Вјежбе (седмица бр. 14) ①

Екстремне вриједности ф-је више промјенљивих

(*) Локални екстремум ф-је $z=z(x,y)$

<u>Неопходан услов</u> Да би диференцијабилна ф-ја $z=z(x,y)$ имала екстремну вриједност у А мора важити:

$\frac{\partial z}{\partial x}(A)=0$

$\frac{\partial z}{\partial y}(A)=0$

Рјешавањем система ј-на: $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ добијамо као рјешење (рјешења) стационарне тачке. Она може, али не мора бити екстремна вриједност.

<u>Довољан услов</u> Нека је А стационарна тачка за $z=z(x,y)$.

Ако:

1) $d^2z(A)>0$ за $dx^2+dy^2\neq 0$ тада ф-ја z има минимум у А.
2) $d^2z(A)<0$ за $dx^2+dy^2\neq 0$ -||- -||- максимум у А.
3) $d^2z(A)$ мијења знак за $dx^2+dy^2\neq 0$, тада ф-ја нема екстрема у А.
4) $d^2z(A)$ је једнак нули за неку комбинацију dx и dy, $dx^2+dy^2\neq 0 \Rightarrow$ нема одлуке.

или

<u>Довољан услов</u> (Силвестеров критеријум)

① $\Delta_1=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A)>0$ $\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}(A) & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(A)\end{vmatrix}>0 \Rightarrow$ у А је минимум

② $\Delta_1<0$, $\Delta_2>0 \Rightarrow$ у А је максимум

③ $\Delta_1\neq 0$, $\Delta_2\neq 0$ и не важи ни 1) ни 2) $\Rightarrow$ нема екстремума

④ $\Delta_1=0$ или $\Delta_2=0 \Rightarrow$ нема одлуке

(**) Локални екстремум ф-је $u=u(x,y,z)$.

<u>Неопходан услов</u> (да би ф-ја u имала екстремну вриј. у А)

$\frac{\partial u}{\partial x}(A)=0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(A)=0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(A)=0$

Довољан услов (Силвестеров критеријум)

① $\Delta_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A)$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}(A) & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(A) \end{vmatrix}$

① Ако $\Delta_1 > 0$ $\Delta_2 > 0$ $\Delta_3 > 0 \Rightarrow A$ минимум

② Ако $\Delta_1 < 0$ $\Delta_2 > 0$ $\Delta_3 < 0 \Rightarrow A$ максимум

③ ④ као и за ф-ју двије промјенљиве

「за $d^2u(A)$ исти услови, за $dx^2+dy^2+dz^2 \neq 0$」

① Одредити локалне екстремуме ф-је:

$$f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$$

Рјешење:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x^2 - 3 = 0 \\ -6y^2 + 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{array}$$

Стационарне тачке су:

$A(1,1)$, $B(1,-1)$, $C(-1,1)$, $D(-1,-1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y$$

I начин)

За $A(1,1)$: $\Delta_1 = 6 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -72 < 0$ $\Rightarrow$ није локални екстремум

За $B(1,-1)$: $\Delta_1 = 6 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 72 > 0$ $\Rightarrow$ у B је локални минимум $f_{min}(B) = -6$

За $C(-1,1)$: $\Delta_1 = -6 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 72 > 0$ $\Rightarrow$ у C је локални максимум $f_{max}(C) = 6$

За $D(-1,-1)$: $\Delta_1 = -6 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -72 < 0$ $\Rightarrow$ у D није локални екстремум

(II) $d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$ (2)

$d^2f(A) = 6dx^2 - 12dy^2 = \begin{cases} -6dx^2 < 0; & dy = dx \\ 12dy^2 > 0 & dx = 2dy \end{cases}$

d^2f мијења знак ⇒ није екстремум.

⌜Услов $dx^2 + dy^2 \neq 0$ значи да $(dx, dy) \neq (0,0)$, тј да dx и dy нису истовремено једнаки 0⌟

$d^2f(B) = 6dx^2 + 12dy^2 > 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) ⇒ у B локални мин.

⌜Напомена: $6dx^2 + 12dy^2 = 0$ за $6dx^2 = 0$; $12dy^2 = 0$, тј $dx = dy = 0$⌟

$d^2f(C) = -6dx^2 - 12dy^2 < 0$ (за $dx^2 + dy^2 \neq 0$) ⇒ у C локални макс.

$d^2f(D) = -6dx^2 + 12dy^2 = \begin{cases} 6dy^2; & dy = dx \\ -12dy^2; & dx = 2dy \end{cases}$

d^2f мијења знак ⇒ није екстремум

(2) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x-2y)$ (домаћи) Рјешење: $A\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ минимум, $B\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$ максимум

(3) Наћи локалне екстремне вриједности:

$$f(x,y,z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$$

Рјешење:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x - y + 2z = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -x - 1 + 3y^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2x + 2z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} & y = 4x + 2z = 2x \\ & y^2 = \frac{x+1}{3} \\ & z = -x \end{aligned}$$

$(2x)^2 = \frac{x+1}{3}$

$4x^2 = \frac{x+1}{3} \Rightarrow 12x^2 - x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{24}$

$x_1 = \frac{8}{24}$; $x_2 = -\frac{6}{24}$

$x_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{4}$

Стационарне тачке: $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $B\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Нађимо друге парцијалне изводе.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$

I) У тачки A,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-8) + 2\cdot 15 = 14 > 0$$

У тачки је локални минимум, $f_{min}(A) = f(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) =$
$= 2\cdot(\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}) - \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 = \dots$

У тачки B,

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 1 = -13 < 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 + 2\cdot(-13) < 0$$

Нема екстремума у B.

<u>Други начин:</u>

$d^2 f(A) = ?$

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2$$

$$\begin{aligned} d^2 f(A) &= 4dx^2 - 2dxdy + 4dxdz + 4dy^2 + 2dz^2 \\ &= 2(2dx^2 - dxdy + 2dxdz + 2dy^2 + dz^2) \\ &= 2(dx^2 + 2dxdz + dz^2 + dx^2 - dxdy + dy^2 + dy^2) \\ &= 2((dx + dz)^2 + (dx - \tfrac{1}{2}dy)^2 - \tfrac{1}{4}dy^2 + dy^2 + dy^2) \\ &= 2((dx+dz)^2 + (dx - \tfrac{1}{2}dy)^2 + \tfrac{7}{4}dy^2) \end{aligned}$$

Одавде,

$d^2f(A)>0$ за све $dx^2+dy^2+dz^2 \neq 0$

$\ulcorner$ $d^2f(A)=0$ за $\left.\begin{array}{l} dx+dz=0 \\ dx-\frac{1}{2}dy=0 \\ dy=0 \end{array}\right\} \Rightarrow dx=dy=dz=0 \lrcorner$

Дакле, тачка A је локални минимум.

$d^2f(B)=?$

$d^2f(B)=4dx^2-2dxdy+4dxdz-3dy^2+2dz^2$

Ако узмемо $dy=dz=0$, а $dx\neq 0$ $\quad d^2f(B)=4dx^2>0$

$\quad$ " $\quad dx=dz=0$, а $dy\neq 0$ $\quad d^2f(B)=-3dy^2<0$

то $d^2f(B)$ мијења знак $\Rightarrow$ Нема екстремума у B.

(4) Наћи локалне екстремуме ф-је:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+(4-x-y-z)^2 \qquad \text{(домаћи)}$$

Рјешење: $A(1,1,1)$ је локални минимум.

$f_{min}(A)=4$.

(5) Израчунати екстремне вриједности ф-је $z=z(x,y)$ која је задата имплицитно.

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$$

Рјешење:

Нађимо $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}-2-4\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow (2z-4)\frac{\partial z}{\partial x}=2-2x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2-2x}{2z-4}$

$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}+2-4\frac{\partial z}{\partial y}=0 \qquad (2z-4)\frac{\partial z}{\partial y}=-(2y+2) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-(2y+2)}{(2z-4)}$

Из $\frac{\partial z}{\partial x}=0$; $\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Rightarrow 2-2x=0$; $-(2y+2)=0$

$x=1$; $y=-1$

$S(1,-1)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1-x}{z-2}\right)=\frac{-1(z-2)-(1-x)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{(z-2)^2}=\frac{-(z-2)-(1-x)\cdot\frac{1-x}{z-2}}{(z-2)^2}$$

$$=\frac{-(z-2)^2-(1-x)^2}{(z-2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-(y+1)}{(z-2)}\right)=-(y+1)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{z-2}\right)=-(y+1)\cdot\frac{(-1)}{(z-2)^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=\frac{(y+1)(1-x)}{(z-2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-(y+1)}{(z-2)}\right)=\frac{-1\cdot(z-2)-(-(y+1)\cdot\frac{\partial z}{\partial y})}{(z-2)^2}=-\frac{(z-2)^2+(y+1)^2}{(z-2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-1)=\frac{1}{4},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-1)=0\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-1)=\frac{1}{4},$$

$S(1,-1)$

$x=1;\, y=-1 \Rightarrow 1^2+(-1)^2+z^2-2-2-4z-10=0$

$z^2-4z-12=0 \Rightarrow z=6;\ z=-2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,-1)=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,-1)=0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1,-1)=-\frac{1}{4}$$

За $S(1,-1)$, $z=-2$

$$d^2z=\frac{1}{4}dx^2+\frac{1}{4}dy^2=\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)>0 \quad \text{за } dx^2+dy^2\neq 0$$

$z_{min}=-2$

За $S(1,-1)$, $z=6$

$$d^2z=-\frac{1}{4}dx^2-\frac{1}{4}dy^2<0 \quad \text{за } dx^2+dy^2\neq 0$$

$z_{max}=6.$

Условни екстремум

1. Одредити екстремуме ф-је $f(x,y,z)=2x+y-2z$ при услову $x^2+y^2+z^2=36$.

Решење:

$$F(x,y,z,\lambda)=2x+y-2z+\lambda\cdot(x^2+y^2+z^2-36)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=2+2\lambda x=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=1+2\lambda y=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}&=-2+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2&=36\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}1+\lambda x&=0 &\Rightarrow x&=-\frac{1}{\lambda}\\ 1+2\lambda y&=0 & y&=-\frac{1}{2\lambda}\\ -1+\lambda z&=0 & z&=\frac{1}{\lambda}\\ x^2+y^2+z^2&=36\end{aligned}\qquad \lambda\neq 0,$$

Ако увртимо x,y,z у ј-ну $x^2+y^2+z^2=36$

$$\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=36$$

$$\frac{4+1+4}{4\lambda^2}=36 \Rightarrow 4\lambda^2=\frac{9^1}{36_4}\Rightarrow \lambda^2=\frac{1}{16}\Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{4}$$

Стационарне тачке:

$S_1(-4,-2,4)$, $\lambda_1=\frac{1}{4}$

$S_2(4,2,-4)$, $\lambda_2=-\frac{1}{4}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=2\lambda \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\lambda,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=2\lambda$$

За S_1,

$$d^2F(S_1)=2\cdot\frac{1}{4}dx^2+2\cdot\frac{1}{4}dy^2+2\cdot\frac{1}{4}dz^2=\frac{1}{2}(dx^2+dy^2+dz^2)>0$$

(за $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$)

За S_2, $d^2F(S_2)=-\frac{1}{2}(dx^2+dy^2+dz^2)<0$ (за $dx^2+dy^2+dz^2\neq 0$)

Ф-ја f на $x^2+y^2+z^2=36$ у тачки S_1 има локални минимум а у S_2 локално максимум.

$f_{min}(S_1)=-18$, $f_{max}(S_2)=18$

② Наћи екстремуме ф-је $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ при услову $xyz = 4$

Решење:

$$F(x,y,z,\lambda) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 4)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y + 2z + \lambda yz = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= x + 2z + \lambda xz = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$(1)x - (2)y \Rightarrow$

$$xy + 2xz + \cancel{\lambda xyz} - \cancel{xy} - 2zy - \cancel{\lambda xyz} = 0$$

$$2z(x-y) = 0 \Rightarrow z = 0;\ x = y \quad (*)$$

$(2)y - (3)z \Rightarrow$

$$xy + \cancel{2zy} + \cancel{\lambda xyz} - 2xz - \cancel{2yz} - \cancel{\lambda xyz} = 0$$

$$x(y - 2z) = 0 \Rightarrow x = 0;\ y = 2z \quad (**)$$

За $z = 0$, $x \cdot y \cdot 0 = 4$ $(\perp)$. Из прве ј-не $(*)$, важи $x = y$.

За $x = 0$; $0 \cdot y \cdot z = 4$ $(\perp)$. Из ј-не $(**)$ важи $y = 2z$

$$x \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 4$$

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$y = x = 2$$

$$z = \frac{y}{2} = 1$$

Стационарно тачка $S(2,2,1)$.

$$2 + 2 \cdot 1 + \lambda \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$2\lambda = -4$$

$$\underbrace{\lambda = -2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1 + \lambda z,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = 2 + \lambda y \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 2 + \lambda x$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0$$

$$d^2F = 2(1 + (-2) \cdot 1)\,dxdy + 2 \cdot (2 - 2 \cdot 2) \cdot dxdz + 2 \cdot (2 - 2 \cdot 2)\,dydz$$

$$= 2(-dxdy - 2dxdz - 2dydz)$$

Диференцирајмо услов $(xyz = 4)$

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0$$

Ако уврстимо $S(2,2,1)$,

$$2dx + 2dy + 4dz = 0 \quad /:2$$

$$dz = -\frac{(dx + dy)}{2}$$

$$d^2F = 2\left(-dx\,dy - 2dx\cdot\frac{(-(dx+dy))}{2} - 2dy\cdot\frac{(-(dx+dy))}{2}\right) =$$ ⑤

$$= 2(-dx\,dy + dx(dx+dy) + dy\,(dx+dy))$$
$$= 2(-\cancel{dx\,dy} + dx^2 + \cancel{dx\,dy} + dx\,dy + dy^2)$$
$$= 2\,(dx^2 + d\,x\,dy + dy^2)$$
$$= 2\left(\left(dx + \tfrac{1}{2}dy\right)^2 - \tfrac{1}{4}dy^2 + \tfrac{1}{1}dy^2\right)$$
$$= 2\cdot\left(\left(dx + \tfrac{1}{2}dy\right)^2 + \tfrac{3}{4}dy^2\right) > 0 \quad \text{за } dx^2 + dy^2 \neq 0$$

$\ulcorner$ $d^2F = 0$ ако $dx + \frac{1}{2}dy = 0$, $dy = 0$ $\Rightarrow dx = dy = 0$,

③ Наћи екстремум ф-је $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ при услову $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ (домаћи)

Рјешење $A(3,3,3)$, $B(1,1,-1)$, $C(1,-1,1)$, $D(-1,1,1)$

$f_{min} = f(A) = 81$

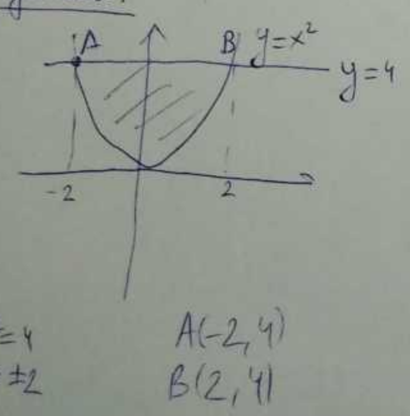
B, C, D нису екстремуми (други диференцијал мијења знак)

Најмања и највећа вриједности ф-је

① Наћи најмању и највећу вриједности ф-је f, гдје $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ у области

$D = \{(x,y) : y \geq x^2;\ y \leq 4\}$.

Рјешење:



$x^2 = 4$ $\quad A(-2,4)$

$x = \pm 2$ $\quad B(2,4)$

Прво нађимо стационарне тачке унутар области.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2+8x-2y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y-2x=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&y=x\\ &6x^2+8x-2x=0\\ &6x(x+1)=0 \Rightarrow x=0, x=-1\end{aligned}$$

$S_1(0,0)$, $S_2(-1,-1) \notin D$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x+8 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$$d^2f = 8dx^2-4dxdy+2dy^2 =$$
$$2(4dx^2-2dxdy+dy^2) = 8\left(dx^2-\frac{dxdy}{2}+\frac{dy^2}{4}\right)=$$
$$=8\cdot\left(\left(dx-\frac{dy}{4}\right)^2-\frac{dy^2}{16}+\frac{dy^2}{4}\right)=$$
$$=8\left(\left(dx-\frac{dy}{4}\right)^2+\frac{3dy^2}{16}\right)>0 \text{ за } dx^2+dy^2\neq 0 \Rightarrow \text{минимум}$$

$z_{min}=f(0,0)=0$

Нађимо екстремуме на границама:

1) $y=4, \ -2\le x\le 2$ (дио праве)

$z=f(x,4)=2x^3+4x^2+16-8x = 2x^3+4x^2-8x+16$

$z'=6x^2+8x-8=0$

$x_1=\frac{2}{3}, \ x_2=-2$ (задовољавају услове $-2\le\frac{2}{3}, -2\le 2$).

$S_3(-2,4)$, $S_4(\frac{2}{3},4)$

2) На дијелу параболе $y=x^2, \quad -2\le x\le 2$

$g(x)=f(x,x^2)=\cancel{2x^3}+4x^2+x^4-\cancel{2x^3}=x^4+4x^2$

$g'(x)=4x^3+8x=0$

$4x(x^2+2)=0 \Rightarrow x=0$

За $x=0, y=0$. Тачка $(0,0)$ је већ разматрана

Нађимо вриједности ф-је у тачкама S_1, S_3, S_4, B

$f(0,0)=0$ (8)

$f(-2,4)=32$

$f(\frac{2}{3},4)=13{,}03$

$f(2,4)=32$ (B) – јер је гранична тачка то је разматрано

Најмања вриједност је $\min\{0,32,13.03,32\}=0$.

$f_{min}(0,0)=0$

Највећа вриједност је $\max\{0,32,13.03,32\}=32$

$f_{max}(-2,4)=f_{max}(2,4)=32$

② Наћи највећу и најмању вриједност ф-је
$z(x,y)=x^2-xy+y^2-4x$ на области:

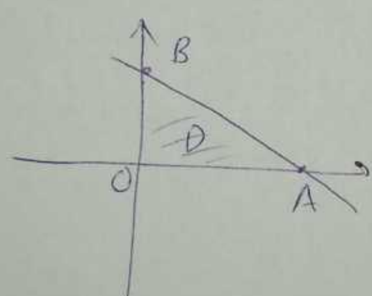
$D=\{(x,y): x\geq 0; y\geq 0; 2x+3y-12\leq 0\}$

Рјешење:

$2x+3y=12$

$3y=12-2x$

$y=4-\frac{2}{3}x$



$x=0; y=4$

$y=0; x=6$

Нађимо екстреме унутар D.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=2x-y-4=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-x+2y=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}&3y=4\Rightarrow y=\frac{4}{3}\\ &x=2y\end{aligned}$$

$S(\frac{8}{3},\frac{4}{3})\in D \Rightarrow$ стационарна тачка

(видимо са слике или провјеримо $\frac{8}{3}\geq 0$, $\frac{4}{3}\geq 0$; $2\cdot\frac{8}{3}+3\cdot\frac{4}{3}-12\leq 0$)

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$

$2>0$, $\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3>0 \Rightarrow$ минимум

Нађимо екстремне вриједности на границама:

1) $OA: \quad y=0 \; ; \; 0 \le x \le 6$

$f(x) = z(x,0) = x^2 - 4x$

$f'(x) = 2x - 4 = 0$

$x = 2$

$f(2) = z(2,0) = -4$

$S_2(2,0)$

2) $OB: \quad x=0 \; ; \; 0 \le y \le 4$

$f(y) = z(0,y) = y^2$

$f'(y) = 2y = 0$

$y = 0$

$S_3(0,0)$

3) $AB: \quad y = 4 - \frac{2}{3}x; \quad 0 \le x \le 6$

$$g(x) = z(x, 4 - \frac{2}{3}x) = x^2 - x(4 - \frac{2}{3}x) + (4 - \frac{2}{3}x)^2 - 4x$$

$$= x^2 - 4x + \frac{2}{3}x^2 + 16 - \frac{16}{3}x + \frac{4}{9}x^2 - 4x$$

$$= \frac{19x^2}{9} - \frac{40}{3}x + 16$$

$g'(x) = \frac{38x}{9} - \frac{40}{3} = 0 \quad / 9$

$38x - 120 = 0$

$x = \frac{120}{38} = \frac{60}{19} \; ; \; y = 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{60}{19} = \frac{108}{3 \cdot 19}$

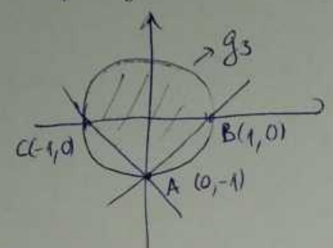
$S_4(\frac{60}{19}, \frac{36}{19})$

Нађемо $z(\frac{8}{3}, \frac{4}{3})$, $z(2,0)$, $z(0,0)$, $z(\frac{60}{19}, \frac{36}{19})$, $z(6,0)$, $z(0,4)$. Од граничне тачке добијених вриједности нађемо најмању вриједност. У тачки гдје z има најмању вриједност се достиже најмања вриједност. Такође, нађемо највећу вриједности ...

③ Наћи највећу и најмању вриједност ф-је $z(x,y)=2x^2+y^2-3$ на области ограниченој са: $x^2+y^2=1$; $x-y=1$, $x+y=-1$.

Рјешење:

Нацртајмо области.



$x+y=-1$
$x-y=1$

Нађимо екстремуме у унутрашњости.

$\frac{\partial z}{\partial x}=4x$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2y$

Из $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ $\Rightarrow$ $x=0$, $y=0$

$(0,0)\in D$

$\boxed{S_1(0,0)}$

Нађимо екстремуме на границама.

1) AC: $x-y=1$, $y=x-1$

$f(x)=z(x,x-1)=2x^2+(x-1)^2-3=3x^2-2x-2$

$f'(x)=6x-2=0$

$x=\frac{1}{3}$

$S_2\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ (припада области)

2) AB: $x+y=-1$, $y=-x-1$

$g(x)=z(x,-x-1)=2x^2+(-x-1)^2-3=3x^2+2x-2$

$g'(x)=6x+2=0$

$x=-\frac{1}{3}$

$S_3\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$ (припада области)

3) Граница g_3 (дио кружнице)

I начин: Ј-на полукруга је $y=\sqrt{1-x^2}$. Уврстимо $y=\sqrt{1-x^2}$ у ф-ју $z(x,y)$. На тај начин добијемо ф-ју $g(x)$. $g'(x)=0 \Rightarrow x=\ldots$

На овај начин добијамо сљедећу тачку.

II начин.

$$F(x,y)=2x^2+y^2-3+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}&=4x+2\lambda x=0 \\ \frac{\partial F}{\partial y}&=2y+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x(2+\lambda)=0 &\Rightarrow x=0;\ \lambda=-2 \\ 2y(1+\lambda)=0 &\quad\ \ y=0;\ \lambda=-1 \end{aligned}$$

За $x=0$, $y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$. Пошто је $y>0$, $y=1$ (горњи полукруг)

$\underline{S_4(0,1)}$

$2\cdot 1+2\cdot\lambda\, 1=0 \Rightarrow \underline{\lambda=-1}$

За $\lambda=-2$

$2y(1-2)=0 \Rightarrow y=0$, па $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

$\underline{S_5(1,0),\ S_6(-1,0)}$

Граничне тачке (пресјеци појединачних граница)

$A(0,-1)$, $B(1,0)$, $C(-1,0)$.

Нађемо:

$z(0,0)=-3$	$z(1,0)=-1$
$z\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{7}{3}$	$z(-1,0)=-1$
$z\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{7}{3}$	$z(0,-1)=-2$
$z(0,1)=-2$	

$z_{min}(0,0)=-3$

$z_{max}(-1,0)=z_{max}(1,0)=-1$

Најмања вриједност се достиже у S_1, а највећа у S_5 и S_6.

(4) Одредити најмању и највећу вриједност ф-је $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ на области: $D=\{(x,y): |x|+|y|\le 3\}$.

Упутство: $|x|+|y|=\begin{cases} x+y; & x\ge 0;\ y\ge 0 \\ -x+y; & x<0;\ y\ge 0 \\ x-y; & x\ge 0;\ y\le 0 \\ -x-y; & x<0;\ y\le 0 \end{cases} \Rightarrow$ 8 тачака укупно