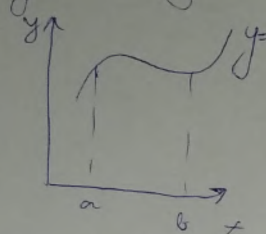
Вјежбе бр. 12 (недјеља 12)

Примјена одређеног интеграла - наставак

Дужина лука криве

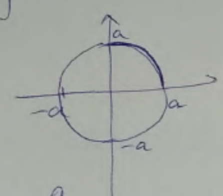


$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\cdot dx \qquad \left(\int_c^d \sqrt{1+(x')^2}\,dy \ \text{- по оси } O_y\right)$$

① Израчунати обим круга полупречника a, $a>0$

Рјешење:

$x^2+y^2=a^2$



$$l=4\cdot\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$y^2=a^2-x^2$

$y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

$y_1=\sqrt{a^2-x^2}$ горња полукружница

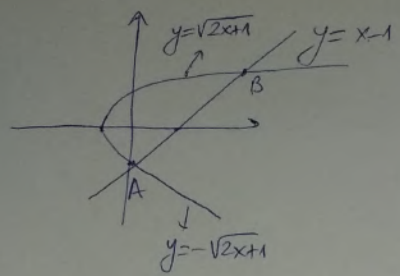
$y_2=-\sqrt{a^2-x^2}$ доња —||—

$$(y_1)'=\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}} \Rightarrow (y_1')^2=\frac{x^2}{a^2-x^2}, \text{ па } 1+(y_1')^2=1+\frac{x^2}{a^2-x^2}=\frac{a^2-x^2+x^2}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2}$$

Сада,
$$l=4\cdot\int_0^a\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}\cdot dx=4\cdot a\cdot\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\left[\begin{array}{l} x=at \\ dx=a\,dt \\ 0\le x\le a \\ 0\le t\le 1\end{array}\right]=4\cdot a\cdot\int_0^1\frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}=$$

$$=4a\cdot\arcsin t\Big|_0^1=4a(\arcsin 1-\arcsin 0)=4a\cdot\frac{\pi}{2}=\underline{2a\pi}$$

② Наћи дужину лука параболе $y^2=2x+1$ коју одсијеца права $x-y=1$.



Нађимо пресјек кривих.

$$\left.\begin{aligned} y^2&=2x+1 \\ y&=x-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} (2x+1)&=(x-1)^2 \\ x^2-4x&=0 \\ x(x-4)&=0 \\ x=0&;\ x=4 \end{aligned}$$

Пресјечне тачке: $A(0,-1)$, $B(4,3)$.

<u>I начин:</u> (по y-оси)

$$l=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+(x')^2}\cdot dy=\int_{-1}^{3}\sqrt{1+y^2}\,dy$$

$$\left\lceil \begin{aligned} x&=\frac{y^2-1}{2} \\ x'&=\frac{2y}{2}=y \end{aligned}\right\rfloor$$

$$I=\left\lceil \begin{aligned} u&=\sqrt{1+y^2} & dy&=dv \\ du&=\frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}dy & v&=y \end{aligned}\right\rfloor = y\sqrt{1+y^2}\Big|_{-1}^{3}-\int y\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy=$$

$$I=3\cdot\sqrt{10}-(-1)\sqrt{2}-\int_{-1}^{3}\frac{y^2+1-1}{\sqrt{1+y^2}}dy$$

$$I=3\sqrt{10}+\sqrt{2}-\int_{-1}^{3}\sqrt{1+y^2}+\int_{-1}^{3}\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$2I=3\sqrt{10}+\sqrt{2}+\ln|y+\sqrt{1+y^2}|\Big|_{-1}^{3}$$

$$I=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{10}+\sqrt{2}+\ln(3+\sqrt{10})-\ln(-1+\sqrt{2})\right)\Rightarrow l=\frac{1}{2}\left(3\sqrt{10}+\sqrt{2}+\ln\frac{3+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}\right)$$

II начин: (по x-оси)

$$l = \int_{-1}^{0}\sqrt{1+(y_2')^2}\,dx + \int_{0}^{4}\sqrt{1+(y_1')^2}\,dx$$, гдје $y_1=\sqrt{2x+1}$, $y_2=-\sqrt{2x+1}$

$= \dots$

③ Израчунати дужину лука криве $x=\ln(y^2-1)$ за $2\le y\le 5$.

<u>Рјешење:</u>

$x = x(y)$

$x' = \dfrac{2y}{y^2-1}$

$(x')^2 = \dfrac{4y^2}{(y^2-1)^2} \Rightarrow 1+(x')^2 = 1+\dfrac{4y^2}{(y^2-1)^2} = \dfrac{y^4-2y^2+1+4y^2}{(y^2-1)^2} = \dfrac{(y^2+1)^2}{(y^2-1)^2}$

$$l = \int_2^5 \sqrt{1+(x')^2}\,dy = \int_2^5 \frac{y^2+1}{y^2-1}\,dy = \int_2^5 \frac{y^2-1+2}{y^2-1}\,dy = \int_2^5\left(1+\frac{2}{y^2-1}\right)dy =$$

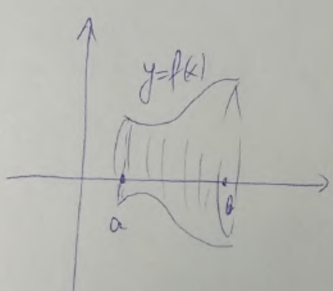
$$= \left(y+\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|\right)\Big|_2^5 = 5+\ln\frac{4}{6}-\left(2+\ln\frac{1}{3}\right) = 5+\ln\frac{2}{3}-2-\ln\frac{1}{3} =$$

$$3+\ln\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 3+\ln 2$$

Г

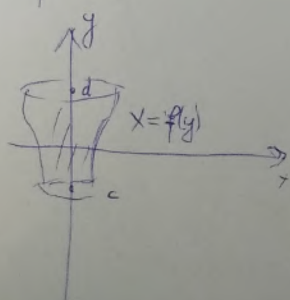
$$\int\frac{2}{y^2-1}\,dy = 2\cdot\int\frac{dy}{y^2-1} = \dots$$ рађен

<u>Запремина ротационог тијела</u>



$$V_x = \pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx = \pi\int_a^b y^2\,dx$$ (ротација око x-осе)

$$V_y = 2\pi\cdot\int_a^b x\cdot y(x)\cdot dx$$ (ротација око Oy-осе)



$$V_y = \pi\int_c^d (f(y))^2\,dy = \pi\int_c^d x^2\cdot dy$$ (ротација око y-осе)

$$V_x = 2\pi\int_c^d y\,x(y)\,dy$$ (ротација око Ox-осе)

1 Наћи запремину тијела које настаје ротацијом фигуре ограничене кривом $y=2x-x^2$ и правом $y=0$ око:

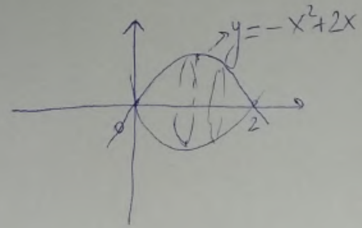
a) Ox−осе б) Oy−осе

Рјешење:

a) $y=-x^2+2x$ $T\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$, tj $T(1,1)$

$y=0 \Leftrightarrow -x(x-2)=0$

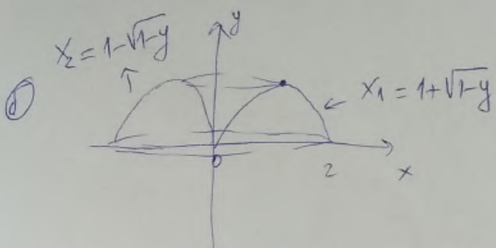
$x=0;\ x=2$



$$V_x = \cancel{2}\pi\cdot\int_0^1 (2x-x^2)^2dx) = \pi\cdot\int_0^2 (2x-x^2)^2dx$$

$$=\pi\int_0^2 (4x^2-4x^3+x^4)dx = \pi\left(\frac{4x^3}{3}-\frac{4x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \dots \frac{16}{15}\pi$$

б)



$y=2x-x^2$

$x^2-2x+y=0$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4y}}{2}=1\pm\sqrt{1-y}$$

$$V_y=\pi\cdot\int_0^1 \left(x_1^2(y)-x_2^2(y)\right)dy$$

$$=\pi\cdot\int_0^1\left((1+\sqrt{1-y})^2-(1-\sqrt{1-y})^2\right)dy = \pi\cdot\int_0^1 \cancel{1}+2\sqrt{1-y}+\cancel{(\sqrt{1-y})^2}-\cancel{1}+2\sqrt{1-y}-\cancel{(\sqrt{1-y})^2}$$

$$=\pi\cdot 4\cdot\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy = \begin{bmatrix}1-y=t\\ -dy=dt\\ 1\le t\le 0\end{bmatrix} = 4\pi\cdot\int_1^0\sqrt{t}\,dt = 4\pi\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}\cdot 2}{3}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}$$

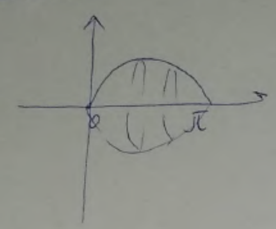
Други начин:

$$V_y = 2\pi\cdot\int_0^2 x\cdot f(x)dx = 2\pi\cdot\int_0^2 x\cdot(-x^2+2x)dx = \dots \frac{8\pi}{3}$$

② Наћи запремину тијела које настаје ротацијом површине између криве $y=\sin x$ и праве $y=0$ на сегменту $[0,\pi]$ око
а) Ox-осе б) Oy-осе

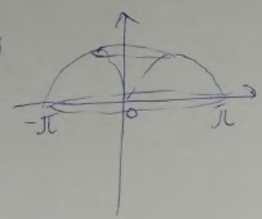
Рјешење:

а)



$$V_x = \pi \cdot \int_0^{\pi} (y)^2 dx = \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \pi \cdot \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \dots \frac{\pi^2}{2}$$

б)

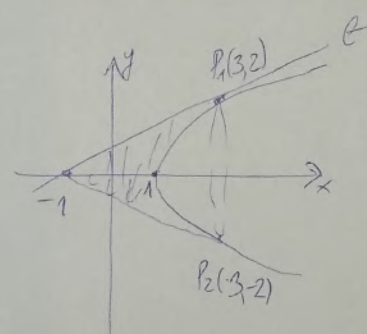


$$V_y = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} x \cdot f(x) dx = 2\pi \cdot \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \dots \pi^2$$

(парцијална интеграција

③ У тачки $P(3,y)$ параболе $y^2=2(x-1)$ повучена је тангента. Израчунати запремину тијела које настаје ротацијом око Ox-осе фигуре ограничене тангентом, параболом и Ox-осом.

Рјешење:



$y^2 = 2x-2$

$2x = y^2+2$

$x = \frac{1}{2}(y^2+2)$

$y=0 \Rightarrow x=1$

$x_0 = 3,$

$3 = \frac{1}{2}(y_0^2+2)$

$y_0^2+2=6$ $\quad A_1(3,2)$

$y_0^2 = 4 \Rightarrow y_0 = \pm 2 \;. \Rightarrow A_2(3,-2).$

Нађимо тангенту у једној од тачака. (због симетричности довољно)

$y^2 = 2x-2$

$2y \cdot y' = 2$

$y' = \frac{1}{y} \quad y'(A_1) = \frac{1}{2}$

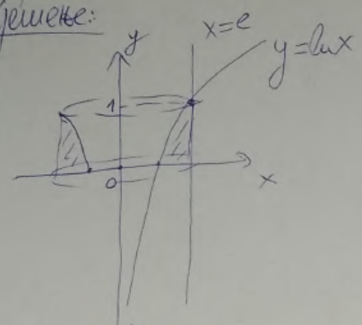
$l: y-2=\frac{1}{2}(x-3)$

$\underline{y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$

$$V_x=V_1-V_2=\pi\cdot\int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2\cdot dx-\pi\cdot\int_{1}^{3}(2x-2)dx=\ldots\frac{4\pi}{3}$$

(4) Наћи запремину тијела насталог ротацијом око Oy-осе лика ограниченог са кривама $y=\ln x, y=0, x=e$.

Рјешење:



$\ln x=y$

За $x=e$; $y=\ln e=1$

$y=\ln x\Rightarrow x=e^y$

$$V_y=\pi\int_0^1 e^2\cdot dy-\pi\cdot\int_0^1(e^y)^2\cdot dy=$$

$$\pi\cdot e^2y\Big|_0^1-\pi\cdot\frac{e^{2y}}{2}\Big|_0^1=\underline{\frac{\pi}{2}(e^2-1)}$$

(5) Израчунати запремину насталу ротацијом фигуре ограничене кривом $x^2+y^2=16$ и $y^2=6x$

а) око Ox-осе

б) око Oy-осе

(а) $x^2+y^2=16$

$O(0,0), r=4$

Нађимо пресјек:

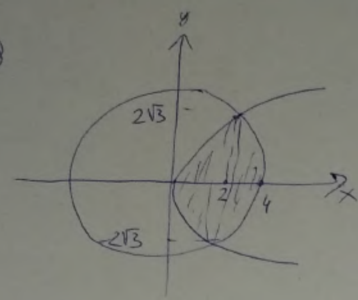
$$\left.\begin{matrix}x^2+y^2=16\\ y^2=6x\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}x^2+6x=16\\ x^2+6x-16=0\\ x_{1,2}=\frac{-6\pm10}{2}\end{matrix}$$

$\cancel{x_1=-8}$, $x_2=2$ $\Rightarrow$ $y^2=12$, $y=\pm2\sqrt{3}$

$A_1(2,-2\sqrt{3})$

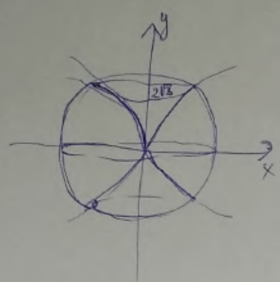
$A_2(2,+2\sqrt{3})$

ⓐ



$$V_x = \pi \int_0^2 6x \cdot dx + \pi \cdot \int_2^4 (16 - x^2)\, dx = \ldots \frac{76}{3}\pi$$

ⓑ



$$x^2 + y^2 = 16 \qquad y^2 = 6x$$

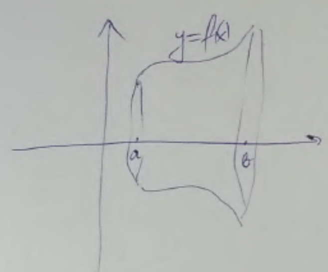
$$x^2 = 16 - y^2 \qquad x = \frac{y^2}{6} \Rightarrow x^2 = \frac{y^4}{36}$$

$$V_y = 2\left(\pi \int_0^{2\sqrt{3}} \left(16 - y^2 - \frac{y^4}{36}\right) dy\right) = \ldots = \frac{224}{5}\sqrt{3}\cdot\pi$$

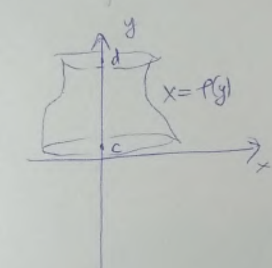
множимо са 2 због симетричности.

или границе $\pi \cdot \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(16 - y^2 - \frac{y^4}{36}\right) dy$

Површина ротационог тијела

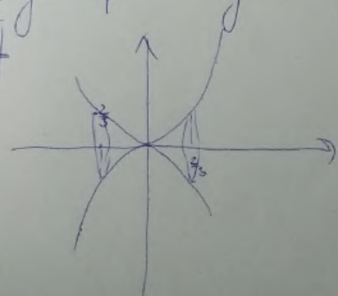


$$P_x = 2\pi \cdot \int_a^b y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx$$



$$P_y = 2\pi \int_c^d x(y)\sqrt{1 + (x'(y))^2}\, dy$$

① Лук криве $y = x^3$ ротира око x-осе на интервалу $-\frac{2}{3}$ до $\frac{2}{3}$.



$$P = 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^{\frac{2}{3}} y(x)\sqrt{1 + (y')^2} \cdot dx =$$

$$= 4\pi \cdot \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\, dx = 4\pi \cdot \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 \sqrt{1 + 9x^4} \cdot dx$$

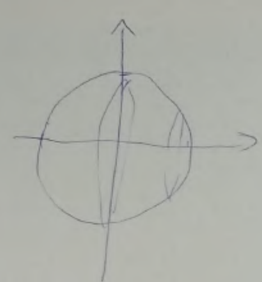
$$\left[\begin{array}{l} 1+9x^4=t \\ 36x^3dx=dt \\ 0\le x\le \frac{2}{3} \\ 1\le t\le \frac{25}{9} \end{array}\right] = 4\pi\cdot\frac{1}{36}\int_1^{\frac{25}{9}}\sqrt{t}\cdot dt = \ldots \frac{196\pi}{729}$$

② Наћи површину сфере полупречника a.

Рјешење:

Из ј-не $x^2+y^2=a^2$, $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$. Ротацијом лука $y=\sqrt{a^2-x^2}$ око Ox-осе настаје сфера.

$$P_x = 4\cdot\pi\int_0^a y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\cdot\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx =$$



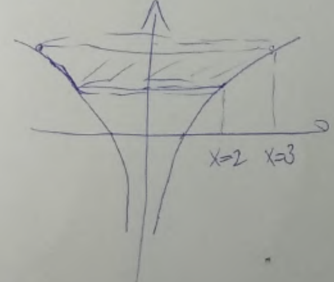
$$y' = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2}$$

$$= 4\pi\int_0^a\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{a}{\cancel{\sqrt{a^2-x^2}}}\,dx = 4\pi\cdot a\cdot x\Big|_0^a = 4\pi\cdot a^2$$

③ Израчунати површину површи која настаје ротацијом графика $y=\ln x$, $2\le x\le 3$ око Oy-осе.

Рјешење:



$$P_y = 2\pi\cdot\int_{\ln 2}^{\ln 3} x\cdot\sqrt{1+(x')^2}\,dy$$

$\ln x = y \Rightarrow x = e^y$ $\qquad x' = e^y$

$\qquad (x')^2 = e^{2y}$

$$P_y = 2\pi\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^y\sqrt{1+e^{2y}}\,dy = \left[\begin{array}{l} e^y = t \\ e^y dy = dt \\ \ln 2\le y\le \ln 3 \\ 2\le t\le 3\end{array}\right]$$

$$= 2\pi \int_2^3 \sqrt{1+t^2}\cdot dt = 2\pi\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+1}|\right)\Big|_2^3 =$$

$$\pi\left(3\sqrt{10}-2\sqrt{5}+\ln\frac{3+\sqrt{10}}{2+\sqrt{5}}\right)$$

4) Наћи површину и запремину тијела које се добија ротацијом криве $x^2+y^2-8x-8y+23=0$ око Ox-осе.

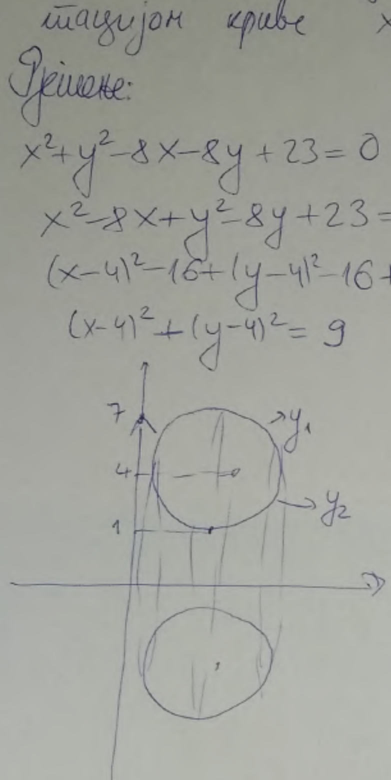
Рјешење:

$$x^2+y^2-8x-8y+23=0$$

$$x^2-8x+y^2-8y+23=0$$

$$(x-4)^2-16+(y-4)^2-16+23=0$$

$$(x-4)^2+(y-4)^2=9$$ (кружница са центром у $O(4,4)$ и полупречником $r=3$)



$$(y-4)^2 = 9-(x-4)^2$$

$$y-4=\pm\sqrt{9-(x-4)^2}$$

$$y=4\pm\sqrt{9-(x-4)^2}$$

$$y_1 = 4+\sqrt{9-(x-4)^2}$$

$$y_2 = 4-\sqrt{9-(x-4)^2}$$

$$V=\pi\cdot\int_1^7 (y_1^2-y_2^2)\,dx =$$

$$=\pi\cdot\int_1^7\left(\left(4+\sqrt{9-(x-4)^2}\right)^2-\left(4-\sqrt{9-(x-4)^2}\right)^2\right)dx =$$

$$=\pi\cdot\int_1^7\left(\cancel{16}+8\sqrt{9-(x-4)^2}+\cancel{9}-\cancel{(x-4)^2}-\cancel{16}+8\sqrt{9-(x-4)^2}-\cancel{9}+\cancel{(x-4)^2}\right)dx$$

$$=\pi\cdot\int_1^7 16\sqrt{9-(x-4)^2}\,dx = 16\pi\int_1^7\sqrt{3^2-(x-4)^2}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} (x-4)=3\sin t \\ dx = 3\cos t\,dt \\ 1\le x\le 7 \\ \sin t=\frac{x-4}{3} \\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2} \end{array}\right] = 16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt =$$

$$= 16\cdot 9\,\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = \ldots\ 72\pi^2$$

Површина:

$$P = 2\pi \cdot \int_1^7 y_1(x)\sqrt{1+(y_1')^2}\cdot dx + 2\pi \cdot \int_1^7 y_2(x)\sqrt{1+(y_2'(x))^2}\, dx$$

$$y_1(x) = 4+\sqrt{9-(x-4)^2}$$

$$y_1' = \left(\frac{1}{2\sqrt{9-(x-4)^2}}\right)\cdot(-2(x-4)) = \frac{-(x-4)}{\sqrt{9-(x-4)^2}} \Rightarrow (y_1')^2 = \frac{(x-4)^2}{9-(x-4)^2}$$

$$y_2' = \frac{x-4}{\sqrt{9-(x-4)^2}} \Rightarrow (y_2')^2 = \frac{(x-4)^2}{9-(x-4)^2}$$

$$1+(y_1')^2 = 1+\frac{(x-4)^2}{9-(x-4)^2} = \frac{9-\cancel{(x-4)^2}+\cancel{(x-4)^2}}{9-(x-4)^2} = \frac{9}{9-(x-4)^2}$$

$$1+(y_2')^2 = \frac{9}{9-(x-4)^2}$$

Сада,
$$P = 2\pi\cdot\int_1^7 \left(4+\sqrt{9-(x-4)^2}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{9-(x-4)^2}}\, dx + 2\pi\cdot\int_1^7\left(4-\sqrt{9-(x-4)^2}\right)\cdot\frac{3}{\sqrt{9-(x-4)^2}}\, dx$$

$$= 2\pi\cdot\int_1^7\left(\frac{12}{\sqrt{9-(x-4)^2}}+\cancel{3}+\frac{12}{\sqrt{9-(x-4)^2}}-\cancel{3}\right)dx =$$

$$= 48\pi\cdot\int_1^7\frac{dx}{\sqrt{9-(x-4)^2}} = \left[\begin{array}{c} x-4=3t \\ dx = 3dt \\ 1\le x\le 7 \\ -1\le t\le 1\end{array}\right] = 48\pi\cdot\int_{-1}^{1}\frac{3dt}{\sqrt{9-9t^2}} =$$

$$= 48\pi\cdot \arcsin t\Big|_{-1}^{1} = 48\pi\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 48\pi\cdot\pi = 48\pi^2$$