

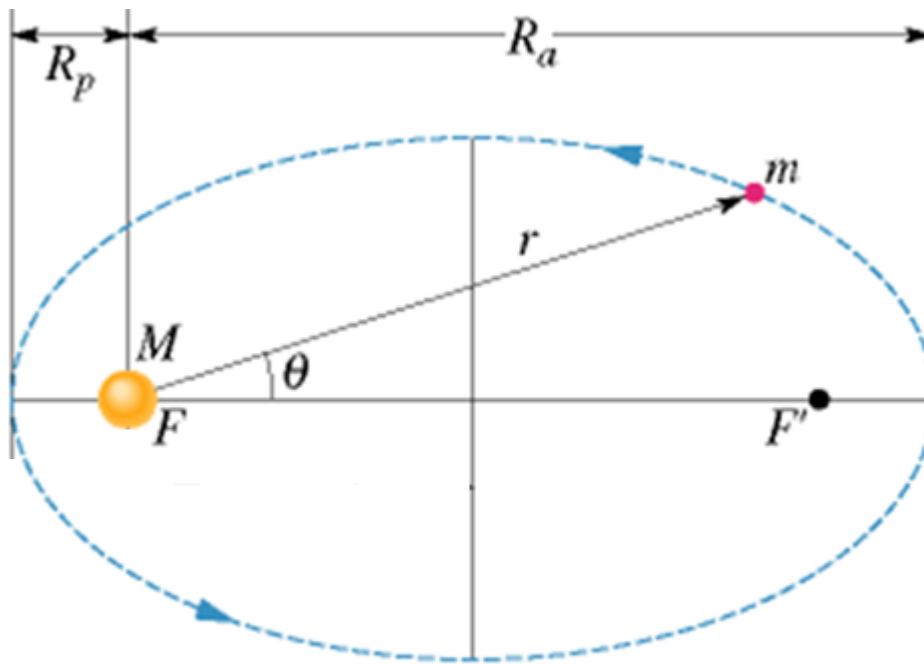


Njutnov zakon gravitacije

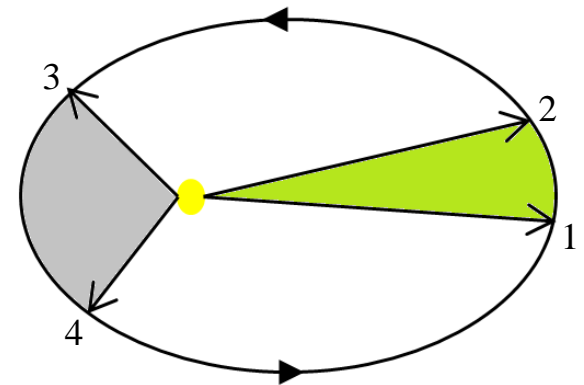
dr Mira Vučeljić
redovni profesor

Keplerovi zakoni

- I** – Putanja svake planete je elipsa sa Suncem u jednoj od njenih žiža.
- II** – Radijus vektor planete za isto vrijeme opiše jednake površine.
- III** – Kvadrat perioda obrtanja planete oko Sunca proporcionalan je trećem stepenu njenog rastojanja od Sunca. $T^2 = k \cdot r^3$



Slika 1.



Slika 2.

I Keplerov zakon

Sila između Sunca i planete je privlačna.

II Keplerov zakon

Sila je centralna, ima pravac radijus vektora položaja planete

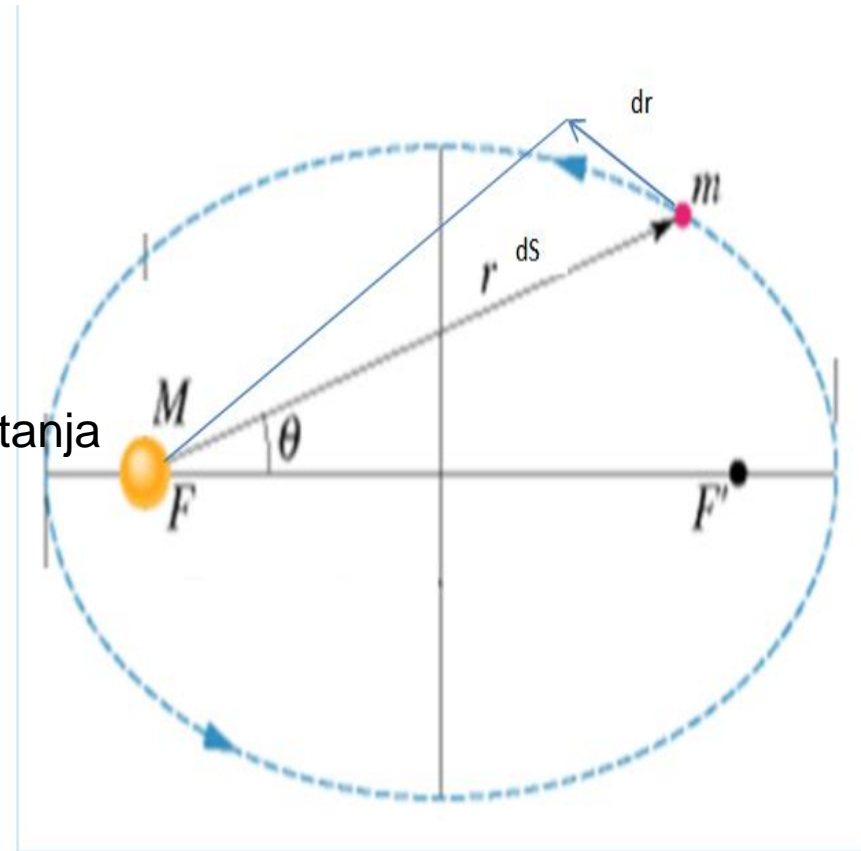
$$\frac{dS}{dt} = \text{const} \quad dS = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}|$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} \left| \vec{r} \times m\vec{v} \right| = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{const}$$

Iz zakona o održanju momenta količine kretanja dobijamo

$$\vec{L} = \text{const} \Rightarrow \vec{M} = 0$$



Vektori r i F su paralelni, slijedi sila je centralna

III Keplerov zakon → Izraz za gravitacionu silu. Izvođenje je urađeno za jednostavniji slučaj kada je putanja kružna.

$$T = \frac{2r\pi}{v} \quad v^2 = \frac{4r^2\pi}{T^2} \quad T^2 = \frac{4r^2\pi}{v^2}$$
$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4r^2\pi}{T^2 r} = \frac{4r^2\pi}{kr^4} \sim \frac{1}{r^2}$$

$$F = \frac{bm}{r^2} \rightarrow \text{sila kojom Sunce privlači Zemlju}$$

$$F' = \frac{cM}{r^2} \rightarrow \text{sila kojom Zemlja privlači Sunce}$$

$$\underline{bm} = \underline{cM} \quad \frac{b}{M} = \frac{c}{m} = \gamma \quad b = \gamma \cdot M$$

$$F = \gamma \frac{Mm}{r^2} \quad F_1$$



Da li je sila kojom Zemlja privlači jabuku iste prirode kao i sila kojom Zemlja privlači Mjesec?

$$mg = \frac{\gamma M_Z m}{r_Z^2} \longrightarrow \text{Sila kojom Zemlja privlači jabuku}$$

$$g = \frac{\gamma M_Z}{r_Z^2} \quad (\text{F2})$$

$$M_m a_m = \frac{\gamma M_m M_Z}{r_{mZ}^2} \longrightarrow \text{Sila kojom Zemlja djeluje na Mjesec}$$

$$\frac{a_m}{g} = \frac{\frac{1}{r_{mZ}^2}}{\frac{1}{r_Z^2}} = \frac{r_Z^2}{r_{mZ}^2} \quad a_m = g \frac{r_Z^2}{r_{mZ}^2} = 9.81 \cdot \left(\frac{6377}{384100}\right)^2 = 2,72 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$



Iz astronomskih podataka dobijamo:

$$v_m = \frac{2\pi r_{mZ}}{T_m} = \frac{2\pi \cdot 384100 \text{ km}}{27,3 \text{ dana}}$$

$$a_m = \frac{v_m^2}{r_{mZ}} = 2,76 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$$



Dobijene vrijednosti ubrzanja Mjeseca se praktično poklapaju.



Sila koja djeluje između bilo koja dva tijela mase m ima isti oblik kao i sila koja djeluje među planetama.

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

➔ **Univerzalni zakon gravitacije**


γ ➔ **Konstanta gravitacije (eksperimentalno odredio Kevendiš)**

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$g = \frac{\gamma m_z}{r_z^2}$$

$$m_z = \frac{gr_z^2}{\gamma} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$\rho_z = 5,5 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$$



Potencijalna energija u gravitacionom polju. Kosmičke brzine.

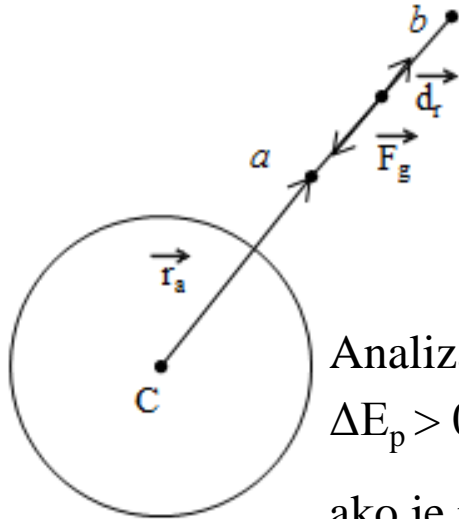
dr Mira Vučeljić
redovni profesor



POTENCIJALNA ENERGIJA U GRAVITACIONOM POLJU



Nađimo rad gravitacione sile pri pomjeranju tijela mase m iz tačke a u tačku b u gravitacionom polju.



$$A = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b F \cdot dr = - \int_{r_a}^{r_b} \gamma \frac{mm_z}{r^2} dr$$

$$A = \gamma mm_z \frac{1}{r} \Big|_{r_a}^{r_b} = \gamma mm_z \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Analiza: ako je $r_b > r_a$ tijelo se udaljava $\longrightarrow A < 0$, $\Delta E_k < 0$, onda je $\Delta E_p > 0$

ako je $r_b < r_a$ tijelo se približava $\longrightarrow A > 0$, $\Delta E_k > 0$, onda je $\Delta E_p < 0$

Zaključujemo: $\Delta E_p = -A = \gamma mm_z \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$

Ako izaberemo referentni nivo u beskonačno dalekoj tački, ($r_b \rightarrow \infty$, $E_p(\infty) = 0$, $r_a \rightarrow r$)

$$\Delta E_p = E_p(\infty) - E_p(r) = \gamma mm_z \cdot \frac{1}{r}$$

$$E_p(r) = - \gamma mm_z \cdot \frac{1}{r} \quad (\text{F1})$$

Izraz F_1 se razlikuje od izraza dobijenog u poglavlju potencijalna energija gravitacionog polja $E_p = mgh$. Pokazaćemo da se izraz F_1 može svesti na oblik mgh ukoliko je visina na kojoj se nalazi tijelo znatno manja od poluprečnika Zemlje.

Potencijalna energija tijela na visini h iznad površine Zemlje:

$$E_p = -\gamma \frac{mm_Z}{R_Z+h} = -\gamma \frac{mm_Z}{R_Z(1+\frac{h}{R_Z})} = -\gamma \frac{mm_Z}{R_Z} \left(1 + \frac{h}{R_Z}\right)^{-1}$$

$$\left(1 + \frac{h}{R_Z}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{h}{R_Z}\right) \text{ ako je } \frac{h}{R_Z} \ll 1$$

$$E_p = -\gamma \frac{mm_Z}{R_Z} \left(1 - \frac{h}{R_Z}\right) = -\gamma \frac{mm_Z R_Z}{R_Z^2} + \gamma \frac{mm_Z h}{R_Z^2} = -mgR_Z + mgh$$

$$g_0 = \gamma \frac{m_Z}{R_Z^2}$$

$$\Delta E_p = E_p(h_2) - E_p(h_1) = mg(h_2 - h_1)$$

g_0 – ubrzanje zemljine teže na površini Zemlje

$$g_0 = \gamma \frac{m_Z}{R_Z^2}$$

g – ubrzanje zemljine teže na visini h

$$g = \gamma \frac{m_Z}{(R_Z + h)^2}$$

$$g = \gamma \frac{m_Z}{R_Z^2 \left(1 + \frac{h}{R_Z}\right)^2}$$

Ako je $\frac{h}{R_Z} \ll 1$, $g = g_0$, za visine h reda veličine R_Z ubrzanje opada sa visinom (pogledati tabelu)

Altitude (km)	a_g (m/s ²)	Altitude Example
0	9.83	Mean Earth surface
8.8	9.80	Mt. Everest
36.6	9.71	Highest manned balloon
400	8.70	Space shuttle orbit
35 700	0.225	Communications satellite

KOSMIČKE BRZINE

I kosmička brzina

$$mv_1^2/R_z = \gamma \frac{mm_z}{R_z^2}$$

$$v_1 = \sqrt{gR_z} = 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

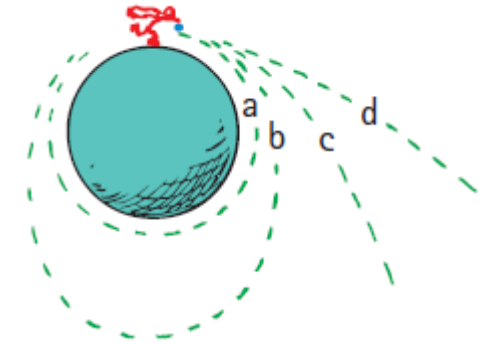
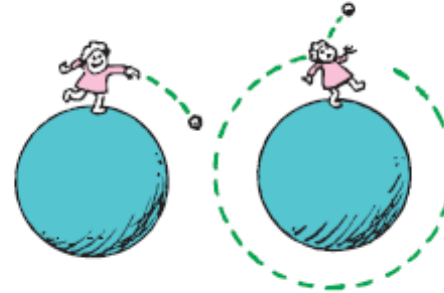


FIGURE 10.17

If the speed of the stone is great enough, the stone may become a satellite.

II kosmička brzina

$$E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mm_z}{R_z} < 0 \longrightarrow \text{tijelo ne napušta Zemljino gravitaciono polje}$$

$$E_k + E_p = \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mm_z}{R_z} = 0 \longrightarrow \text{minimalan uslov za napuštanje gravitacionog polja}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} = \gamma \frac{mm_z}{R_z}$$

$$v_2 = \sqrt{2gR_z} = 11,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$