Вјежбе (недјеља бр. 7)

① Одредити области дефинисаности, наћи асимптоте ф-ја, интервале монотоности и екстремне вриједности слједећих ф-ја:

1) $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$ 2) $y=\sqrt[3]{x^3+3x^2}$ 3) $y=(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x+1}}$

4) $y=\frac{e^x}{x\sqrt{1-x}}$ 5) $y=\ln\frac{x+3}{1-x}$ 6) $y=\frac{x+1}{\ln^2(x+1)}$

7) $y=\frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}$ 8) $y=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Рјешење:

① 1° Област дефинисаности - домен:

$$D_f=\{x\in R \mid x^2-4\neq 0\}=\{x\in R: (x-2)(x+2)\neq 0\}=$$
$$\{x\in R: x\neq 2;\ x\neq -2\}.$$

Дакле, $D_f=R\setminus\{-2,2\}$ или:

$$D_f=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$$

2° Асимптоте

Вертикалне асимптоте.

$$\lim_{x\to-2+0} f(x)=\lim_{x\to-2+0}\frac{2x^3}{x^2-4}=\left\ulcorner \begin{matrix} x=-2+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0\end{matrix}\right\lrcorner=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2(-2+\varepsilon)^3}{(-2+\varepsilon-2)(\cancel{-2}+\varepsilon+\cancel{2})}=$$

$$2\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\varepsilon-2)^3\to -8}{(\varepsilon-4)\to -4\cdot\varepsilon\to 0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2-0}\frac{2x^3}{(x-2)(x+2)}=\left\ulcorner \begin{matrix} x=-2-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0\end{matrix}\right\lrcorner=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2(-2-\varepsilon)^3}{(-2-\varepsilon-2)(\cancel{-2}-\varepsilon+\cancel{2})}=$$

$$=2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(-2-\varepsilon)^3\to -8}{(-4-\varepsilon)\to -4\,(-\varepsilon)\to 0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2-0}\frac{2x^3}{(x-2)(x+2)}=\left\ulcorner \begin{matrix} x=2-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0\end{matrix}\right\lrcorner=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2(2-\varepsilon)^3}{(\cancel{2}-\varepsilon-\cancel{2})(2-\varepsilon+2)}$$

$$=2\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(2-\varepsilon)^3\to 8}{-\varepsilon\to 0\cdot(4-\varepsilon)\to 4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{2x^3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2+0} \frac{2x^3}{(x-2)(x+2)} = \left\lceil \begin{matrix} x=2+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0 \end{matrix} \right\rfloor = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2(2+\varepsilon)^3}{(2+\varepsilon-2)(2+\varepsilon+2)}$$

$$= 2\cdot \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(2+\varepsilon)^{3\to 8}}{\varepsilon^{\to 0}\cdot (4+\varepsilon)^{\to 4}} = +\infty$$

Вертикалне асимптоте су праве: $x=-2$, $x=2$.

Хоризонталне асимптоте

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3}{x^2-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{\cancel{3}}x}{\cancel{x^2}(1-\frac{4}{x^2})} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-\frac{4}{x^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3}{x^2-4} = \quad -\|- \quad -\|- \quad -\|- \quad = -\infty$$

Нема ХА.

Косе асимптоте

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^3-4x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}(1-\frac{4x}{x^3})} =$$

$$2\cdot\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}\to 0} = 1\cdot 2 = 2$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^3-2x(x^2-4)}{x^2-4}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x}{x^2-4} = 8\cdot\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = 8\cdot\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}^{\to 0} \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}\to 0} = 0$$

$y = kx + n$

$y = 2x$ је коса асимптота кад $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$y = 2x$ је коса асимптота кад $x \to -\infty$

3° Монотоност и екстремне вриједности

Нађимо нуле првог извода.

$$f'(x) = \left(\frac{2x^3}{x^2-4}\right)' = \frac{(2x^3)'(x^2-4) - (2x^3)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2} = \frac{6x^2(x^2-4) - 2x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

②

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 24x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2} = 0 \iff x^2 = 0;\ x^2 - 12 = 0$$

$$x = 0;\ x = \pm\sqrt{12}$$

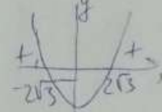
$$\underbrace{x = \pm 2\sqrt{3}}$$

$S_1\ (0,0)$
$S_2\ (2\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$
$S_3\ (-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$ > стационарне тачке.

Нађимо знак првог извода:

	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$		-2		0		2		$2\sqrt{3}$	$+\infty$
x^2	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+
x^2-12	+	0	−	−	−	−	−	−	−	0	+
$(x^2-4)^2$	+	+	+	0	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	−	//	−		−	//	−	0	+
$f(x)$	↗	↓	↘	//	↘		↘	//	↘	↓	↗

лок. максимум   лок. минимум



$y = x^2 - 12$

$(x^2-4)^2 \geq 0$ $T_{max}(-2\sqrt{3}, f(-2\sqrt{3}))$

$x^2 \geq 0$ $T_{min}(2\sqrt{3}, f(2\sqrt{3}))$

$$f(-2\sqrt{3}) = \frac{2(-2\sqrt{3})^3}{(-2\sqrt{3})^2 - 4} = -6\sqrt{3}$$

$$f(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$$

Дакле, екстремне вриједности: $T_{max}(-2\sqrt{3}, -6\sqrt{3})$, $T_{min}(2\sqrt{3}, 6\sqrt{3})$

② $y = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}$

1° $D_f = R$ (ф-ја дефинисана за сваки реалан број)

2° B.A

Нема вертикалних асимптота (јер $D_f = R$)

X.A

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{3x^2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3+3x^2} = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}} = -\infty$$

Нема Х.А.

<u>К.А</u>

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{3x^2}{x^3}\right)}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt[3]{1+\cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0}}}{\cancel{x}}$$

$$=1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}\cdot x+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}+\sqrt[3]{x^3+3x^2}\cdot x+x^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^3}+3x^2-\cancel{x^3}}{\sqrt[3]{\left(x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)^2}+\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{3}{x}\right)}\cdot x+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{x^2\cdot\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+x^2\cdot\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\cancel{\frac{3}{x}}^{\to 0}}+1\right)}=\frac{3}{3}=1$$

$y=x+1$, $x\to\pm\infty$ (Коса асимптота)

3° $$y'=\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}\right)'=\frac{1}{3}(x^3+3x^2)^{-\frac{2}{3}}(x^3+3x^2)'=\frac{1}{3}(x^3+3x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(3x^2+6x)$$

$$=\frac{\cancel{3}x(x+2)}{\cancel{3}(x^3+3x^2)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x(x+2)}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2)^2}}=\frac{x(x+2)}{\sqrt[3]{(x^2(x+3))^2}}=\frac{x(x+2)}{\sqrt[3]{x\cdot x^3(x+3)^2}}=\frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$=\frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}}$$

$y'=0 \iff x=-2$ Стационарна тачка $S(-2,\sqrt[3]{4})$,

$(x+3)^2\geq 0$

$\sqrt[3]{(x+3)^2}\geq 0$

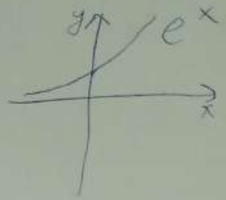
	$-\infty$	-3		-2		0	$+\infty$
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\sqrt[3]{x}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$ $+$
$\sqrt[3]{(x+3)^2}$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$T_{min}(0,0)$

$T_{max}(-2,\sqrt[3]{4})$

"Ф-ја није диференцијабилна у 0"

③ $y=(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}$



③ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \infty$

1° $D_f = \{x\in R \mid x+1\neq 0\} = R\setminus\{-1\}$

2° Асимптоте

В.А

$$\lim_{x\to-1-0}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} = \left[\begin{matrix}x=-1-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0\end{matrix}\right] = \lim_{\varepsilon\to0}(-1-\varepsilon+1)e^{\frac{1}{-1-\varepsilon+1}} = \lim_{\varepsilon\to0}(-\varepsilon)\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}} = 0$$

$$\lim_{x\to-1+0}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} = \left[\begin{matrix}x=-1+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0\end{matrix}\right] = \lim_{\varepsilon\to0}(-1+\varepsilon+1)\cdot e^{\frac{1}{-1+\varepsilon+1}} = \lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon\cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}} =$$

$$(0\cdot\infty) = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\frac{1}{\varepsilon}} \overset{L.P}{=} \lim_{\varepsilon\to0}\frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}}\cdot\cancel{(\frac{1}{\varepsilon})'}}{\cancel{(\frac{1}{\varepsilon})'}} = \lim_{\varepsilon\to0}e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \infty$$

$x=-1$ В. А.

Х.А

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot e^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} = -\infty$$

Нема В.А,

К.А

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)e^{\frac{1}{x+1}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{\cancel{x}}\cdot e^{\frac{1}{x+1}} = 1$$

$$n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x\cdot e^{\frac{1}{x+1}}+e^{\frac{1}{x+1}}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)x + e^{\frac{1}{x+1}}\right) =$$

$$* \lim_{x\to\pm\infty}\left(e^{\frac{1}{x+1}}-1\right)\cdot x = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x+1}}-1}{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{x}{(x+1)} = 1$$ (или Лопиталово правило)

Значи, $y=x+1$, $x\to\pm\infty$ коса асимптота

3° $y' = ((x+1)e^{\frac{1}{x+1}})' = e^{\frac{1}{x+1}} + \cancel{(x+1)}e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right) =$

$= e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{1}{x+1} = e^{\frac{1}{x+1}}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \frac{x}{x+1}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \overbrace{e^{\frac{1}{x+1}}}^{>0} \cdot \frac{x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$S(0, e)$ - стацион. тачка

$\ulcorner e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \lrcorner$

	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+ \ +$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\parallel$	$\searrow$		$\nearrow$

локални минимум.

$T_{min}(0, e)$

④ $y = \frac{e^x}{x\sqrt{1-x}}$

1) $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, \sqrt{1-x} \neq 0; 1-x \geq 0\}$

$x \neq 0; \sqrt{1-x} \neq 0 \ ; 1-x \geq 0 \Rightarrow x \neq 0; \ x \neq 1; \ x \leq 1$

Дакле, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

2) B.A

$\lim\limits_{x \to 0+} \frac{e^x}{x \cdot \sqrt{1-x}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0-} \frac{e^x}{x\sqrt{1-x}} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{e^x}{x\sqrt{1-x}} = \begin{bmatrix} x = 1-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0 \end{bmatrix} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{1-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)\sqrt{\cancel{1}-\cancel{1}+\varepsilon}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{1-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)\sqrt{\varepsilon}} = +\infty$

Вертикалне асимптоте: $x=0$, $x=1$

X.A

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to-\infty} \cancel{e^{x}}^{0} \cdot \cancel{\frac{1}{x\sqrt{1-x}}}^{0} = 0$$

[За цртање графика је значајно да ли се ф-ја приближава 0 са лијеве или десне стране, па је у горњем случају ова гранична вриједност: $\lim_{x\to-\infty} \cancel{e^{x}}^{0+} \cdot \lim_{x\to-\infty} \cancel{\frac{1}{x\sqrt{1-x}}}^{0-} = 0-$]

$y=0$ хоризонтална асимптота. $(x\to-\infty)$

Пошто има хоризонталну, нема косу асимптоту.

3) $$y' = \frac{(e^x)'(x\cdot\sqrt{1-x}) - e^x(x\sqrt{1-x})'}{(x\sqrt{1-x})^2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot x\sqrt{1-x} - e^x\left(\sqrt{1-x} + x\cdot\frac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}\right)}{x^2(1-x)} =$$

$$\frac{e^x \cdot x\sqrt{1-x} - e^x\cdot\left(\frac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}}\right)}{x^2(1-x)} = \frac{e^x\cdot x\sqrt{1-x} - \frac{e^x\cdot(2-3x)}{2\sqrt{1-x}}}{x^2(1-x)}$$

$$= \frac{2e^x\cdot x\cdot(1-x) - 2e^x + 3e^x\cdot x}{2\sqrt{1-x}\cdot x^2(1-x)} = \frac{5e^x x - 2e^x x^2 - 2e^x}{2x^2(1-x)\sqrt{1-x}} =$$

$$-\frac{e^x(2x^2-5x+2)}{2x^2(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$y'=0 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0$

$$x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot2}}{4} = \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} = \frac{5\pm3}{4}$$

$x_1 = 2$; $x_2 = \frac{1}{2}$ $\quad S\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$

$(\perp)$

Размотримо знак првог извода.

$$y' = -\frac{e^x(2x^2-5x+2)}{2x^2(1-x)\sqrt{1-x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(2x^2-5x+2)}{2x^2(1-x)\sqrt{1-x}} < 0$$

$\ulcorner x^2>0 \quad \forall x\in D_f$

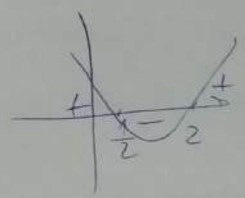
$\sqrt{1-x}>0 \quad \forall x\in D_f$

$1-x>0 \quad \forall x\in D_f$

$e^x>0 \quad \forall x\in R \lrcorner$

Знак зависи само од квадратне ф-је.

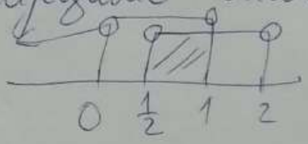
$y'>0 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2<0 \Leftrightarrow$



$\cancel{x\in(\frac{1}{2},1)\cup(1,2)}$

$x\in(\frac{1}{2},2)$

Пресијецимо интервал с доменом.

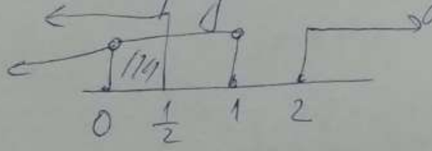


Дакле, $f\nearrow$ на $(\frac{1}{2},1)$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2>0$

$x\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$

Након пресјека с доменом.



Дакле, $f\searrow$ на $(0,\frac{1}{2})$.

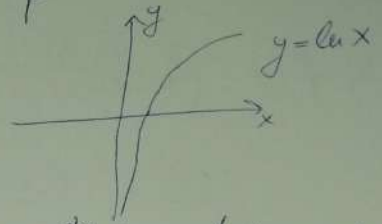
	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

локални минимум

$T_{min}\left(\frac{1}{2},\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)$, тј. $T_{min}\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{2}\sqrt{e}\right)$.

5 $y = \ln\frac{x+3}{1-x}$ (пример из књиге окачене на сајту)

1° $D_f = \{x : \frac{x+3}{1-x} > 0\}$



Ф-ја дефинисана за $x>0$

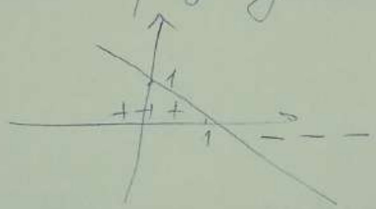
$$\frac{x+3}{1-x} > 0$$

	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$		$-$

$f(x) > 0$ за $x \in (-3, 1)$

Дакле, $D_f = (-3, 1)$

За одређивање знака линеарних ф-ја, ријешимо неједначину: $1-x>0$
$x<1$ или цртамо праву: $y = 1-x$



2° Асимптоте

В.А

$$\lim_{x\to -3+0} \ln\frac{x+3}{1-x} = \begin{bmatrix} x=-3+\varepsilon \\ \varepsilon\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{-3+\varepsilon+3}{1+3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{\varepsilon}{4-\varepsilon} =$$

$$\ln\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\overset{0}{\varepsilon}}{\underset{4}{4-\varepsilon}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1-0} \ln\frac{x+3}{1-x} = \begin{bmatrix} x=1-\varepsilon \\ \varepsilon\to 0 \end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{1-\varepsilon+3}{\cancel{1}-\cancel{1}+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon} =$$

$$= \ln\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon} = +\infty$$

Вертикалне асимптоте: $x=-3$; $x=1$

Са графика ф-је $y=\ln x$ можемо „прочитати":
$\lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$, $\lim_{x\to 0+}\ln x = -\infty$

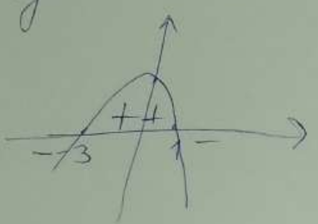
Х.А Ф-ја нема хоризонталних асимптота због домена.
К.А -||- косих -||- -||-

3) $f'(x) = \left(\ln\frac{x+3}{1-x}\right)' = \frac{1}{\frac{x+3}{1-x}}\cdot\left(\frac{x+3}{1-x}\right)' =$

$$= \frac{\cancel{1-x}}{x+3}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(x+3)\cdot(-1)}{(1-x)^{\cancel{2}}} = \frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}+3}{(x+3)(1-x)} = \frac{4}{(x+3)(1-x)}$$

Први извод нема нула. $(4\neq 0)$

$y=(x+3)(1-x) = -x^2-2x+3$



Због $D_f = (-3,1)$, $f'(x)>0$, па ф-ја $f \nearrow$ на D_f, тј. ф-ја монотонорастућа на читавом домену. Нема екстремних вриједности.

⑥ $y=\frac{x+1}{\ln^2(x+1)}$

1°) $D_f: \{x: \ln^2(x+1)\neq 0 \ ; x+1>0\}$

$\ln^2(x+1)\neq0$ $\qquad x+1>0$
$\ln(x+1)\neq 0$ $\qquad x>-1$
$x+1\neq1$
$x\neq0$

$D_f: (-1,0)\cup(0,+\infty)$

2°) Асимптоте.

В.А

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x+1}{\ln^2(x+1)} = \left[\begin{matrix}x=-1+\varepsilon\\ \varepsilon\to0\end{matrix}\right] = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\cancel{-1}+\varepsilon+\cancel{1}}{\ln^2(-1+\varepsilon+1)} = \lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{\ln^2\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to0} \overset{\to 0}{\varepsilon}\cdot\overset{\to 0}{\frac{1}{(\ln\varepsilon)^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\overset{\to1}{x+1}}{\underset{\to 0}{\ln^2(x+1)}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{\overset{\to1}{x+1}}{\underset{\to 0}{\ln^2(x+1)}} = +\infty$$

6

$x=0$ је вертикална асимптота.

Х.А

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\ln^2(x+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{LP}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\ln(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2\ln(x+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\cdot\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2}=+\infty$$

К.А

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{\ln^2(x+1)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\cancel{\frac{x+1}{x}}^{1}\cdot\cancel{\frac{1}{\ln^2(x+1)}}^{0}=0$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\ln^2(x+1)}=+\infty$$

Нема К.А.

3) $$y'=\left(\frac{x+1}{\ln^2(x+1)}\right)'=\frac{(x+1)'\ln^2(x+1)-\cancel{(x+1)}\cdot 2\ln(x+1)\cdot\frac{1}{\cancel{x+1}}}{(\ln^2(x+1))^2}=$$

$$\frac{\ln^2(x+1)-2\ln(x+1)}{\ln^4(x+1)}=\frac{\cancel{\ln(x+1)}(\ln(x+1)-2)}{\ln^{\cancel{4}3}(x+1)}=\frac{\ln(x+1)-2}{\ln^3(x+1)}$$

$y'=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)-2=0$

$\ln(x+1)=2$

$x+1=e^2$

$\underline{x=e^2-1}$

$S(e^2-1,\ f(e^2-1))$

$$f(e^2-1)=\frac{e^2-1+1}{\ln^2(e^2-1+1)}=\frac{e^2}{(\ln e^2)^2}=\frac{e^2}{4}$$

Стационарна тачка: $S\left(e^2-1,\ \frac{e^2}{4}\right)$

Тражимо знак првог извода.

$\ln(x+1)-2>0$

$\ln(x+1)>2$

$x+1>e^2$

$\underline{x>e^2-1}$

$\ln^3(x+1)>0$

$\ln(x+1)>0$

$x+1>1$

$\underline{x>0}$

	-1		0		e^2-1		$+\infty$
$\ln(x+1)-2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\ln^3(x+1)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	//	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	//	$\searrow$	локални миним.	$\nearrow$	

$T_{min}\left(e^2-1,\ \frac{e^2}{4}\right)$

(1) $y=\frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}$

1° $x\neq 0,\ 1-\ln x\neq 0;\ x>0$

$\ln x\neq 1$

$\boxed{x\neq e}$

$D_f=(0,e)\cup(e,+\infty)$

2° Асимптоте

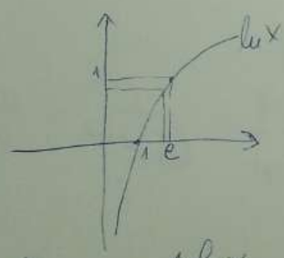
В.А

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\ln x}{1-\ln x}=-\infty$$

$$\ulcorner\lim_{x\to 0+}\frac{1+\ln x}{1-\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{-x}=-1\lrcorner$$

$$\cancel{\lim_{x\to e-0}\frac{1+\ln x}{x(1-\ln(e-0))}}$$

$$\lim_{x\to e-0}\frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}=\begin{matrix}\ulcorner x=e-\varepsilon\\ \varepsilon\to 0\lrcorner\end{matrix}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\overset{1}{1+\ln(\cancel{e-\varepsilon})}}{\underset{e}{(\cancel{e-\varepsilon})}\underset{0+}{(1-\ln(\cancel{e-\varepsilon}))}}=+\infty$$



$$\lim_{x\to e+0}\frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}=\begin{matrix}\ulcorner x=e+\varepsilon\\ \varepsilon\to 0\lrcorner\end{matrix}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\overset{2}{1+\ln(e+\varepsilon)}}{\underset{e}{(\cancel{e+\varepsilon})}\underset{0-}{(1-\ln(\cancel{e+\varepsilon}))}}=-\infty$$

$x=e$ В.А

Х.А $$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L.P}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x+x\left(-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\cancel{1}-\ln x-\cancel{1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{-x\ln x}$$

$=0$ (0^-) $y=0$ хоризонтална асимптота

К.А Нема

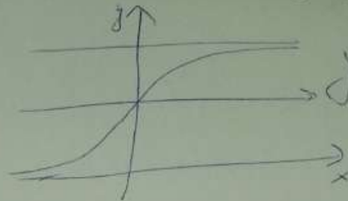
3° $y' = \left(\frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot x(1-\ln x) - (1+\ln x)((1-\ln x) + x\cdot(-\frac{1}{x}))}{(x(1-\ln x))^2}$

$= \frac{1-\ln x - (1+\ln x)\cdot(1-\ln x-1)}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x + \ln x + \ln^2 x}{x^2(1-\ln x)^2} =$

$= \frac{\ln^2 x + 1}{x^2(1-\ln x)^2}$

Очигледно је $y' > 0$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, па $f \nearrow$ на $\mathcal{D}_f$

8) $y=\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (примјер из књиге окачене на сајту)



$y=\operatorname{arctg}x$
$D_f=R$

1° $D_f = R\setminus\{0\}$

$x\neq 0$

2° В.А

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\nearrow\infty} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\nearrow-\infty} = -\frac{\pi}{2}$$

Нема вертикалних асимптота.

Х.А

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}\left(1+\cancel{\frac{1}{x}}\right)^{\nearrow 0} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg}\left(1+\cancel{\frac{1}{x}}\right)^{\nearrow 0} = \frac{\pi}{4}$$

$y=\frac{\pi}{4}$ Х.А.

Нема К.А.

3° $$f'(x)=\frac{1}{1+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=\frac{\cancel{x^2}}{x^2+x^2+2x+1}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)=\frac{-1}{2x^2+2x+1}$$

Први извод нема нула.

$$\left.\begin{array}{l} y=2x^2+2x+1 \\ a=2>0 \\ D=b^2-4ac=4-4\cdot 2\cdot 1<0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2+2x+1>0 \quad \forall x\in R.$$

Дакле, $f'(x)=-\frac{1}{\underbrace{2x^2+2x+1}_{>0}}<0$, па $f(x)\searrow$ на D_f.