IX čas računskih vježbi iz Signala i sistema

Zadatak 1. Odrediti diskretnu Fourier-ovu transformaciju (DFT) signala $x(n)$:

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + 3\delta(n-2) + 4\delta(n-3)$$

Rješenje:

Da bi izračunali DFT signala $x(n)$ treba odrediti trajanje signala N, koje ne sme biti manje od broja nenultih odbiraka signala. Ukoliko između nenultih odbiraka postoje odbirci jednaki nuli onda se i oni moraju računati u trajanje N. U našem slučaju moramo uzeti $N \geq 4$. Uzmimo $N=4$.

DFT signala $x(n)$ je po definiciji:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{\,nk}$$

gde je $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$. Uvrstimo naš signal i N u definiciju:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{3} x(n) W_N^{\,nk} = \sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}nk} = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + 3e^{-j\frac{4\pi}{4}k} + 4e^{-j\frac{6\pi}{4}k} \qquad \Rightarrow$$

$$X(0) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$X(1) = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{4\pi}{4}} + 4e^{-j\frac{6\pi}{4}} = -2 + j2$$

$$X(2) = 1 + 2e^{-j\frac{4\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{8\pi}{4}} + 4e^{-j\frac{12\pi}{4}} = -2$$

$$X(3) = 1 + 2e^{-j\frac{6\pi}{4}} + 3e^{-j\frac{12\pi}{4}} + 4e^{-j\frac{18\pi}{4}} = -2 - j2$$

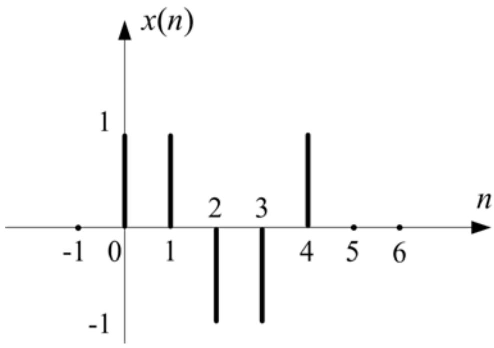
Zadatak 2. a) Odrediti DFT signala $x(n)$:

$$x(n) = u(n) - 2u(n-2) + 2u(n-4) - u(n-5)$$

b) Koji uslov treba da ispuni signal da bi njegova DFT bila realna?

Rješenje:

a) Signal $x(n)$ je prikazan na donjoj slici:



Uzećemo da je $N=5$ i imamo:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{4} x(n) W_N^{\,nk} = 1 + e^{-j\frac{2\pi}{5}k} - e^{-j\frac{4\pi}{5}k} - e^{-j\frac{6\pi}{5}k} + e^{-j\frac{8\pi}{5}k} = \left[\underline{\underline{e^{-j\frac{6\pi}{5}k} = e^{-j\frac{6\pi}{5}k + j\frac{10\pi}{5}k}}} \ \text{i} \ \underline{\underline{e^{-j\frac{8\pi}{5}k} = e^{-j\frac{8\pi}{5}k + j\frac{10\pi}{5}k}}} \right] =$$

$$= 1 + e^{-j\frac{2\pi}{5}k} - e^{-j\frac{4\pi}{5}k} - e^{j\frac{4\pi}{5}k} + e^{j\frac{2\pi}{5}k} = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi k}{5}\right) - 2\cos\left(\frac{4\pi k}{5}\right).$$

DFT ovog signala je realna.

b) Na osnovu dela zadatka pod a) može se zaključiti da je DFT signala $x(n)$ realna ukoliko važe sledeće jednakosti:

$$x(1) = x(N-1)$$
$$x(2) = x(N-2)$$
$$\vdots$$
$$\boxed{x(n) = x(N-n)}$$

Da li je DFT signala $x(n)$ realna ukoliko je on kompleksan i zadovoljava prethodnu relaciju?

Zadatak 3. Dokazati Parseval-ovu relaciju za slučaj periodičnih diskretnih signala:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| x_p(n) \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| X_p(k) \right|^2$$

Rješenje:

Inverzna DFT (IDFT) predstavlja način dobijanja originalnog signala $x(n)$ na osnovu njegove DFT i data je izrazom:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

Izraz za IDFT ćemo iskoristiti prilikom dokazivanja Parseval-ove relacije:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| x_p(n) \right|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) x_p^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k_1=0}^{N-1} X_p(k_1) W_N^{-nk_1} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{k_2=0}^{N-1} X_p^*(k_2) W_N^{nk_2} \right) =$$
$$\frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} X_p(k_1) X_p^*(k_2) W_N^{-n(k_1-k_2)} = \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} X_p(k_1) X_p^*(k_2) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-n(k_1-k_2)}$$

Pošto je:

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-n(k_1-k_2)} = \begin{cases} N, & k_1 = k_2 \\ 0, & k_1 \neq k_2 \end{cases} \qquad 0 \le k_1, k_2 \le N-1$$

onda se dvostruka suma po k_1 i k_2 svodi na jednu sumu, recimo po k_1:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| x_p(n) \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k_1=0}^{N-1} X_p(k_1) X_p^*(k_1) = \frac{1}{N} \sum_{k_1=0}^{N-1} \left| X_p(k_1) \right|^2$$

čime je relacija dokazana.
Proverimo datu relaciju za slučaj signala iz prvog zadatka:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| x_p(n) \right|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| X_p(k) \right|^2 = \frac{1}{4} \left(10^2 + \left| -2 + j2 \right|^2 + (-2)^2 + \left| -2 - j2 \right|^2 \right) = \frac{1}{4} \left(10^2 + 8 + 4 + 8 \right) = 30.$$