# IV čas računskih vježbi iz Signala i sistema

**Zadatak 1** *Odrediti Fourier-ovu transformaciju signala:*

1. $x(t) = e^{-2t}h(t)$
2. $x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t)$ za $-\pi < t < \pi$ i $x(t) = 0$ van navedenog intervala

Rješenje pod 1)

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-j\omega t}dt = \int\limits_{0}^{\infty} e^{(-2-j\omega)t}dt = \frac{1}{-2-j\omega}e^{(-2-j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{-1}{2+j\omega}(0-1) = \frac{1}{2+j\omega}. \end{aligned}$$

Rješenje pod 2)

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t)\right)e^{-j\omega t}dt = \\ &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}e^{-j\omega t}dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\cos(t)e^{-j\omega t}dt = \\ &= \frac{-1}{2j\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jt}+e^{jt}}{2}e^{-j\omega t}dt = \\ &= \frac{-1}{2j\omega}(e^{-j\omega\pi} - e^{j\omega\pi}) + \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-j(\omega+1)t}dt + \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-j(\omega-1)t}dt = \\ &= \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega} + \frac{1}{-4j(\omega+1)}\, e^{-j(\omega+1)t}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{-4j(\omega-1)}\, e^{-j(\omega-1)t}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega} + \frac{\sin((\omega+1)\pi)}{2(\omega+1)} + \frac{\sin((\omega-1)\pi)}{2(\omega-1)} = \\ &= \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega} - \frac{\sin(\omega\pi)}{2(\omega+1)} - \frac{\sin(\omega\pi)}{2(\omega-1)} = \frac{\sin(\omega\pi)(4\omega^2 - 4 - 2\omega^2 + 2\omega - 2\omega^2 - 2\omega)}{4\omega(\omega^2-1)} = \\ &= \frac{\sin(\omega\pi)}{\omega(1-\omega^2)}. \end{aligned}$$

**Zadatak 2** *Ukoliko je Fourier-ova transformacija signala $x(t)$ data sa $X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ odredite:*

1. Da li je signal $x(t)$ čisto realan?
2. Da li je signal $x(t)$ paran?
3. Pronađite Fourier-ovu transformaciju signala $y_1(t) = x(-t)$.
4. Pronađite Fourier-ovu transformaciju signala $y_2(t) = \cos(3t) \cdot x(t-2)$.
5. Pronađite Fourier-ovu transformaciju signala $y_3(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.
6. Pronađite Fourier-ovu transformaciju signala $y_4(t) = x(t) * x(-t)$, gdje je sa $*$ označena konvolucija. Da li je signal $y_4(t)$ paran?
7. Odredite vremenski oblik signala $x(t)$.

Rješenje pod 1): Fourier-ova transformacija realnog signala ima osobinu da je $X(-\omega) = X^*(\omega)$. U posmatranom primjeru je:

$$\begin{aligned} X(-\omega) &= \frac{1}{1-j\omega} \\ X^*(\omega) &= \frac{1}{1-j\omega}. \end{aligned}$$

Dakle, posmatrani signal $x(t)$ je realan.

Rješenje pod 2): Signal je paran ako je $x(-t) = x(t)$. Fourier-ova transformacija takvog signala je:

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{0} x(t)e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \\ &= \int_{0}^{\infty} x(-t)e^{j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \\ &= \int_{0}^{\infty} x(t)(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})dt = 2\int_{0}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)dt \end{aligned}$$

odnosno čisto realna funkcija. Kako je u posmatranom primjeru Fourier-ova transformacija kompleksna, to posmatrani signal sigurno nije paran.

Rješenje pod 3):

$$\begin{aligned} Y_1(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y_1(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j\omega t}dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}dt = X(-j\omega) = \frac{1}{1-j\omega}. \end{aligned}$$

Rješenje pod 4): Označimo sa $x_1(t) = x(t-2)$. Tada je:

$$y_2(t) = \cos(3t)\cdot x_1(t) = \frac{e^{j3t}+e^{-j3t}}{2}x_1(t) = \frac{1}{2}e^{j3t}x_1(t) + \frac{1}{2}e^{-j3t}x_1(t)$$

pa se Fourier-ova transformacija posmatranog signala može napisati (koristeći se osobinama linearnosti i modulacije Fourier-ove transformacije) u obliku:

$$Y_2(j\omega) = \frac{1}{2}X_1(j(\omega-3)) + \frac{1}{2}X_1(j(\omega+3))$$

pri čemu $X_1(j\omega)$ dobijamo korišćenjem osobine "pomjeranje po vremenu" Fourier-ove transformacije kao:

$$X_1(j\omega) = e^{-2j\omega}X(j\omega) = \frac{e^{-2j\omega}}{1+j\omega}.$$

Sada je:

$$Y_2(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{e^{-2j(\omega-3)}}{1+j\omega-3j} + \frac{1}{2}\frac{e^{-2j(\omega+3)}}{1+j\omega+3j}.$$

Rješenje pod 5): Koristimo osobinu "Fourier-ova transformacija izvoda":

$$Y_3(j\omega) = j\omega X(j\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega}.$$

Rješenje pod 6): Konvoluciji dva signala u Fourier-ovom domenu odgovara proizvod odgovarajućih Fourier-ovih transformacija. Kako je u dijelu zadatka pod 3) određena Fourier-ova transformacija signala $x(-t)$ to je:

$$Y_4(j\omega) = X(j\omega)\cdot X(-j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}\frac{1}{1-j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2}.$$

S obzirom na rezultat dobijen u dijelu zadatka pod 2) i kako je $Y_4(j\omega)$ čisto realna funkcija zaključujemo da je signal $y_4(t)$ paran.

Rješenje pod 7): Pođimo od definicije inverzne Fourier-ove transformacije:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+j\omega}e^{j\omega t}d\omega$$

uvedimo smjenu $1 + j\omega = ju$ i dobićemo:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ju}e^{(ju-1)t}du = e^{-t}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ju}e^{jut}du.$$

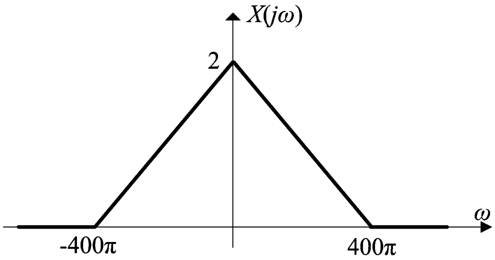
U poslednjem izrazu uočimo dio: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{ju}e^{jut}du$. On predstavlja inverznu Fourier-ovu transformaciju signala čija je Fourier-ova transformacija $H(j\omega)=\frac{1}{j\omega}$, a znamo da je to slučaj step signala $h(t)$ jer je:

$$H(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{j\omega}.$$

Dakle, konačno je:

$$x(t)=e^{-t}h(t).$$

**Zadatak 3** *Na slici je data Fourier-ova transformacija signala $x(t)$. Odredite energiju signala $x(t)$. Signal prolazi kroz filtar koji bez slabljenja propušta frekvencije do* 100 Hz, *a eliminiše sve frekvencije veće od* 100 Hz. *Odredite Fourier-ovu transformaciju izlaznog signala, kao i njegovu energiju.*



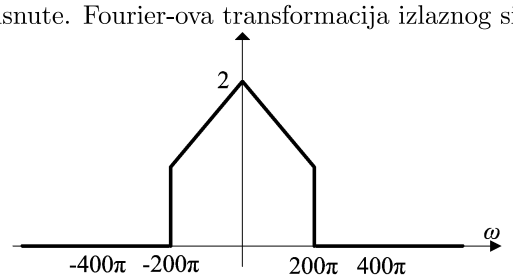

Rješenje: Na osnovu Parseval-ove teoreme znamo da je energiju signala moguće odrediti i u frekvencijskom domenu:

$$E_x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2d\omega.$$

Sada je (uz korišćenje činenice da je $X(j\omega)$ parna funkcija, što se vidi sa slike):

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{1}{2\pi}2\cdot\int\limits_{0}^{400\pi}|2-\frac{\omega}{200\pi}|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{400\pi}(4-\frac{\omega}{50\pi}+\frac{\omega^2}{200^2\pi^2})d\omega=\\ &= \frac{1}{\pi}\left(4\omega-\frac{\omega^2}{100\pi}+\frac{\omega^3}{3\cdot200^2\pi^2})\right|_0^{400\pi}=1600-\frac{400^2\pi}{100\pi}+\frac{400^3\pi^2}{3\cdot200^2\pi^2}=\\ &= 1600-1600+\frac{1600}{3}=\frac{1600}{3}.\end{aligned}$$

Frekvenciji od 100 Hz odgovara ugaona frekvencija $\omega=2\pi*100=200\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Dakle, frekvencijske komponente signala koje se nalaze u intervalu: $-200\pi\le\omega\le200\pi$ kroz filter prolaze bez slabljenja, dok komponente van tog intervala bivaju potpuno potisnute. Fourier-ova transformacija izlaznog signala je:




Dok je energija signala na izlazu filtra:

$$\begin{aligned}E_y &= \frac{1}{2\pi}2\cdot\int\limits_{0}^{200\pi}|2-\frac{\omega}{200\pi}|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\left(4\omega-\frac{\omega^2}{100\pi}+\frac{\omega^3}{3\cdot200^2\pi^2})\right|_0^{200\pi}=\\ &= 800-400+\frac{200}{3}=\frac{1400}{3}.\end{aligned}$$