II čas računskih vježbi iz Signala i sistema

Zadatak 1. Za sisteme opisane navedenim jednačinama odredite da li su linearni ili nelinearni. Ulaz u sistem obilježen je sa $f(t)$, a izlaz sa $y(t)$.

a) $\dfrac{dy}{dt}+2y(t)=f^2(t)$ b) $\dfrac{dy}{dt}+3t\,y(t)=t^2 f(t)$ c) $\dfrac{dy}{dt}+y^2(t)=f(t)$ d) $3y(t)+2=f(t)$

Rješenje:

Uslov linearnosti sistema se može definisati na sledeći način:

Ako je $y_1(t)$ odziv sistema na pobudu $f_1(t)$, a $y_2(t)$ odziv na $f_2(t)$ tada je:

L1 Odziv na pobudu $Cf_1(t)$ jednak $Cy_1(t)$, pri čemu je C proizvoljna konstanta i

L2 Odziv na pobudu $f_1(t)+f_2(t)$ jednak $y_1(t)+y_2(t)$.

L1 je osobina homogenosti, a L2 osobina aditivnosti.

a) Ispitajmo uslov L1. Pobudu $f_1(t) = Cf(t)$ i odziv $y_1(t) = Cy(t)$ uvrstimo u jednačinu sistema i ako dobijemo polaznu jednačinu sistem je homogen.

$$C\frac{dy}{dt}+2Cy(t)=C^2 f^2(t) \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dt}+2y(t)=Cf^2(t) \quad\Rightarrow\quad f^2(t)=Cf^2(t)$$

Dobili smo kontradikciju jer očigledno L1 ne vrijedi za sve vrijednosti C, tačnije vrijedi samo za C=0 i C=1. Dakle, ovaj sistem nije linearan.

b) Uslov L1:

$$C\frac{dy}{dt}+3tCy(t)=t^2Cf(t) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt}+3ty(t)=t^2 f(t)$$

Dakle, dobili smo jednačinu koja je prema L1 zadovoljena, pa je stoga za $C\neq 0$ uslov L1 zadovoljen. Slučaj C=0 provjeravamo direktno iz polazne jednačine i zaključujemo da je i tada uslov L1 zadovoljen. Dakle, L1 vrijedi za svako C, tj. sistem je homogen.

Ispitajmo sad uslov L2 zamjenjujući odziv i pobudu u jednačinu sistema:

$$\frac{d(y_1+y_2)}{dt}+3t(y_1(t)+y_2(t))=t^2(f_1(t)+f_2(t)) \;\Rightarrow\; \frac{dy_1}{dt}+3ty_1(t)+\frac{dy_2}{dt}+3ty_2(t))=t^2(f_1(t)+f_2(t))$$
$$\Rightarrow\; t^2 f_1(t)+t^2 f_2(t)=t^2(f_1(t)+f_2(t))$$

što je očigledno tačno.
Dokazali smo da vrijede i L1 i L2, pa je posmatrani sistem linearan!

c) Uslov L1:

$$C\frac{dy}{dt}+C^2y^2(t)=Cf(t) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt}+Cy^2(t)=f(t)$$

Ova jednakost vrijedi samo za C=1 i C=0, dakle uslov L1 nije zadovoljen i sistem je nelinearan.

d) Dokazuje se slično prethodnim primjerima.

Zadatak 2. Za sisteme opisane navedenim jednačinama ispitati da li su vremenski invarijantni sistemi:

a) $y(t)=f(t-2)$ b) $y(t)=f(-t)$ c) $y(t)=t\,f(t-2)$

Rješenje:

Sistem je vremenski invarijantan ako iz pretpostavke da je $y(t)$ odziv na signal $f(t)$ slijedi da je $y_1(t) = y(t-T)$ odziv na pobudu $f_1(t) = f(t-T)$, za svaku vrijednost vremenskog pomjeraja T, tj. da vremenski pomjerenoj verziji ulaznog signala odgovara vremenski pomjerena verzija izlaznog signala, za istu vrijednost pomjeraja. Vremensku invarijantnost sistema ispitivaćemo tako što odredimo odziv $y_1(t)$ na ulaz $f_1(t)$ izražavanjem $f_1(t)$ preko $f(t)$. Sa druge strane, iz jednačine datog sistema odredimo vremenski pomjerenu verziju odziva $y(t-T)$. Ova dva signala trebaju biti jednaka za svako T da bi sistem bio vremenski invarijantan.

a) Imamo da je $y_1(t) = f_1(t-2) = f(t-2-T) = f(t-T-2)$. Ovdje je $y_1(t)$ odziv sistema na $f_1(t)$. Sa druge strane, pomjereni odziv je $y(t-T) = f((t-T)-2) = f(t-T-2)$ (iskorišten je uslov da $y(t) = f(t-2)$ vrijedi za svako t i uvrštena je smjena $t \to t-T$). Zaključujemo da je sistem vremenski invarijantan.

b) Slično kao malopre, $y_1(t) = f_1(-t) = f(-t-T)$ i $y(t-T) = f(-(t-T)) = f(-t+T)$. Dobili smo različite izraze (jednaki su samo za T=0), znači sistem nije vremenski invarijantan.

c) $y_1(t) = tf_1(t-2) = tf(t-2-T)$ i $y(t-T) = (t-T)f(t-T-2) = tf(t-2-T) - Tf(t-2-T)$. Ponovo su izrazi različiti, odnosno nijesu identički jednaki za svako T, što znači da sistem nije vremenski invarijantan.

Zadatak 3. Linearni, vremenski invarijantni kauzalni sistem (LTIC) je opisan jednačinom $(D^2+3D+2)y(t) = D\,f(t)$, gdje je D diferencijalni operator.

a) Napisati jednačinu u standardnom obliku,
b) Naći karakterističnu jednačinu, sopstvene vrijednosti, i sopstvene modove sistema,
c) Naći sopstveni odziv sistema (zero-input response) za početne uslove $y_0(0)=3$ i $y_0'(0)=-4$

Rješenje:

a) $y''(t)+3y'(t)+2y(t) = f'(t)$

b) Karakteristična jednačina je $\lambda^2+3\lambda+2=0$, sopstvene vrijednosti su $\lambda_1=-1$ i $\lambda_2=-2$, a sopstveni modovi: e^{-t} i e^{-2t}

c) Rješenje tražimo u obliku linearne kombinacije modova sistema: $y_0(t) = Ae^{-t}+Be^{-2t}$ gdje konstante A i B određujemo iz početnih uslova: $y_0(0)=A+B=3$, $y_0'=-A-2B=-4$, odakle slijedi $A=2$ i $B=1$ pa je traženi odziv $y(t)=2e^{-t}+e^{-2t}$ za $t>0$.

Zadatak 4. Za linearni, vremenski invarijantni kauzalni sistem opisan jednačinom $(D^2+1)y(t)=(D+1)f(t)$ odrediti karakterističnu jednačinu, sopstvene vrijednosti, sopstvene modove sistema i sopstveni odziv sistema za početne uslove $y(0)=2$ i $y'(0)=0$.

Rješenje:

Karakteristična jendčina: $\lambda^2+1=0$,
Karakteristične vrijednosti: $\lambda_1=j$, $\lambda_2=-j$
Modovi sistema: e^{jt} i e^{-jt} u kompleksnom obliku. Realni modovi su $\cos(t)$ i $\sin(t)$.

Ozdiv sistema, ukoliko je ulaz $f(t)=0$ se dobija kao linearna kombinacija modova sistema:
$y(t)=A\cos(t)+B\sin(t)$, a iz početnig uslova imamo: $y(0)=A=2$ i $y'(0)=B=0$ tako da je $y(t)=2\cos(t)$.
Napomena: Ukoliko odziv formiramo kao linearnu kombinaciju kompleksnih modova imaćemo:
$y(t)=Ae^{jt}+Be^{-jt}$, a iz početnih uslova: $y(0)=A+B=2$ i $y'(0)=jA-jB=0$, odakle je $A=1$ i $B=1$ pa je: $y(t)=e^{jt}+e^{-jt}=2\cos(t)$.