III čas računskih vježbi iz Signala i sistema

Zadatak 1. Grafički odrediti konvoluciju signala $x(t)$ i $h(t)$ definisanih sa:

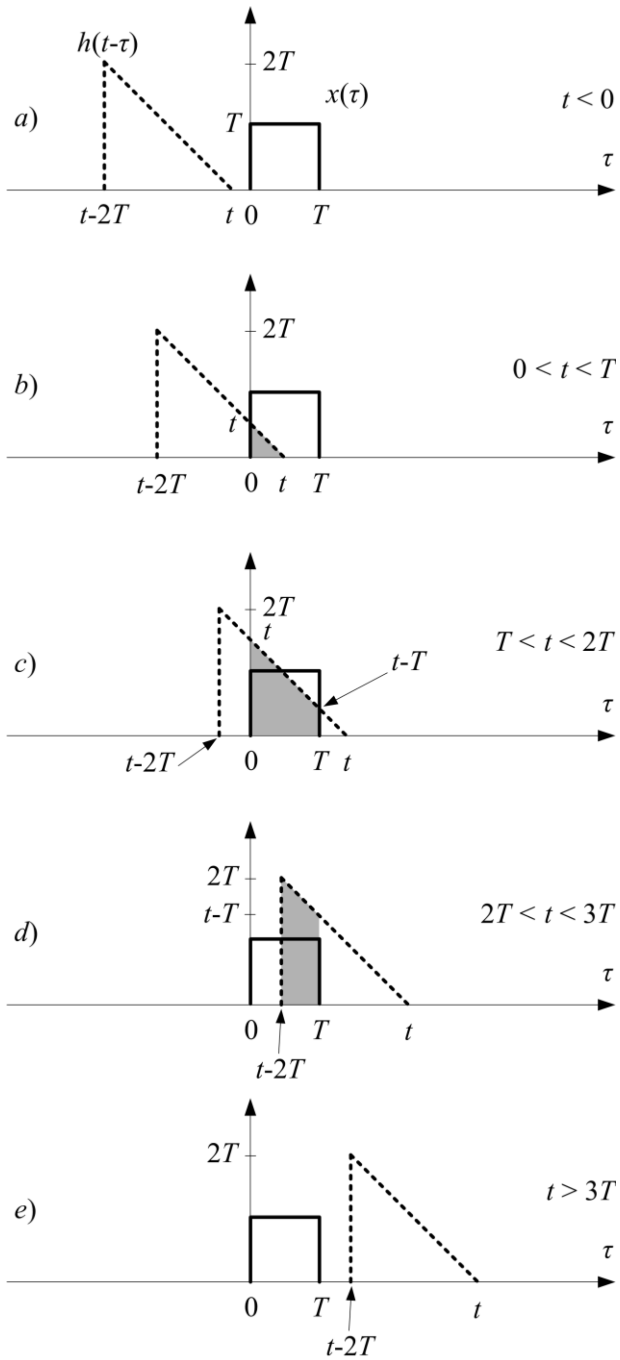
$$x(t)=\begin{cases} T, & 0<t<T \\ 0, & \text{drugde} \end{cases} \quad \text{i} \quad h(t)=\begin{cases} t, & 0<t<2T \\ 0, & \text{drugde} \end{cases}$$

Rješenje:

Konvolucija signala $x(t)$ i $h(t)$, u oznaci $y(t)$, se definiše na sledeći način:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

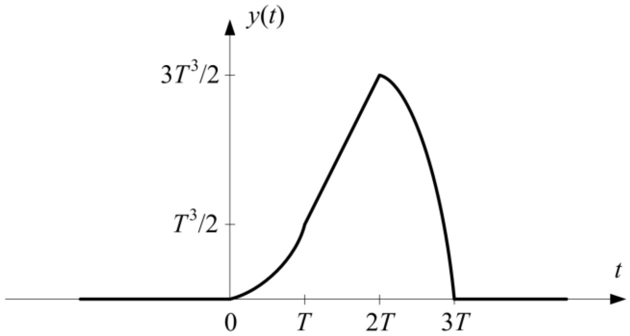
Grafičko određivanje konvolucije je pogodno uraditi podelom na odvojene intervale. Na sledećoj slici su prikazani intervali od interesovanja i položaj funkcije $h(t-\tau)$:



Na osnovu prethodnih slika, konvoluciju određujemo kao površinu osenčene oblasti i imamo:

$$y(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{T}{2}t^2, & 0<t<T\\ T^2t-\frac{1}{2}T^3, & T<t<2T\\ -\frac{T}{2}t^2+T^2t+\frac{3}{2}T^3, & 2T<t<3T\\ 0, & t>3T\end{cases}$$

što je grafički prikazano na sledećoj slici:



Zadatak 2. Dat je linearni vremensko-invarijantni sistem sa impulsnim odzivom $h(t)=u(t)$ na čiji ulaz dolazi signal $x(t)=e^{-at}u(t)$ sa $a>0$. Odrediti vremenski oblik izlaznog signala $y(t)$ primenom:

a) konvolucionog integrala;

Rješenje:

a) Sada ćemo konvolucioni integral rešiti analitički:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

Pošto je $u(\tau)=0$ za $\tau<0$, onda je i $u(t-\tau)=0$ za $t<\tau$, pa je:

$$u(\tau)u(t-\tau)=\begin{cases}1, & 0<\tau<t\\ 0, & \text{drugde}\end{cases}$$

Dalje:

$$y(t)=\int_{0}^{t}e^{-a\tau}d\tau=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$$

Pošto je za $t<0$ priozvod $u(\tau)u(t-\tau)$ jednak 0 onda je konačan oblik izlaznog signala:

$$y(t)=\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)u(t).$$

Zadatak 3. Odrediti konvolucije:

a) $e^{-t^2}*\delta(t-3)$

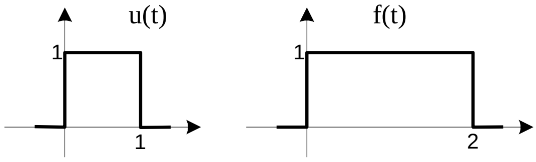
b) $h(t)*h(t)$

Rješenje:

a) $e^{-t^2}*\delta(t-3)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau^2}\delta(t-\tau-3)d\tau=e^{-(t-3)^2}$

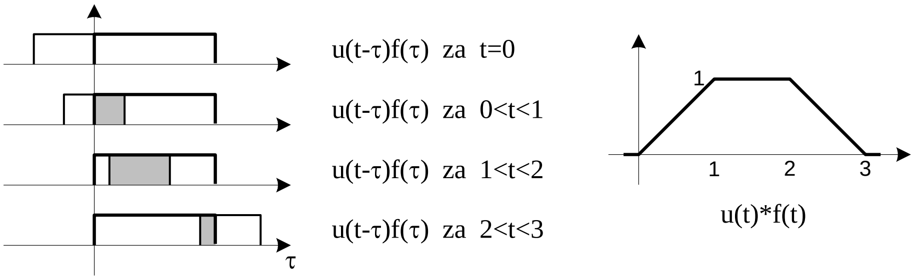
b) $h(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t}1d\tau=t$ za $t>0$ i $h(t)*h(t)=0$ za $t<0$, dakle $h(t)*h(t)=t\,h(t)$

Zadatak 4. Pobuda $f(t)$ i impulsni odziv $u(t)$ LTI sistema prikazani su na slici. Odrediti izlaz iz sistema. Da li je sistem kauzalan? Napomena: Konvoluciju odrediti grafičkim putem.



Rješenje:

Skiciramo grafik funkcije $u(-\tau)$. Ovu funkciju pomjeramo po τ osi za iznos *t*, množimo sa $f(\tau)$ i tražimo površinu ispod dobijene krive.



$$u(t) * f(t) = th(t) - (t-1)h(t-1) - (t-2)h(t-2) + (t-3)h(t-3)$$

S obzirom da je impulsni odziv sistema kauzalna funkcija to je i sistem kauzalan.

Zadatak 5. Odrediti konvoluciju signala $f(t) = h(t)e^{-t}$ i $g(t) = h(t) - h(t-1)$.
Rješenje:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-\tau}\big(h(t-\tau) - h(t-\tau-1)\big)d\tau = \int_{t-1}^{t} h(\tau)e^{-\tau}d\tau$$

Posmatrajmo odvojeno slučajeve t<0, 0<t<1 i t>1:

$$f * g = \begin{cases} 0 & za \quad t < 0 \\ 1 - e^{-t} & za \quad 0 \le t \le 1 \\ e^{-t}(e-1) & za \quad t > 1 \end{cases}$$