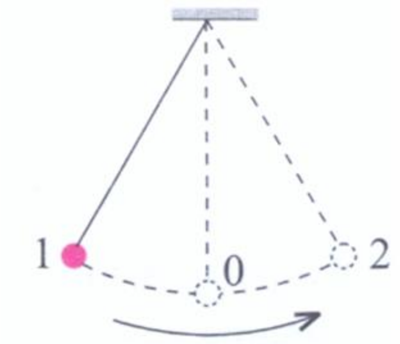
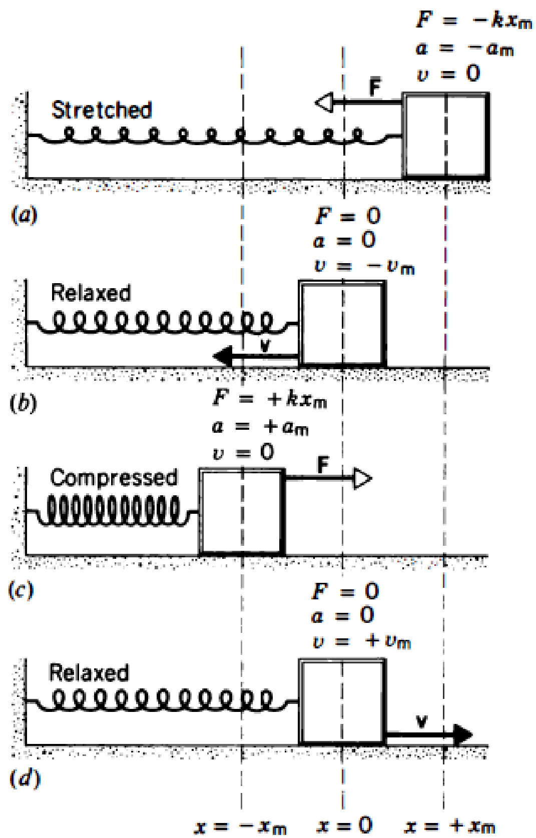
Oscilacije

redovni profesor
dr Mira Vučeljić

OSCILATORNO KRETANJE



Slika 1.



Slika 2.

T – period oscilovanja

$\nu = \frac{1}{T}$ - frekfencija

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ - ugaona brzina

x - elongacija

A - amplituda

Sila koja dovodi do oscilovanja – restituciona sila, uvijek je usmjerena ka ravnotežnom položaju. Poseban oblik: F = - kx dovodi do harmonijskog oscilovanja.

HARMONIJSKE OSCILACIJE

F = - kx

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

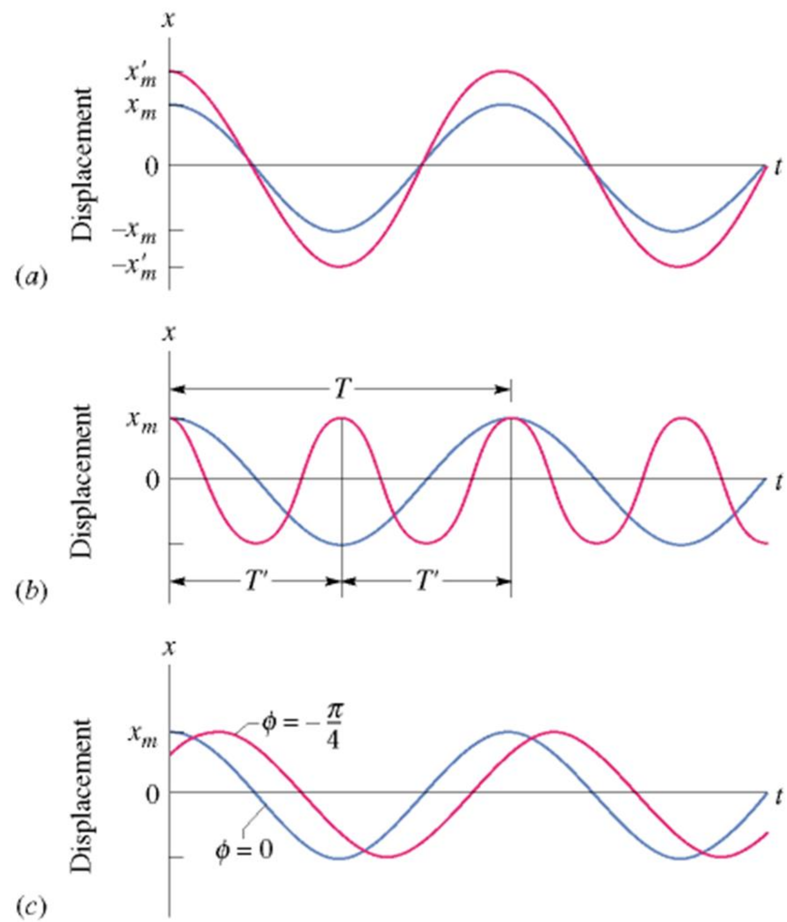
$$\boxed{x = x_m \cos(\omega t + \phi).} \qquad \text{(F1)}$$

Jednačina oscilovanja harmonijskog oscilatora
x – elongacija, udaljenje od ravnotežnog položaja

x_m ili A – maksimalno udaljenje od ravnotežnog položaja

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - sopstvena učestalost oscilatora

ϕ – početna faza



Slika 3.

Nadjimo položaj tijela u trenutku t+2π/w

$$x = x_m \cos[\omega(t + 2\pi/\omega) + \phi]$$
$$= x_m \cos(\omega t + 2\pi + \phi)$$
$$= x_m \cos(\omega t + \phi).$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Period oscilovanja zavisi od svojstava oscilatora dok su amplituda i početna faza određene iz početnih uslova.

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi). \qquad \text{(F1)}$$

Ako je u t = 0 tijelo u položaju amplitude, $x = x_m \rightarrow \phi = 0$ tada jednačina oscilovanja ima oblik:

$$\boxed{x = x_m \cos \omega t}$$

Jednačina oscilovanja ako je tijelo u početnom trenutku bilo u položaju amplitude

Ako je u t = 0 tijelo u ravnotežnom položaju, $x = 0 \rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi) = x_m \cos(\omega t - 90^\circ) \quad \boxed{x = x_m \sin \omega t}$$

Jednačina oscilovanja ako je tijelo u početnom trenutku bilo u ravnotežnom položaju

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi),$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi).$$

Energija kod oscilatornog kretanja

Nađimo rad restitucione sile F = - kx pri pomjeranju tijela od 0 do x.

$$A = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

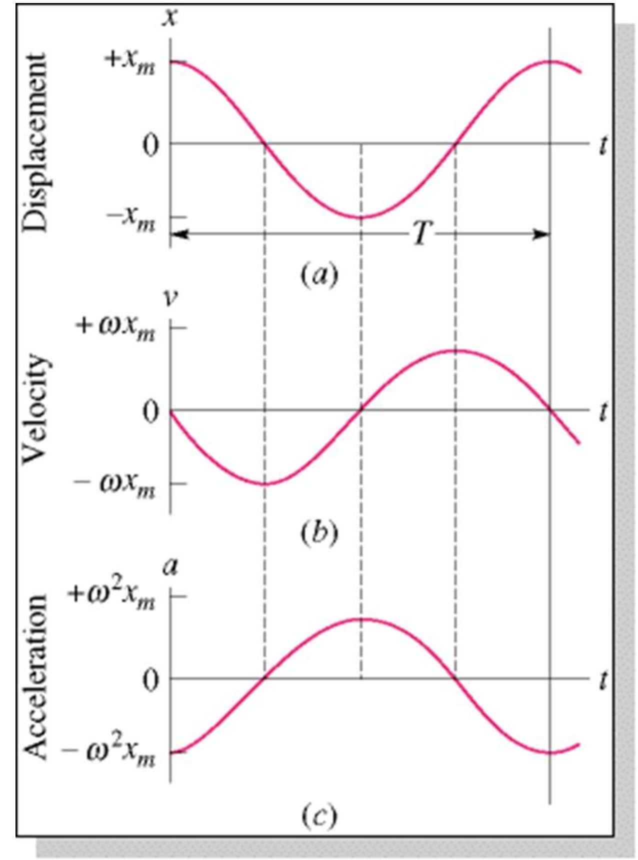
$$A = \Delta U \;\Rightarrow\; U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi).$$

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi).$$

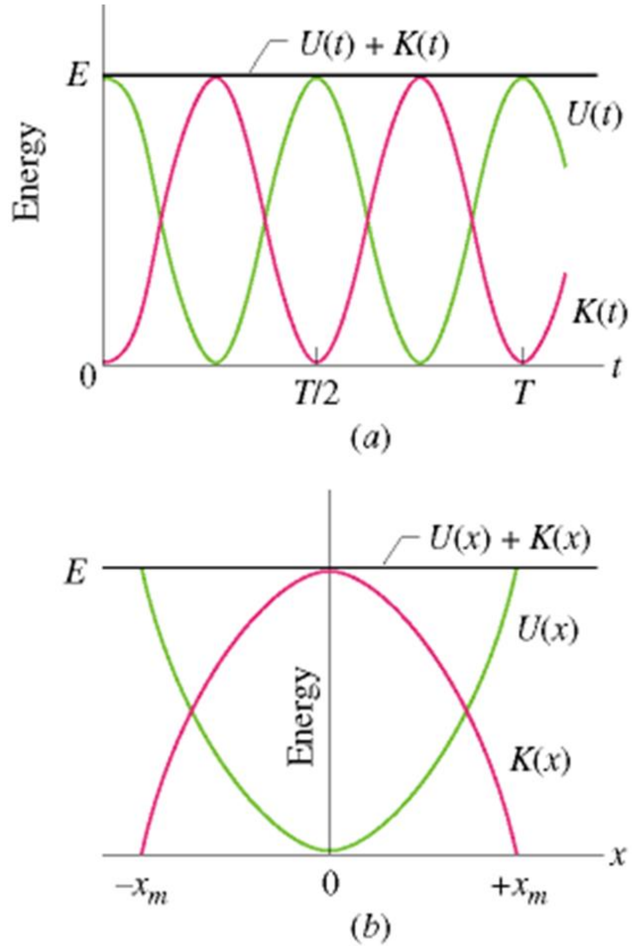
$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \tfrac{1}{2}kx_m^2.$$

Zakon o održanju energije na primjeru oscilatarnog kretanja

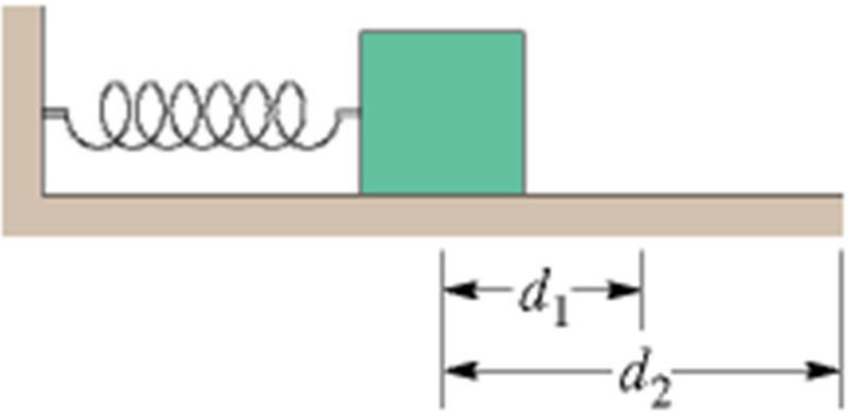


Click on the image to start the simulation

Slika 4.



Slika 5. *K* – roza
U - zelena



Slika 6.

Uporediti periode, frekfenciju, amplitudu, energiju, maksimalnu kinetičku energiju, maksimalnu potencijalnu energiju u oba slučaja

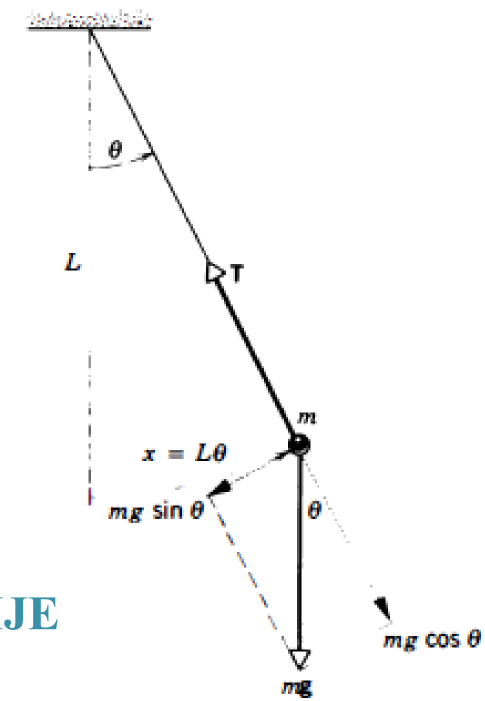
MATEMATIČKO KLATNO

$$\sin\theta \approx \theta,$$

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)x.$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$



Slika 7.

PRIGUŠENE I PRINUDNE OSCILACIJE

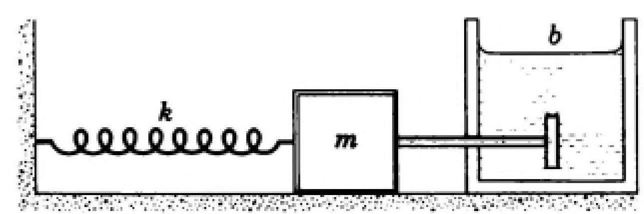
$F_{otpora} = -bv$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

$$x = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi),$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}.$$



Slika 8.

Amplituda opada sa vremenom, ω je manje od sopstvene učestanosti, a T je veće nego u slučaju kada nema otpora.

PRINUDNE OSCILACIJE

F = $F_m \cos \omega'' t$. Prinudna periodična sila

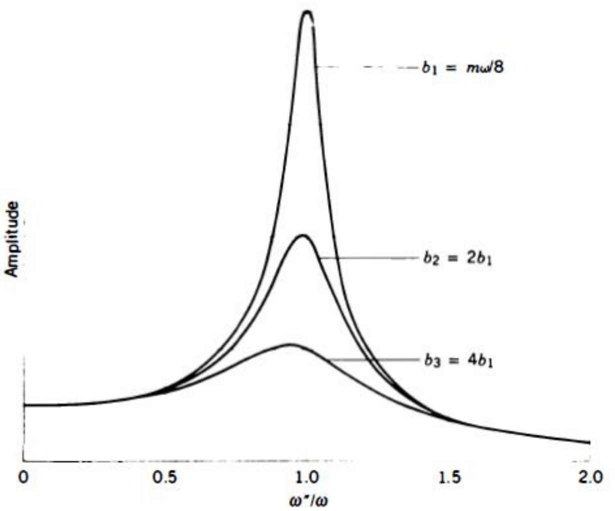
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega'' t.$$

$$x = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi) + \frac{F_m}{G}\sin(\omega'' t - \phi),$$

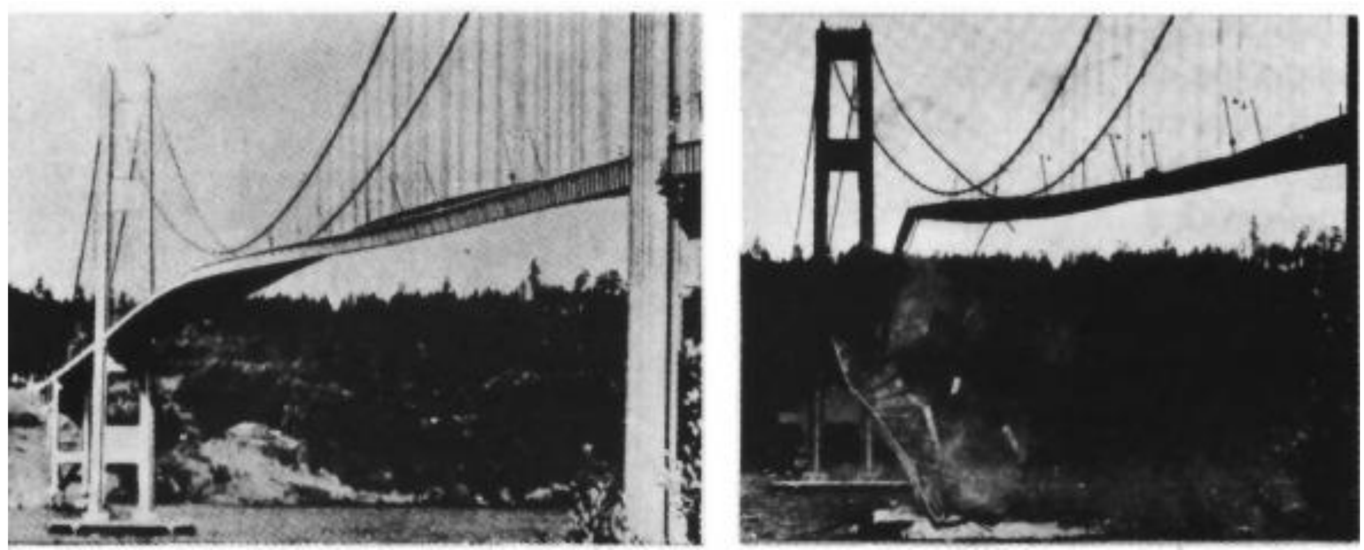
Prvi član teži nuli, posle kratkog vremena tijelo osciluje sa frekf. prinudne sile

$$x = \frac{F_m}{G}\sin(\omega'' t - \phi)$$

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2},$$



Slika 9.



Slika 10.