VI čas računskih vježbi iz Signala i sistema

Zadatak 1. Odrediti Laplace-ovu transformaciju signala $x(t)$ definisanog sa:

$$x(t)=\delta(t)-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{2t}u(t)$$

U s-ravni prikazati nule i polove Laplace-ove transformacije, kao i oblast njene konvergencije.

Rješenje:

Laplace-ova transformacija signala $x(t)$ je data izrazom:

$$X(s)=L\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-st}dt$$

gde je $s=\sigma+j\omega$ kompleksna varijabla s-domena. Laplace-ova transformacija signala $x(t)$ se može posmatrati kao Fourier-ova transformacija signala $x(t)e^{-\sigma t}$, tj.:

$$X(\sigma+j\omega)=L\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x(t)e^{-\sigma t}\right)e^{-j\omega t}dt=F\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\}$$

U izradi ovog zadatka, kao i većine drugih, koristićemo izvedene izraze za Laplace-ove transformacije signala $x_1(t)=e^{-at}u(t)$ i $x_2(t)=-e^{-at}u(-t)$. Naime, imamo:

$$X_1(s)=L\{x_1(t)\}=\frac{1}{s+a},\qquad \text{pri čemu je oblast konvergencije (OK): } \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

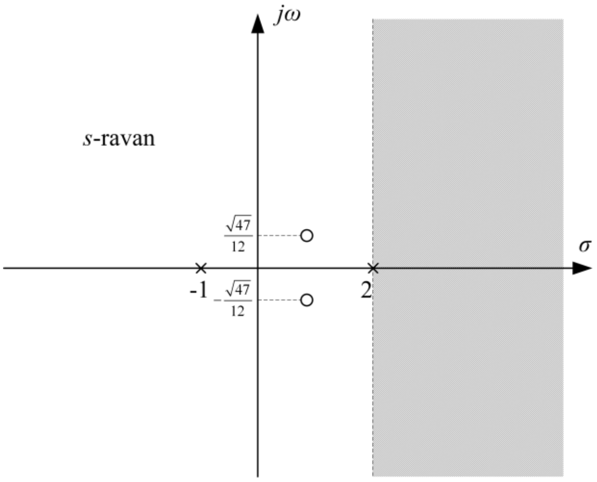
$$X_2(s)=L\{x_2(t)\}=\frac{1}{s+a},\qquad \text{OK: } \mathrm{Re}\{s\}<-a$$

Uvrštavanjem izraza za signal $x(t)$ u definiciju Laplace-ove transformacije dobijamo:

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\delta(t)-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{2t}u(t)\right)e^{-st}dt=1-\frac{4}{3}L\left\{e^{-t}u(t)\right\}+\frac{1}{2}L\left\{e^{2t}u(t)\right\}=1-\frac{4}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(s)=\frac{s^2-\frac{11}{6}s+\frac{7}{6}}{(s+1)(s-2)}=\frac{\left(s-\frac{11-j\sqrt{47}}{12}\right)\left(s-\frac{11+j\sqrt{47}}{12}\right)}{(s+1)(s-2)},\qquad \text{OK: } \mathrm{Re}\{s\}>2}$$

<u>Pored izraza za Laplace-ovu transformaciju, mora se definisati i oblast konvergencije transformacije!</u>
Primer signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ nam pokazuje da dva različita signala imaju isti izraz za transformaciju, ali različite oblasti konvergencije. U našem slučaju, imamo zbir tri člana. Prvi, 1, svuda postoji u s-ravni; drugi konvergira za Re{s}>-1, a treći za Re{s}>2. Oblast konvergencije se dobija u preseku ove tri oblasti, tj. oblast konvergencije je Re{s}>2.
Na slici su prikazani polovi (singulariteti) i nule funkcije $X(s)$, kao i oblast njene konvergencije (šrafirano):



Pošto oblast konvergencije ne uključuje $j\omega$ osu zaključujemo da signal $x(t)$ nema Fourier-ovu transformaciju. Sa druge strane, pošto su druge dve komponente signala $x(t)$ ograničene sa leve strane, onda će i njihova oblast konvergencije biti ograničena sa leve strane. To znači da se oblast konvergencije $X(s)$ nalazi desno od krajnje desnog pola te funkcije.

Generalno, kada se funkcija $X(s)$ može zapisati u obliku:

$$X(s) = \frac{B(s)}{I(s)},$$

gde su $B(s)$ i $I(s)$ polinomijalne funkcije, onda je oblast konvergencije $X(s)$ određena položajem polova te funkcije, tj. korenima funkcije $I(s)$. *Oblast konvergencije ne sme da sadrži polove!*

Zadatak 2. Odrediti Laplace-ovu transformaciju signala $x(t)$ definisanog sa:

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

U s-ravni prikazati nule i polove Laplace-ove transformacije, kao i oblast njene konvergencije.

Rješenje:

Predstavimo signal $x(t)$ u obliku:

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{+bt}u(-t)$$

Laplace-ove transformacije ove dve komponente su:

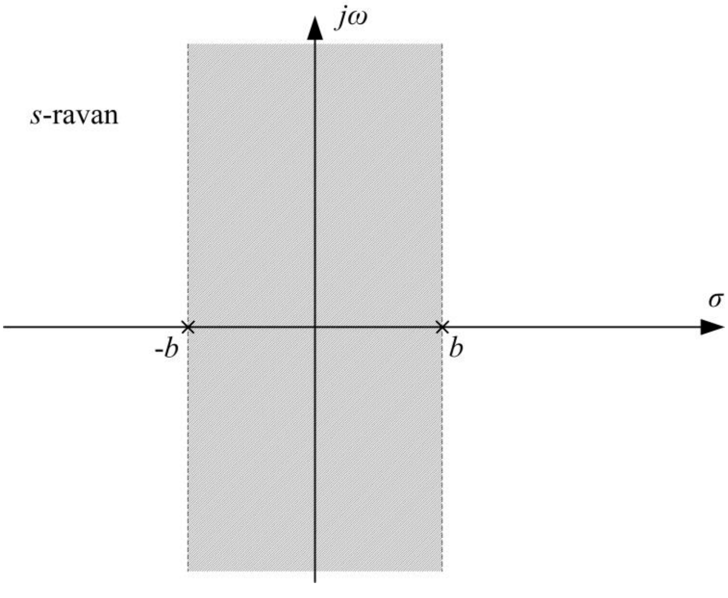
$$L\{e^{-bt}u(t)\} = \frac{1}{s+b}, \qquad \text{OK: } \operatorname{Re}\{s\} > -b$$

$$L\{e^{bt}u(-t)\} = -\frac{1}{s-b}, \qquad \text{OK: } \operatorname{Re}\{s\} < +b$$

Linearnost Laplace-ove transformacije implicira:

$$X(s) = \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2}, \qquad \text{OK: } -b < \operatorname{Re}\{s\} < +b$$

Za $b < 0$ oblasti konvergencije ove dve komponente se ne seku, pa za takvo b $X(s)$ ne konvergira (ne postoji). Za $b > 0$ oblast imamo oblast konvergencije $-b < \operatorname{Re}\{s\} < +b$ i ona je grafički prikazana na donjoj slici:



Zadatak 3. Odrediti Laplace-ovu transformaciju signala $x(t)$ definisanog sa:

$$x(t)=\begin{cases} e^{-at}, & 0<t<T \\ 0, & \text{drugde} \end{cases}$$

Rješenje:

Tražimo Laplace-ovu transformaciju po definiciji:

$$X(s)=\int_0^T e^{-at}e^{-st}dt=\frac{1}{s+a}\left[1-e^{-(s+a)T}\right]$$

Za signale konačne dužine važi da njihova Laplace-ova transformacija konvergira u čitavoj s-ravni. Sa druge strane, vidimo da funkcija $X(s)$ ima pol u $s = -a$, a to je u kontradikciji sa konvergencijom u čitavoj s-ravni, jer oblast konvergencije ne sme da sadrži polove. Međutim, u našem slučaju i brojilac je jednak nuli za $s = -a$, pa da bismo odredili $X(s)$ u toj tački primenimo L'Hôpital-ovo pravilo:

$$\lim_{s\to -a} X(s)=\lim_{s\to -a}\left[\frac{\frac{d}{ds}\left(1-e^{-(s+a)T}\right)}{\frac{d}{ds}(s+a)}\right]=\lim_{s\to -a} Te^{-aT}e^{-sT}$$

tako da je:

$$X(-a)=T$$

Dakle, funkcija $X(s)$ nema polova, tj. taj pol je poništen nulom u istoj tački, pa u toj tački nema ni nule ni pola. Postoji beskonačno mnogo nula brojioca, koji odgovaraju vrednostima s-a za koje je:

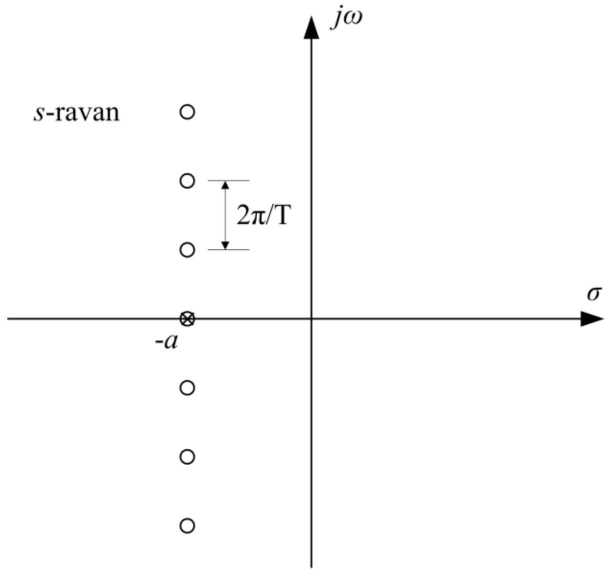
$$1-e^{-(s+a)t}=0, \qquad \text{ili ekvivalentno:}$$

$$e^{-(s+a)t}=1=e^{-j2\pi k}, \qquad \text{gde je } k \text{ proizvoljan celi broj}$$

Prethodna jednačina je zadovoljena za:

$$(s+a)T=j2\pi k \quad \Rightarrow \quad \underline{s=-a+j\frac{2\pi k}{T}}, \quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3...$$

Nule i polovi $X(s)$ su prikazani na slici ispod:



Zadatak 4. Odrediti Laplace-ovu transformaciju signala:

$$x(t) = t\,e^{-at}\,u(t)$$

Rješenje:

Koristeći osobinu diferenciranja u s-domenu, po kojoj funkcije $-tx(t)$ i $dX(s)/ds$ čine Laplace-ov transformacioni par, kao i ranije izvedenu Laplace-ovu transformaciju signala $e^{-at}\,u(t)$, imamo da je:

$$L\left\{te^{-at}u(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \qquad \text{OK: } \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

Ukoliko još jednom primenimo istu osobinu imamo:

$$L\left\{\frac{t^2}{2}e^{-at}u(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = \frac{1}{(s+a)^3}, \qquad \text{OK: } \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

ili, uopšteno:

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+a)^{n-1}}\right] = \frac{1}{(s+a)^n}, \qquad \text{OK: } \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

Zadatak 5. Data je funkcija:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Odrediti inverznu Laplace-ovu transformaciju ukoliko je oblast konvergencije:

- **a)** $\mathrm{Re}\{s\} > -1$
- **b)** $\mathrm{Re}\{s\} < -2$
- **c)** $-2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$

Rješenje:

Inverznu Laplace-ovu transformaciju signala $x(t)$ možemo dobiti koristeći definiciju, po kojoj je:

$$x(t) = L^{-1}\left\{X(s)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

pri čemu se integraljenje vrši u kompleksnoj s-ravni duž prave linije, paralelne $j\omega$ osi, za bilo koje σ za koje $X(\sigma + j\omega)$ konvergira. Međutim, pošto ćemo uglavnom raditi sa racionalnim funkcijama $X(s)$ postoji jednostavniji način traženja inverzne Laplace-ove transformacije. Postupak se sastoji u prvobitnom razvoju funkcije $X(s)$ na parcijalne razlomke, a potom se vrši "prepoznavanje" inverzne transformacije svakog razlomka.

U našem slučaju imamo:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

Koeficijente A i B dobijamo koristeći relacije:

$$A = \left[(s+1)X(s)\right]\Big|_{s=-1} = 1$$

$$B = \left[(s+2)X(s)\right]\Big|_{s=-2} = -1$$

Dakle,

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

Sad, u zavisnosti od oblasti konvergencije, ova funkcija će predstavljati Laplace-ovu transformaciju jednog od tri signala.

a) Pošto je oblast konvergencije Re{s}>-1, zaključujemo da oba razlomka predstavljaju Laplace-ove transformacije signala ograničenih sa leve strane. Pozivajući se na prvi zadatak, zaključujemo da važi:

$$L\left\{e^{-t}u(t)\right\}=\frac{1}{s+1}, \qquad \text{OK: } \operatorname{Re}\{s\}>-1$$

$$L\left\{e^{-2t}u(t)\right\}=\frac{1}{s+2}, \qquad \text{OK: } \operatorname{Re}\{s\}>-2$$

tako da je za ovu oblast konvergencije:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\}=\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t)$$

b) Za oblast konvergencije Re{s}<-2, oba razlomka predstavljaju Laplace-ove transformacije signala ograničenih sa desne strane. Opet, pozivajući se na prvi zadatak, zaključujemo da važi:

$$L\left\{-e^{-t}u(-t)\right\}=\frac{1}{s+1}, \qquad \text{OK: } \operatorname{Re}\{s\}<-1$$

$$L\left\{-e^{-2t}u(-t)\right\}=\frac{1}{s+2}, \qquad \text{OK: } \operatorname{Re}\{s\}<-2$$

tako da je za ovu oblast konvergencije:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\}=\left[-e^{-t}+e^{-2t}\right]u(-t)$$

c) Za oblast konvergencije -1 < Re{s} < -2, razlomak 1/(s+1) predstavlja Laplace-ovu transformaciju signala ograničenog sa leve, a razlomak 1/(s+2) predstavlja Laplace-ovu transformaciju signala ograničenog sa desne strane. Dakle, sad imamo:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right\}=-e^{-t}u(-t)-e^{-2t}u(t)$$

Na slici su prikazane oblasti konvergencije za svaki od ova tri slučaja, zajedno sa polovima $X(s)$: