da nije moguće fizički realizovati antikauzalne sisteme, tj. svi fizički sistemi su kauzalni. Postavlja se pitanje smislenosti izučavanja antikauzalnih sistema. Ipak, sa stanovišta analize, ovi sistemi su važni zbog dva razloga. Prvo, idealni sistem za datu aplikaciju je često antikauzalni, pa iako nije fizički izvodljiv, može poslužiti u dizajnu kauzalnog sistema koji radi sličnu stvar. Drugo, postoje instance kada sistem ne radi u "realnom vremenu", već se softverski simulira "off-line" pomoću računara, pa se i antikauzalni sistemi mogu tako upotrebljavati.

Zadatak 3. Odrediti Fourier-ovu transformaciju signala:

$$x(n) = u(n+N) - u(n-N-1)$$

<u>Rješenje:</u>

Dati signal, poznatiji kao pravougaoni prozor, je prikazan na donjoj slici:



Fourier-ova transformacija proizvoljnog diskretnog signala $x(n)$ se definiše kao:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

U našem slučaju:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-N}^{N}e^{-j\omega n}.$$

Prethodnu sumu ćemo izračunati koristeći identitet:

$$\sum_{k=0}^{N} r^k = \frac{r^{N+1}-1}{r-1}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-N}^{N}\left(e^{-j\omega}\right)^n = e^{j\omega N}\sum_{n=0}^{2N}\left(e^{-j\omega}\right)^n = e^{j\omega N}\,\frac{e^{-j\omega(2N+1)}-1}{e^{-j\omega}-1}=\frac{e^{-j\omega\frac{2N+1}{2}}-e^{j\omega\frac{2N+1}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}-e^{j\frac{\omega}{2}}}=\frac{\sin\left(\omega\dfrac{2N+1}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}$$

Za N=7 Fourier-ova transformacija pravougaonog prozora je data na donjoj slici: