IV čas računskih vježbi iz Signala i sistema

Zadatak 1. a) Pronaći razvoj periodične funkcije, koja se u osnovnom periodu može zapisati kao:

$$f(t) = |t|, \quad -\pi \le t \le \pi$$

u trigonometrijski Fourier-ov red.

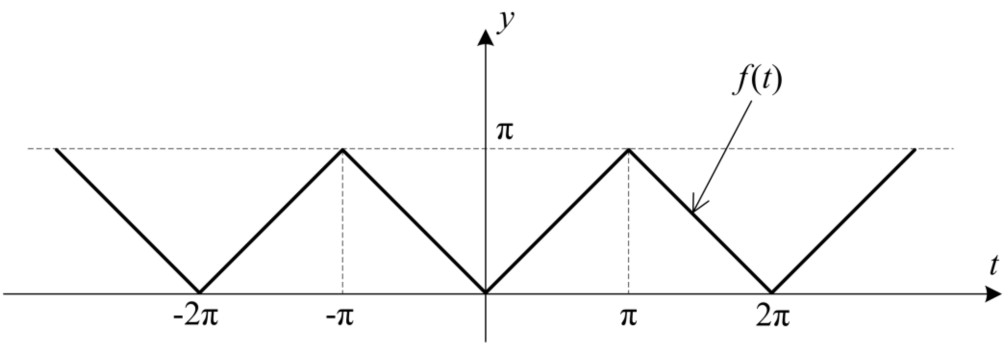
b) Odrediti koeficijente eksponencijalnog Fourier-ovog reda iste funkcije.

c) Nacrtati amplitudsko- i fazno-frekvencijski spektar iste funkcije.

d) Odrediti snagu prve 4 komponente (jednosmerna komponenta i prva 3 nenulta harmonika) i uporediti je sa snagom signala $f(t)$.

Rješenje:

a) Data funkcija je predstavljena na slici ispod:



Razvoj proizvoljne periodične funkcije u trigonometrijski Fourier-ov red izgleda:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Koeficijenti razvoja funkcije $f(t)$ a_0, a_n i b_n se dobijaju na osnovu relacija:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

gde je T trajanje osnovne periode, tj. 2π, a ω_0 je osnovna (fundamentalna) učestanost i ona je u našem slučaju $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T = 1$. Dakle, u našem slučaju imamo:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi}\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t|\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{t\sin(nt)}{n}\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt\right] = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n = 1,3,5,\ldots \\ 0, & n = 2,4,6,\ldots \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |t|\sin(nt)\,dt = \left[|t| \text{ je parna funkcija}\right] = 0$$

Dakle, funkcija $f(t)$ se može predstaviti u obliku zbira svojih harmonika na sledeći način:

$$\boxed{f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos(t)+\frac{1}{3^2}\cos(3t)+\frac{1}{5^2}\cos(5t)+\ldots\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)t)}.$$

EXTRA:

Za t=0 prethodni izraz postaje:

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right]=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Rightarrow\boxed{\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}}$$

Ova relacija nam daje mogućnost izvođenja nekoliko korisnih relacija. Neka je:

$$\sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots,\qquad \sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\text{i }\sigma_2=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$$

Odavde je $\sigma=\sigma_1+\sigma_2$ i $\sigma_2=\sigma/4=(\sigma_1+\sigma_2)/4$, tj.:

$$3\sigma_2=\sigma_1\quad\Rightarrow\quad\sigma_2=\frac{\pi^2}{24}\quad\Rightarrow\quad\sigma=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$$

b) Razvoj funkcije $f(t)$ u eksponencijalni Fourier-ov red ima oblik:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$$

gde se koeficijenti F_n dobijaju korišćenjem relacije:

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

T je trajanje perioda funkcije $f(t)$, a ω_0 je osnovna učestanost. Pošto smo već pronašli razvoj date funkcije u trigonometrijski Fourier-ov red, nema potrebe da računamo koeficijente F_n direktnim putem, već možemo iskoristiti dobijene koeficijente a_n i b_n iz tačke a) i relaciju:

$$F_0=a_0$$

$$\left.\begin{aligned}F_n&=\frac{a_n-jb_n}{2}\\ F_{-n}&=\frac{a_n+jb_n}{2}\end{aligned}\right\}n\geq 1.$$

U našem slučaju imamo:

$$F_0=\frac{\pi}{2}$$

$$F_n=F_{-n}=\frac{a_n}{2}=\begin{cases}-\dfrac{2}{\pi n^2}, & n=1,3,5,\ldots\\ 0, & n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

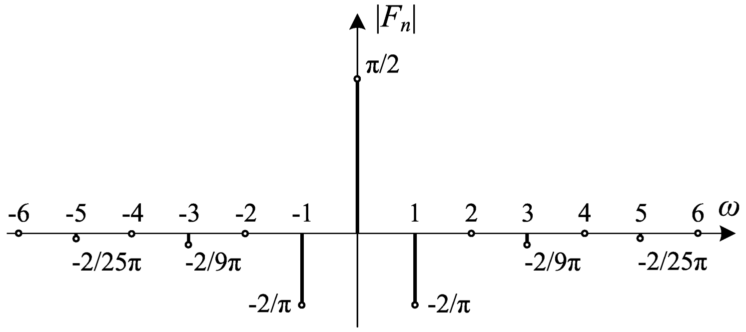
Dakle, razvoj funkcije $f(t)$ u eksponencijalni Fourier-ov red bi izgledao:

$$\boxed{f(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{j(2n-1)t}}$$

c) Pošto je F_n generalno kompleksan broj, onda se on, koristeći Euler-ov obrazac, može predstaviti u „fazorskom" obliku:

$$F_n = |F_n| e^{j\theta_n}.$$

Funkcija $|F_n|$ predstavlja amplitudsko-frekvencijski spektar funkcije $f(t)$, dok θ_n predstavlja fazno-frekvencijski spektar te funkcije. U našem slučaju, pošto je F_n realan broj i negativan broj, fazni pomeraj je konstantan i može imati bilo koju vrednost $\theta_n = k\pi$, gde je k = ±1, ±2,... Ako dozvolimo, radi jednostavnosti, da amplituda F_n može biti negativna, dobijamo sledeću sliku:



d) Parseval-ova teorema daje vezu između snage signala u vremenskom i frekvencijskom domenu, tj:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

Snagu signala $f(t)$ je, u ovom slučaju, lakše odrediti u vremenskom domenu, tj.

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi}\frac{t^3}{3}\bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3} \approx 3.2899$$

Snaga prve 4 nenulte komponente je:

$$P_1 = |F_0|^2 + 2\left[|F_1|^2 + |F_3|^2 + |F_5|^2\right] = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4}\right] \approx 3.2893.$$