

### 3. ELEKTROMAGNETIKA

Elektromagnetika je oblast elektrotehnike u kojoj se proučavaju jedinstvene elektromagnetne pojave.

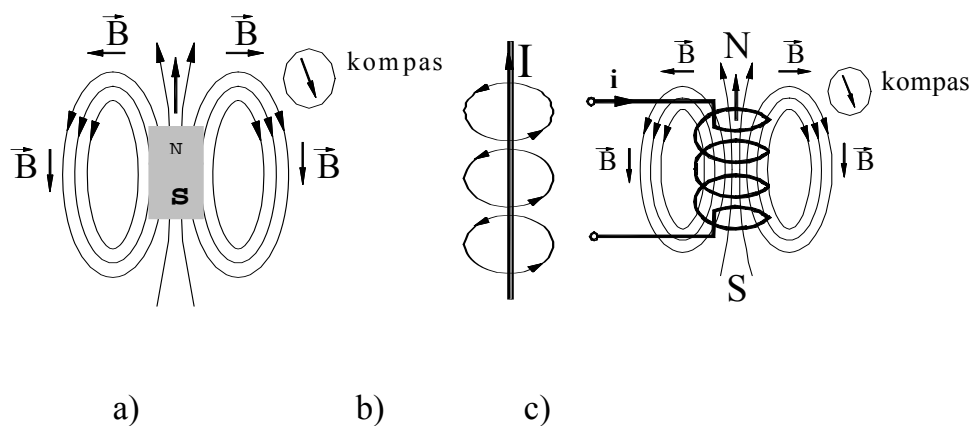
Magnetne pojave, kao i električne, uočene su davno. Međutim, tek početkom XIX vijeka otkrivena je njihova međuzavisnost. Godine 1821. Ersted je otkrio da magnetna igla (kompas) skreće sa pravca sjever-jug, ako se u njoj blizini nalazi provodnik kroz koji protiče električna struja. Djelovanje električne struje nije, dakle, lokalizovano samo u električnom kolu (zagrijavanje provodnika, hemijske reakcije u bateriji), već se to djelovanje osjeća i van provodnika. Kažemo da električna struja u okolnom prostoru stvara **magnetno polje**. Eksperimenti ukazuju da ovo magnetno polje, stvoreno strujom (elektricitetom u pokretu), ima sve osobine magnetnog polja koje potiče od **permanentnog (stalnog) magneta**.

Čuveni naučnici toga doba, među kojima treba izdvojiti Ampera i Faradeja, na osnovu mnogobrojnih eksperimenata, uspijevaju da shvate zakonitosti elektromagnetnih pojava i dolaze do saznanja da **nema električne struje bez magnetnog polja, niti pak, magnetnog polja bez električne struje**. Te dvije pojave su djelovi jedne jedinstvene **elektromagnetne pojave**.

Eksperimentom se lako može uvjeriti da se oko svakog provodnika sa strujom javlja magnetno polje, slično kao kod stalnog magneta (sl. 3.1.).

Nešto je teže dokazati da magnetno polje permanentnog magneta potiče od struje koju sačinjava, kod namagnetisanog predmeta, uređeno kretanje elektrona oko jezgra atoma i oko sopstvenih osa. Razumije se, ove mikro struje usljed kretanja elektrona, postoje u svim materijalima, ali se njihovo djelovanje, makroskopski posmatrano, ne osjeća, jer se magnetna polja, usljed neuređenosti kretanja elektrona, međusobno poništavaju.

Na osnovu eksperimentalnih rezultata i dobijenih rezultata za posebne slučajeve, plejada čuvenih fizičara uspostavlja teoriju elektromagnetizma i opisuje je matematičkim formulama. Kruna tog uspjeha naučnika XIX vijeka je čuvena Maksvelova teorija elektromagnetnih polja.



Slika 3.1 Dvodimenzionalni prikaz magnetnog polja;  
a) Stalnog magneta, b) Ravnog provodnika, c) Solenoida

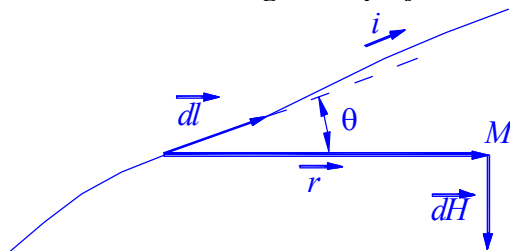
---

## 3.1 Magnetno polje

### 3.1.1 Laplasov zakon

Magnetno polje je vektorsko polje opisano u svakoj tački **vektorom jačine magnetnog polja**  $\vec{H}$ . **Laplasov zakon** (u literaturi se srijeće i pod nazivom Amperov zakon) nam omogućava da, u bilo kojoj tački oko provodnika, odredimo elementarno polje  $d\vec{H}$ , koje potiče od elementa  $d\vec{l}$  električnog kola kroz koje teče struja  $i$ . Ukupna jačina polja  $\vec{H}$  u posmatranoj tački dobija se kao zbir elementarnih polja svih elemenata  $d\vec{l}$  električnih kola koja, učestvuju u stvaranju posmatranog magnetnog polja.

Slika 3.2 Magnetno polje elementa provodnika



Na sl. 3.2 prikazan je dio provodnika kroz koji teče struja  $i$ . Elementarna jačina magnetnog polja u tački  $M$ , koje potiče od djelića provodnika  $d\vec{l}$ , po Laplasovom zakonu je:

$$d\vec{H} = \frac{i}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}) \quad (3.1)$$

Pravac polja je normalan na ravan u kojoj leže element provodnika i posmatrana tačka. Smjer je određen pravilom vektorskog množenja: vektor  $d\vec{l}$  se najkraćim putem zakreće tako da se poklopi sa vektorom položaja  $\vec{r}$  posmatrane tačke  $M$ , a smjer napredovanja desnog zavrtnja, pri takvom kretanju, određuje smjer vektora  $d\vec{H}$  (ovo pravilo se često naziva i pravilo desnog zavrtnja). Treba naglasiti da je smjer vektora  $d\vec{l}$  određen smjerom struje kroz taj provodnik.

Intenzitet vektora jačine polja je:

$$dH = \frac{i}{4\pi r^2} dl \cdot \sin \theta \quad (3.2)$$

gdje je  $\theta$  ugao između vektora  $d\vec{l}$  i  $\vec{r}$ .

Ukupna jačina magnetnog polja u tački  $M$  dobija se sabiranjem polja svih elementarnih dijelova okolnih strujnih kola, koja učestvuju u stvaranju polja:

$$\vec{H} = \int d\vec{H}$$

Pri računanju se obično vektor elementarnog polja razlaže na komponente Dekartovog koordinatnog sistema:

$$d\vec{H} = \vec{i} dH_x + \vec{j} dH_y + \vec{k} dH_z \quad (3.3)$$

Skalarnim integraljenjem se dobiju komponente polja:

$$H_x = \int dH_x$$

$$H_y = \int dH_y$$

$$H_z = \int dH_z$$

a zatim i ukupno polje:

$$\vec{H} = \vec{i}H_x + \vec{j}H_y + \vec{k}H_z \quad (3.4)$$

Iz izraza (3.1) očigledno je da je jedinica za jačinu magnetnog polja u SI sistemu jedinica H (=) A/m (amper po metru).

### 3.1.2 Amperov zakon ukupne struje

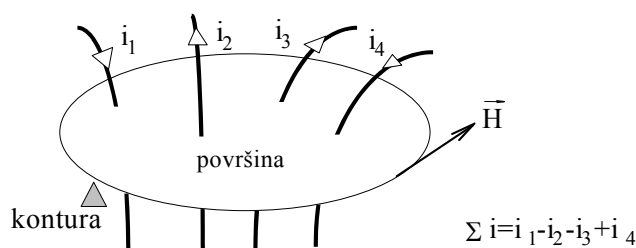
Zakon ukupne struje opisuje značajnu osobinu magnetnog polja, prema kojem je, bez obzira na porijeklo magnetnog polja i okolnu sredinu, u prirodi uvijek zadovoljena sljedeća jednakost:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \vec{J} d\vec{S} \quad (3.5)$$

koja predstavlja matematičku formu Amperovog zakona ukupne struje (ili, kako se ponekad naziva, zakon o cirkulaciji vektora  $\vec{H}$ ). Interpretacija ovog zakona je da je cirkulacija vektora jačine plja  $\vec{H}$  po proizvoljnoj zatvorenoj liniji l jednaka ukupnoj struji koja prolazi kroz površinu koja se oslanja na tu konturu. Za praktičnu primjenu, ipak, značajniji je oblik ovog zakona

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum i \quad (3.6)$$

koji je saglasan sa slikom 3.3.



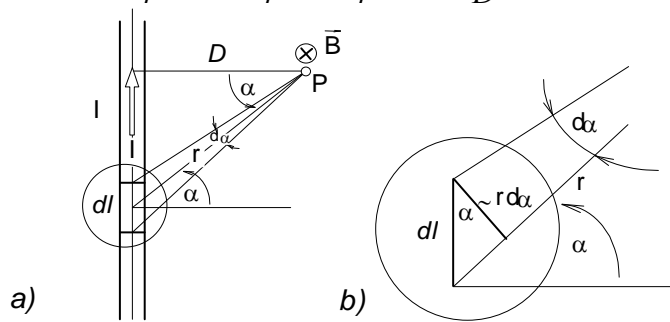
Slika 3.3 Ilustracija primjene Amperovog zakona ukupne struje.

### 3.1.3 Primjeri određivanja magnetnog polja

Polje u okolini dugog pravolinijskog provodnika

Sa slike 3.4a vidi se da je  $r = D / \cos\alpha$ , a sa slike 3.4b može se uočiti približnost  $dl \cos\alpha = r d\alpha$ , pa je

$$\frac{dl \cos \alpha}{r^2} = \frac{rd\alpha}{r^2} = \frac{d\alpha}{r} = \frac{\cos \alpha d\alpha}{D} \quad (3.7)$$



Slika 3.4 Magnetno polje dugog pravolinijskog provodnika sa strujom;  
a) Cjeloviti prikaz; b) Uvećani prikaz jednog segmenta.

Primjenom operacije integraljenja na izraz (3.2) duž provodnika, uvažavajući odnose iz (3.7), dobija se izraz za jačinu polja u tački P

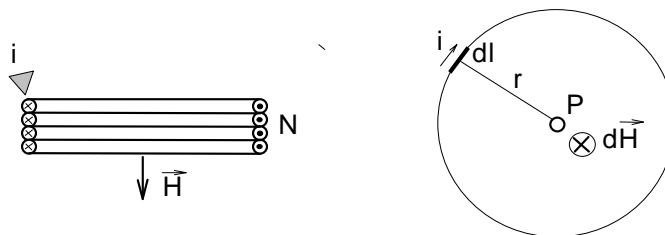
$$H = \frac{I}{4\pi D} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{I}{2\pi D} \quad (3.8)$$

pravca i smjera kako je označeno na slici 3.4a.

Dakle, jačina polja  $H$ , u proizvoljnoj tački P van provodnika, direktno zavisi od jačine struje  $I$  kroz provodnik, a obrnuto je proporcionalna rastojanju tačke P od ose provodnika zanemarljivo malog presjeka u odnosu na njegovu dužinu. Polje je tangentno na koncentrične krugove oko provodnika, a smjer polja pokazuju savijeni prsti desne ruke, ako se palac postavi duž provodnika u smjeru struje.

### Magnetno polje kompaktnog namotaja

Neka je dat kompaktni namotaj, sačinjen od  $N$  navojaka tanke izolovane provodne žice, kružnog oblika poluprečnika  $r$  kroz koji protiče struja  $I$ , kao onaj predstavljen na slici 3.5. Neka se zahtijeva da se odredi jačina polja  $H$  u tački P u centru namotaja.



Slika 3.5 Jačina polja u centru kompaktnog namotaja sa strujom.

Izraz 3.2 primijenjen na jedan navojak kompaktnog namotaja, s obzirom da je  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , ima oblik:

$$H = \int dH = \frac{i}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} dl = \frac{i(2\pi r)}{4\pi r^2} = \frac{i}{2r}$$

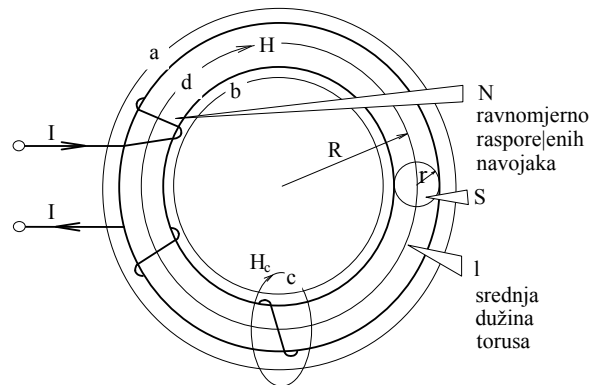
pa je jačina polja koje potiče od  $N$  navojaka:

$$H = N \frac{i}{2r} \quad (3.9)$$

očigledno N puta veća od one koja potiče od jednog navojka.

### Magnetno polje torusa

Za realizaciju jakih magnetnih polja koristi se, obično, namotaj velikog broja N navojaka namotanih na magnetno kolo oblika torusa, kao na slici 3.6.



Slika 3.6 Torusni namotaj.

Primjenom Amperovog zakona ukupne struje na konturu "a", zbog toga što je algebarska suma svih struja koje prodiru kroz površinu koja se oslanja na tu konturu jednaka nuli ( $N_i$  struja ulazi i  $N_i$  struja izlazi), a s obzirom da je  $\oint dl \neq 0$ ,  $H$  mora biti jednako nuli. Na sličan način, konstatuje se i za polje  $H$  po konturi "b" jer, kroz površinu koja se oslanja na tu konturu, ne prodire nikakva struja.

Za konturu "c", zbog toga što kroz površinu koja se oslanja na tu konturu prodire struja  $I$ , može se konstatovati da postoji neko  $H_c$  sa pravcem i smjerom kao na slici. Ovo polje je relativno slabo jer potiče od samo jednog navojka sa strujom  $I$ , a kontura se u cjelini zatvara kroz vazдушnu sredinu.

Primjena Amperovog zakona ukupne struje na konturu "d" daje

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H(2\pi R) = NI,$$

pa je u centru presjeka torusa

$$H = \frac{NI}{2\pi R}. \quad (3.10)$$

## 3.2 Magnetna indukcija

Vidjeli smo da jačina magnetnog polja zavisi od geometrijskih oblika strujnih kola i jačina struje  $I$  koje kroz ta kola protiču i razumije se, od položaja tačke u kojoj se polje posmatra. Međutim, u manifestacijama magnetnog polja, od kojih su najvažnije pojava mehaničke sile na elektricitet u pokretu (**elektromagnetna (mehanička) sila**) i pojava **indukovane elektromotorne sile** pri promjeni magnetnog polja, uviđa se da i sredina, prostor u kome se pojave odvijaju, igra bitnu ulogu. Da bi bili u stanju da dalje izučavamo pojave u vezi sa magnetnim poljem, neophodno je da damo definiciju nove

fizičke veličine koja će voditi računa o sredini oko tačke u kojoj se posmatra magnetno polje. Ta veličina se naziva **magnetna indukcija** i definisana je kao:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3.11)$$

Magnetna indukcija je vektorska veličina, kolinarna sa vektorom jačine magnetnog polja, što znači da su joj pravac i smjer isti kao i pravac i smjer vektora magnetnog polja. Koeficijent srazmjernosti  $\mu$  naziva se **magnetna permeabilnost** sredine (magnetna propustljivost sredine) Uobičajeno je da se magnetna permeabilnost praznog prostora (vakuma) obilježava sa  $\mu_0$ . Prema čuvenoj Maksimalnoj formuli, proizašloj iz teorije elektromagnetnih talasa, brzina prostiranja svjetlosti kroz neku sredinu određena je izrazom:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

a za vakum

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \quad (3.12)$$

gdje je:  $c_0$  - brzina svjetlosti u vakumu ( $c_0 = 3 \cdot 10^8$  m/s)

$\epsilon_0$  - dielektrična konstanta vakuma ( $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$ )

$\mu_0$  - magnetna permeabilnost vakuma ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} / \text{A}^2$ )

Kako je jedinica za magnetno polje amper po metru  $H(=) \text{A/m}$ , a za magnetnu permeabilnost njutn po amperu na kvadrat  $\mu(=) \text{N} / \text{A}^2$ , to će jedinica za magnetnu indukciju biti:

$$B = \mu H(=) \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \cdot \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{Am}} = \text{T}$$

Ova jedinica naziva se **Tesla**, čime je odato priznanje jednom od najvećih svjetskih umova elektrotehnike, našem Nikoli Tesli.

### 3.2.1 Magnetna svojstva materijala

Odnos magnetne permeabilnosti neke sredine i magnetne permeabilnosti vakuma naziva se **relativna magnetna permeabilnost** materijalne sredine:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (3.13)$$

Relativna magnetna permeabilnost je neimenovan broj.

Svi prirodni elementi, izuzev željeza, nikla i kobalta, imaju relativnu magnetnu permeabilnost veoma blisku jedinici. Kod nekih ona je nešto veća od jedinice. Takve materijale nazivamo paramagnetici, a kod nekih je nešto manja od jedinice; takve materijale nazivamo diamagnetici. Pri rješavanju inženjerskih problema za sve ove "nemagnetne" materijale može se uzeti da je

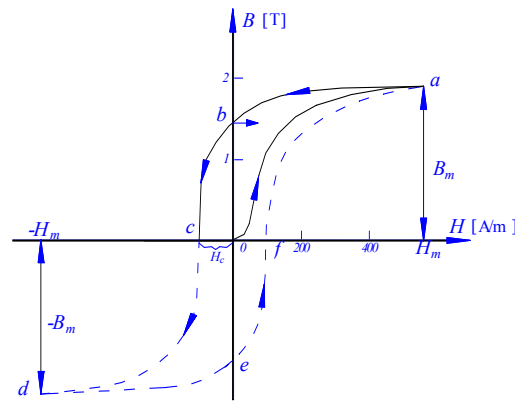
$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} / \text{A}^2$$

Kod željeza, nikla, kobalta i nekih njihovih legura, koji se nazivaju **feromagnetici** (feromagnetni materijali), dolazi do veoma složenih pojava pod dejstvom magnetnog polja. Magnetna permeabilnost kod ovih materijala nije konstantan, već zavisi od jačine magnetnog polja i predistorije ranijeg magnećenja

$$\mu_{(\text{feromagnetika})} = f(H, \text{proslosti})$$

Primjera radi, na sl.3.7 dat je dijagram veze između jačine magnetnog polja  $H$  i magnetne indukcije  $B$  za tipične statičke feromagnetne karakteristike čistog gvožđa.

Do ovog dijagrama dolazimo na bazi mjerenja prema sledećem eksperimentu: Na torus od čistog gvožđa namota se  $N$  namotaja izolovane žice. Ovaj namotaj priključi se na izvor pomoću koga možemo mijenjati jačinu struje  $i$ , i po intenzitetu i po smjeru. Kako je jačina magnetnog polja u torusu  $H=Ni/l$ , očigledno, mijenjajući struju, u određenoj srazmjeri, mijenjamo polje  $H$ , koje nanosimo na apscisi. Na torus se postavi još jedan namotaj sa  $n$  navoja. Ovaj namotaj se poveže sa instrumentom koji nam pokazuje indukciju  $B$  u torusu.



Slika 3.7 Promjena indukcije  $B$  u funkciji jačine polja  $H$

Za gvožđe koje se prvi put magnetiše je pri  $H=0$  i  $B=0$ . Pri povećanju magnetnog polja  $H$  (struje) primjećuje se nelinearno povećanje magnetne indukcije  $B$ , pri čemu se  $B/\mu_0 H$ , dakle, relativna magnetna propustljivost  $\mu_r$ , znatno mijenja. Pri malim vrijednostima polja  $H$  ona je reda veličine nekoliko desetina, zatim nekoliko stotina, a pri jačini polja od oko  $100 \text{ A/m}$  dostiže vrijednost od nekoliko hiljada. Daljnjim povećanjem polja  $H$  se, međutim, ne povećava relativna permeabilnost već naprotiv, znatno smanjuje. Pri veoma jakom polju (reda veličine  $50000 \text{ A/m}$ ), priraštaj indukcije se približno može računati po obrascu  $\Delta B = \mu_0 \Delta H$ , što znači da se gvožđe potpuno zasitilo i svojim feromagnetnim svojstvima više ne doprinosi povećanju magnetne indukcije. Za čisto gvožđe, potpuno zasićenje nastupa pri vrijednosti polja  $H=50000 \text{ A/m}$ , a magnetna indukcija ima tada vrijednost tzv. indukcije zasićenja  $B_m = 2.15 \text{ T}$ . Ne treba izgubiti iz vida da, pri toj vrijednosti polja, daljnji uticaj gvožđa na povećanje indukcije iščezava, ali da je još uvijek ogroman doprinos gvožđa na do tada stvorenu indukciju. Da je jezgro torusa od nemagnetnog materijala pri  $H=50000 \text{ A/m}$  imali bi indukciju od samo:

$$B = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7} 50000 = 0.06 \text{ T} .$$

Očigledno je da je veliki uticaj feromagnetika na vrijednost magnetne indukcije.

Posmatrajmo sada šta se dešava pri smanjenju polja  $H$ . Dakako, opada i magnetna indukcija  $B$ , ali, kako se vidi sa dijagrama, dobijamo novi skup tačaka  $(H,B)$  koje čine novi dio krive a-b. Uočimo da, pri nultoj vrijednosti polja  $H=0$ , još uvijek imamo znatnu vrijednost indukcije  $B_r$ , koju nazivamo **zaostalom** ili **remanentnom magnetnom indukcijom (remanencija)**. Da bi indukcija  $B$  iščezla, potrebno je promijeniti smjer polja  $H$ , što se postiže promjenom smjera struje kroz namotaj. Razmagnećenje se vrši po krivoj b-c. Negativna vrijednost jačine polja, potrebna da se magnetna indukcija svede na nulu, naziva se **koercitivno polje**  $H_c$  (ili koercitivna sila).

Daljnijim povećanjem negativnog polja, vrši se magnećenje suprotnog polariteta, po krivoj c-d. U tački c postiže se zasićenje sa  $-B_m = B_m$  po vrijednosti. Smanjenjem negativnog, a zatim povećanjem pozitivnog polja H, magnećenje će se vršiti po krivi d-e-f-a. Pri svakom narednom mijenjanju polja između  $H_m$  i  $-H_m$  magnetna indukcija će se mijenjati po zatvorenoj krivoj a-b-c-d-e-f-a, koja se naziva **histerezisna petlja** ili prosto **histereza**. Kriva O-a naziva se **kriva prvobitnog magnećenja** ili “**djevičanska kriva**”.

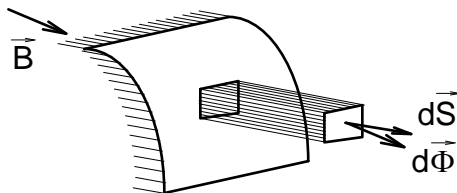
Remanentna indukcija  $B_r$  i koercitivna sila  $H_c$  su veličine koje karakterišu magnetne osobine materijala. Velike vrijednosti  $B_r$  i  $H_c$  su osobine **magnetno “tvrdih”** materijala i obratno, mala remanencija i koercitivna sila, osobine su **magnetno “mekih”** materijala. Površina histerezisne petlje, kako ćemo vidjeti kasnije, karakteriše energiju koju treba ulagati za magnećenje feromagnetnog jezgra torusa, što obično predstavlja tzv. **gubitke u gvožđu**.

Veličina  $\mu_r$  može, kod nekih feromagnetika, dostići i vrijednosti od više hiljada. Pojednostavljeno, može se reći da se u feromagnetiku magnetna indukcija pojačava, čak i više hiljada puta, za istu jačinu polja H, ili da se određena vrijednost magnetne indukcije B u feromagnetiku može postići sa više hiljada puta nižom jačinom magnetnog polja H (ili nižom mps), nego u ostalim supstancijama, ili vakumu i vazduhu.

### 3.3 Magnetni fluks

Generalno, fluks je pojam vezan za površinu i može se definisati u svakom vektorskom polju. Zamislimo u magnetnom polju (vektorsko polje) proizvoljnu površinu S (sl. 3.8), podijeljenu na beskonačno elementarnih površina dS. U svakoj tački ove površine magnetno polje je određeno vektorom magnetne indukcije  $\vec{B}$ , koji je, u opštem slučaju, funkcija položaja  $\vec{B}(x, y, z)$ . Element površine dS, takođe možemo okarakterisati pomoću vektora  $d\vec{S}$ , čiji je intenzitet jednak površini dS, pravac normalan na tu površinu, a smjer od negativne ka pozitivnoj strani površine. Elementarni magnetni fluks dΦ (fi) kroz površinu dS, definisan je kao skalarni proizvod:

$$d\Phi = (\vec{B} \cdot d\vec{S}) = B \cdot dS \cdot \cos(\vec{B}, d\vec{S})$$



Slika 3.8 Elementarni fluks.

Ukupni magnetni fluks posmatrane površine S, dobije se kao:

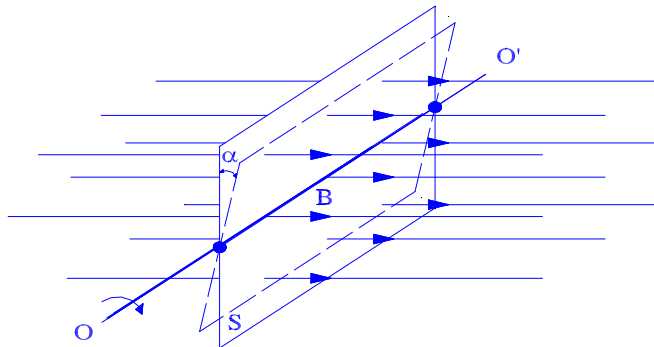
$$\Phi = \int d\Phi = \int \vec{B} d\vec{S} = \int B dS \cos(\vec{B}, d\vec{S}) \quad (3.14)$$



Jedinica za magnetni fluks je veber (1Wb). Iz definicije fluksa je očigledno;  $1\text{Wb} = 1\text{Tm}^2$

Osobina linija magnetnog fluksa, odnosno linija kojima se predstavlja magnetno polje, je da je, u svakoj njihovoj tački, vektor magnetne indukcije  $\vec{B}$  podudaran sa tangentom na tu krivu u posmatranoj tački. Linije magnetnog fluksa se uvijek zatvaraju same u sebe (Slika 3.1). Kod stalnog magneta (Slika 3.1a), linije magnetnog polja zatvaraju se kroz unutrašnjost magneta.

Razmotrimo jedan idealizovani praktični slučaj prikazan na sl. 3.9.

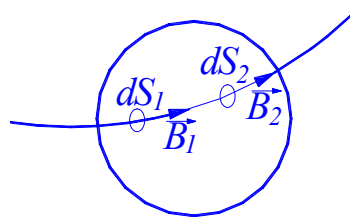


Slika 3.9 Obrtni provodni ram u magnetnom polju

Pravougli provodni ram nalazi se u homogenom magnetnom polju indukcije  $B$ , koja je normalna na površinu rama. Magnetni fluks kroz tu površinu, u ovom posebnom slučaju, dobija se prostim množenjem:  $\Phi = B \cdot S$ . Kada se posmatrani ram okreće ugaonom brzinom  $\omega$ , tada će on u jednom trenutku biti zakrenut za ugao  $\alpha = \omega \cdot t$  (ram u tom trenutku prikazan isprekidanom linijom), pa je magnetni fluks tada:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \alpha = B \cdot S \cdot \cos(\omega t) = \Phi_{\max} \cos(\omega t) \quad (3.15)$$

Zamislamo sada jednu zatvorenu površinu u prostoru, na primjer loptu (sl.3.10), koja se



nalazi u homogenom magnetnom polju.

Slika 3.10 Šuplja kugla u magnetnom polju

Fluks kroz površinu  $dS_1$  biće negativan, (jer je vektor  $\vec{B}$  usmjeren u loptu, a vektor  $d\vec{S}_1$  iz lopte prema vani), a fluks kroz površinu  $dS_2$  biće pozitivan. Prema **zakonu o konzervaciji magnetnog fluksa**; magnetni fluks kroz ma koju zatvorenu površinu mora biti jednak nuli:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (3.16)$$

odnosno, suma svih flukseva koji ulaze u proizvoljnu zatvorenu površinu jednaka sumi svih flukseva koji iz te površine izlaze.

Ovo znači da magnetne linije sila nemaju ni izvora ni ponora. Podsjetimo se da je, prema Gausovoj teoremi, električni fluks zatvorene površine jednak zbiru količina elektricneta unutar te površine. Ovo je bilo tako jer je pozitivno naelektrisanje izvor linija električnog polja, a negativno njihov ponor. U prirodi nema odgovarajućih čestica sa takvim magnetnim osobinama, pa zaključujemo da se magnetne linije sila zatvaraju u sebe.

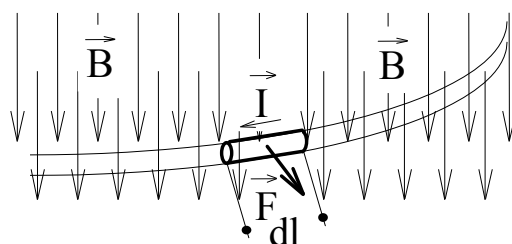
### 3.4 Elektromagnetna (mehanička) sila

Nije teško eksperimentalno utvrditi da *na provodnik kroz koji teče struja i koji se nalazi u stranom magnetnom polju djeluje mehanička sila* koja se naziva *elektromagnetna sila*. To je sila koja pokreće rotore svih električnih motora, sila koja pokreće kazaljke mnogih mjernih instrumenata, i sila koja se koristi kod mnogih drugih čovjeku korisnih uređaja.

U opštem slučaju, provodnik ima proizvoljan oblik, a vektor magnetne indukcije je funkcija položaja  $\vec{B} = f(\vec{r})$  (polje nije homogeno). U takvom slučaju sila koja djeluje na provodnik može se odrediti sabiranjem elementarnih sila koje djeluju na provodnik:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (3.17)$$

Smjer vektora  $d\vec{l}$  određen je smjerom struje kroz provodnik.



Slika 3.11 Elektromehaničko djelovanje silom na element provodnika sa strujom.

Po poznatim zakonima mehanike, razlaganjem ove sile na komponente Dekartovog koordinatnog sistema i kasnijim integraljenjem, može se dobiti rezultatna sila i moment koji djeluje na električno kolo, posmatrano kao čvrsto tijelo.

U našim razmatranjima, problem možemo svesti na slučaj sa provodnicima pravilne geometrije koji se nalaze u homogenom magnetnom polju normalnom na provodnik, tada je intenzitet sile:

$$F = I \cdot l \cdot B$$

gdje je:  $F$  -elektromagnetna (mehanička) sila na provodnik, N (njutn)

$I$  -jačina električne struje kroz provodnik, A (amper);

$l$  -aktivna dužina provodnika, m (metar);

$B$  - magnetna indukcija stranog magnetnog polja, T (tesla);

Smjer sile određuje se pravilom desnog zavrtnja.

### 3.5 Elektromagnetna indukcija

Godine 1831., Faradej je eksperimentalno otkrio pojavu elektromagnetne indukcije. To je pojava na bazi koje se u svim električnim generatorima mehanička energija pretvara u električnu, na osnovu koje su izrađeni mnogi mjerni instrumenti i drugi čovjeku korisni uređaji. Formulacija Faradejevog zakona: ***U električno provodnoj konturi će se indukovati elektromotorna sila i kao posljedica te ems-e u zatvorenom kolu će se pojaviti struja, ako se, iz bilo kog razloga, mijenja magnetni fluks kroz tu konturu (kolo).***

Do promjene fluksa može doći bilo da se magnetno polje mijenja u vremenu; npr. ako se stalni magnet pomjera u odnosu na konturu, ili npr. ako kroz neki provodnik, koji se nalazi u blizini konture, protiče promjenljiva struja, bilo da se električno kolo (kontura) kreće u stalnom magnetnom polju, ili da se i polje mijenja i kontura kreće; bitno je da se mijenja fluks površine kola.

Elektromagnetna indukcija manifestuje se tako, što promjena magnetnog fluksa kroz proizvoljnu provodnu konturu, izaziva u njoj pojavu elektromotorne sile. Faradejev zakon elektromagnetne indukcije iskazuje se vrlo jednostavnim integralnim obrascem:

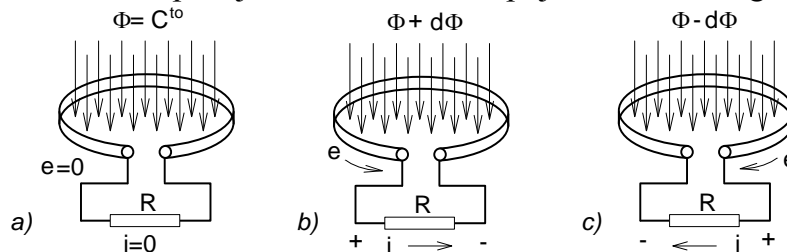
$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.18)$$

gdje je:  $e$  - zbir indukovanih elektromotornih sila duž kola, V;

$\Phi$  - magnetni fluks kola, Wb;

$t$  - vrijeme, s;

Na slici 3.12 predstavljena je jedna provodna kontura koja se zatvara preko nekog otpornika. Na ovom primjeru ilustriraćemo pojavu elektromagnetne indukcije.



Slika 3.12 Provodna kontura u magnetnom polju: a) Stalnom; b) Koje se povećava; c) Koje se smanjuje.

Znak "-" u izrazu (3.18) uveden je saglasno **Lencovom pravilu**; Indukovana struja  $i$  u konturi (Slika 3.12 b i c) je takvog smjera da se svojim magnetnim poljem suprotstavlja promjeni fluksa kroz konturu, tj. u konturi se javlja struja koja teži da suzbije uzrok svog nastanka. Posmatrajmo pažljivo sliku 3.12b. EMS-a  $e$  je posljedica porasta fluksa kroz konturu. Kada je kontura zatvorena (u našem slučaju preko otpornika  $R$ ) pod uticajem ems- $e$   $e$  kroz otpornik  $i$  konturu će teći indukovana struja  $i$ . Indukovana struja  $i$  stvara svoje magnetno polje. Smjer tog polja najlakše određujemo **pravilom desne ruke**: palac desne ruke postavi se uz provodnik u smjeru struje  $i$ , savijeni prsti oko provodnika pokazuju smjer magnetnog polja oko provodnika. Zaista, ako slijedimo ovo uputstvo, uočavamo da je unutar konture polje indukovane struje suprotno polju  $\Phi$ , zbog čijeg je porasta došlo do indukovanja ems- $e$   $e$ . Analogno razmatranje se odnosi i na sl.3.12c.

Zašto smjer indukovane struje mora biti baš takav kako kaže Lencovo pravilo? Lencovo pravilo je proisteklo iz opšteg zakona o održanju energije. Zadržimo još malo

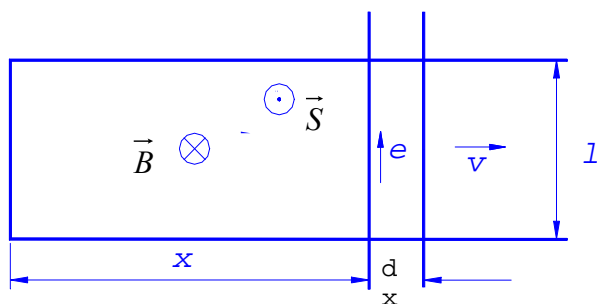
našu pažnju na sl.3.12b. Neka je do porasta fluksa  $\Phi + d\Phi$  došlo zbog toga što smo stalni magnet primakli konturi. Uloženi rad u pomjeranje magneta, pretvara se u toplotu u otporniku  $Ri^2$  (gdje je  $i$  indukovana struja). Da je indukovana struja suprotnog smjera od onog na slici, ona bi svojim poljem još više povećala porast fluksa, to bi izazvalo jaču struju, ona opet jače polje,... igra se ponavlja. To bi značilo da, sa malim uloženim inicijalnim radom u pomjeranje magneta, dobijemo (beskonačno) veliku toplotu u otporniku. To u prirodi nije moguće.

Kada se kontura sastoji od  $N$  redno vezanih navojaka, kroz koje se zatvara isti fluks, onda će se u takvom namotaju indukovati ems

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.19)$$

gdje je  $\Psi$  tzv. **obuhvaćeni fluks** ( $\Psi=N\Phi$ ).

Razmotrimo sada slučaj indukovanja **elektromotorne sile u provodniku koji se kreće u magnetnom polju**. Posmatrajmo prvo slučaj translatornog kretanja pravolinijskog provodnika u homogenom magnetnom polju, pri čemu su provodnik, vektor brzine njegovog kretanja i linije magnetnog polja (vektor indukcije), međusobno normalni, kao na sl.3.13.



Slika 3.13 Pokretni provodnik u magnetnom polju

Na sl.3.13 prikazan je nepokretni dio kola po kome klizi pokretni pravolinijski provodnik. Magnetno polje  $\vec{B}$  je normalno na ravan u kojoj leži električno kolo (usmjereno u ravan crteža). Strelicom je proizvoljno usvojen pozitivan smjer računanja elektromotorne sile  $e$ . Prema ovako usvojenom smjeru  $e$ , pozitivna strana površine okrenuta je prema gledaocu. (Konvencionalno je usvojeno da se pozitivnom stranom površine smatra ona strana koja ostaje sa strane lijeve ruke kada se ide po kolu u smjeru u kome se računa elektromotorna sila). Dakle, vektor zatvorene površine  $\vec{S}$  usmjeren je prema gledaocu, a kako je vektor magnetne indukcije  $\vec{B}$  usmjeren suprotno, fluks je:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\vec{B}, \vec{S}) = B \cdot S \cdot \cos(180^\circ) = -B \cdot S,$$

dakle, negativan. U toku priraštaja vremena  $dt$  fluks kola će porasti za:

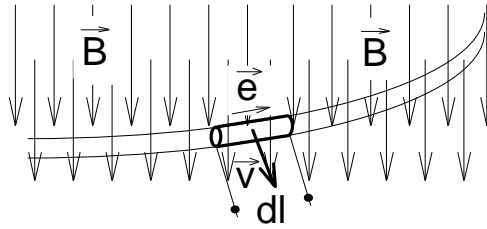
$$d\Phi = -B \cdot dS = -B \cdot l \cdot dx,$$

pa će, prema Faradejevom zakonu elektromagnetne indukcije, indukovana elektromotorna sila biti:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = B \cdot l \cdot \frac{dx}{dt} = B \cdot l \cdot v. \quad (3.20)$$

Logično je zaključiti da je sjedište te indukovane elektromotorne sile baš u dijelu kola koji se kreće, dakle, na pravolinijskom provodniku dužine (aktivne)  $l$ .

Generalno, međusobni položaj vektora  $\vec{B}, \vec{l}$  i  $\vec{v}$  može biti proizvoljan (sl.3.14)



Slika 3.14 Ems indukovana u elementu provodnika koji se kreće u magnetnom polju.

U tom slučaju potrebno je naći elektromotorne sile u svim elementima kola i njihovim sabiranjem naći indukovanu ems-u kola. EMS-a indukovana duž elementa provodnika  $dl$  data je mješovitim proizvodom:

$$de = d\vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{v}) = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}, \quad (3.21)$$

u kojem su:  $e$  - ems indukovana u elementu provodnika,  $dl$  - dužina elementa provodnika i  $v$  - brzina kretanja provodnika u stalnom magnetnom polju indukcije  $B$ .

Dakle, do indukovanja ems dolazi, ne samo pri promjeni fluksa kroz zatvorenu provodnu konturu, već i kad je fluks stalan a provodnik se u njemu kreće. Izraz (3.21) može se izvesti i na osnovu izraza (3.18) kad se, umjesto površine kroz koju se zatvara promjenljivo magnetno polje, uzme površina  $dS$  koju "prebriše" element provodnika  $dl$  krećući se u stalnom magnetnom polju brzinom  $v$  za vrijeme  $dt$  ( $ds=dl(vdt)$ ).

Elektromotorna sila je skalarna veličina. Po definiciji ona predstavlja brzinu kojom posmatrano kolo prima energiju spolja. Jednačina (3.21) opisuje, dakle, dobijanje električne energije na račun spoljašnje mehaničke energije. Za kretanje provodnika moramo uložiti određeni mehanički rad spoljašnjih sila, koji se vrši nasuprot djelovanja elektromagnetnih sila.

Zadržimo još malo našu pažnju na prostom, ali veoma važnom, Faradejevom zakonu elektromagnetne indukcije, opisanom jednačinom  $e = -d\Phi / dt$ . Predznak minus u ovoj jednačini, kako smo rekli, posljedica je Lencovog pravila (zakona). Kada ovaj prirodni zakon ne bi bio zadovoljen, tada bi (na sl.3.13) struja tekla u smjeru suprotnom od naznačenog smjera za  $e$ , tada bi na pokretni provodnik djelovala elektromagnetna sila  $\vec{F} = i(\vec{l} \times \vec{B})$  u smjeru koji se poklapa sa smjerom  $\vec{v}$  tj. u smjeru spoljne mehaničke sile, a to bi dovelo do stalnog porasta ems-e i struje u kolu, tj. do beskonačnog porasta snage odnosno energije, što, naravno, u prirodi nije moguće.

### 3.6 Samoindukcija i međusobna indukcija

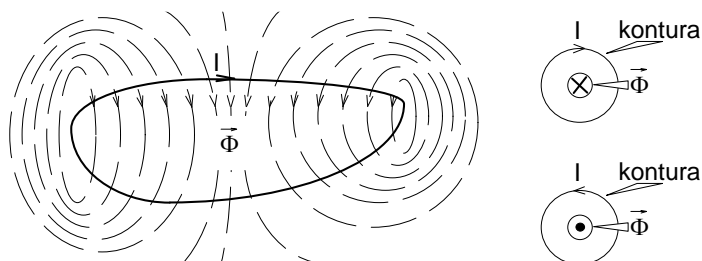
Naglasimo još jednom da svaka provodna kontura kroz koju protiče struja stvara magnetno polje, koje se zatvara i kroz površinu koja naliježe na tu konturu (Slika 3.15). Magnetni fluks kola, koji potiče od struje tog kola, nazivamo **sopstveni fluks**. Vrijednost magnetnog fluksa kroz konturu zavisi od konfiguracije konture, i mnogo je veća ako je kontura izvedena u obliku kalema sa većim brojem navojaka (Slika 3.16). Takvi kalemi nalaze široku primjenu kod električnih mašina i mnogih drugih elektrotehničkih uređaja, kod kojih se zahtijevaju jača magnetna polja.

Ako u blizini kalema (konture) nema feromagnetnih materijala (koji unose nelinearnost), tada je sopstveni magnetni fluks  $\Phi$  kola, u bilo kojem trenutku vremena,

proporcionalan struji  $i$  koja protiče kroz kolo, jer je jačina magnetnog polja  $H$  srazmjerna struji (Laplasov zakon), magnetna indukcija  $B$  uzima u obzir sredinu  $B = \mu \cdot H$ , a fluks kroz konturu je  $\Phi = B \cdot S$ . Očigledno, da je sopstveni fluks srazmjeran struji koja ga je izazvala, pa možemo pisati:

$$\Phi = L \cdot i \quad (3.22)$$

U jednačini (3.22)  $L$  je **koeficijent samoindukcije** (ili **sopstvena induktivnost kola**), koji zavisi od geometrije kola i magnetne permeabilnosti sredine u kojoj se kolo nalazi. Za kolo u kome se opaža pojava samoindukcije kaže se da je **induktivno kolo**.



Slika 3.15 Sopstveno magnetno polje provodne konture sa strujom.

Svaka promjena struje  $i$  u kolu povlači za sobom promjenu magnetnog fluksa. To izaziva u kolu pojavu emf-a. Koristeći Faradejev zakon elektromagnetne indukcije za **elektromotornu silu samoindukcije** dobijamo:

$$e_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (3.23)$$

Jedinica za induktivitet  $L$  je jedan henri (1H). Na osnovu (3.23) važi:

$$L (=) \text{H} = \text{Wb/s} = \text{Vs/A}.$$

Za kolo ćemo kazati da ima koeficijent samoindukcije od jednog henrija, ako se pri promjeni struje brzinom od jednog ampera u sekundi u kolu indukuje emf-a samoindukcije od jednog volta.

Kada je strujno kolo (kontura) formirano u obliku kalema, kao na sl. 3.16, tada je emf-a samoindukcije:

$$e_L = -N \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (3.24)$$

Vrijednost  $\Psi = N\Phi$  naziva se ulančeni (obuhvaćeni) fluks.

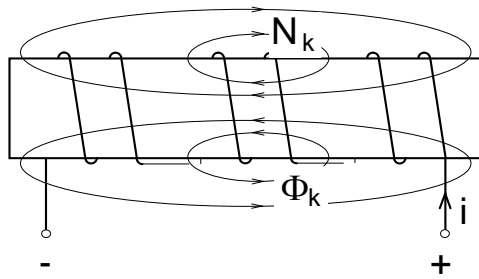
Kada su pojedine grupe navojaka obuhvaćene različitim magnetnim fluksevima (Slika 3.16), tada je ulančeni fluks jednak

$$\Psi = \sum \Phi_k N_k, \quad (3.25)$$

gdje je  $N_k$  broj navojaka kalema obuhvaćen fluksom  $\Phi_k$ .

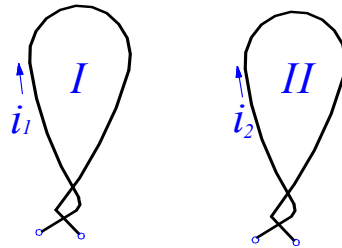
Ulančeni fluks uvijek se može izraziti kao  $\Psi = Li$ , jer je:

$$\Psi = N\Phi = NBS = N\mu HS = N\mu \frac{Ni}{l} S = Li$$



Slika 3.16 Magnetno polje kalema.

Izrazi (3.23 odnosno 3.24) govore o tome da je, pri povećavanju struje, kada je ( $di/dt > 0$ ), ems samoindukcije  $e_L$  usmjerena suprotno struji  $i$ , a da je, pri smanjivanju struje kada je  $di/dt < 0$ , ova ems podudarna sa smjerom struje. Dakle,  $e_L$  uvijek djeluje suprotno promjeni struje, koja joj je uzročnik, pa se naziva **kontraelektromotorna sila (kems-a)**. To djelovanje je utoliko jače ukoliko je  $L$  veće. Slijedi da sopstvena induktivnost  $L$  karakteriše sposobnost kola da **sprečava promjenu električne struje**, koja se zatvara kroz to kolo.



Posmatrajmo sada dva kola sl. 3.17

Slika 3.17 Induktivno spregnuta kola

Neka kroz kolo I protiče promjenljiva struja  $i_1$ , a kroz kolo II, koje je postavljeno dovoljno blizu kolu I, protiče promjenljiva struja  $i_2$ . Fluks prvog kola zavisi od sopstvene struje  $i_1$ , ali takođe i od struje drugog kola  $i_2$ . Magnetna indukcija čiji fluks posmatramo, potiče od obje struje. Isto tako, fluks kroz kolo II potiče od struje  $i_2$  tog kola, ali i od struje  $i_1$  prvog kola. Prema tome, možemo pisati:

$$\Phi_I = \Phi_{11} + \Phi_{21} = L_1 i_1 + M_{21} i_2 \quad (3.26)$$

$$\Phi_{II} = \Phi_{22} + \Phi_{12} = L_2 i_2 + M_{12} i_1$$

U jednačinama (3.26)  $L_1$  i  $L_2$  su već ranije definisani koeficijenti samoindukcije, a  $M_{21}$  i  $M_{12}$  su **koeficijenti međusobne indukcije** ili **međusobne induktivnosti** ova dva kola.  $\Phi_{11}$  i  $\Phi_{22}$  su sopstveni fluksevi, a  $\Phi_{21}$  i  $\Phi_{12}$  su **međusobni fluksevi** ova dva kola a  $\Phi_I$  i  $\Phi_{II}$  su **ukupni fluksevi** kola I i kola II, respektivno.

Pri promjeni strija  $i_1$  i  $i_2$  u kolima će biti indukovane elektromotorne sile:

$$e_I = e_{sI} + e_{MI} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{21} \frac{di_2}{dt} \quad (3.27)$$

$$e_{II} = e_{sII} + e_{MII} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

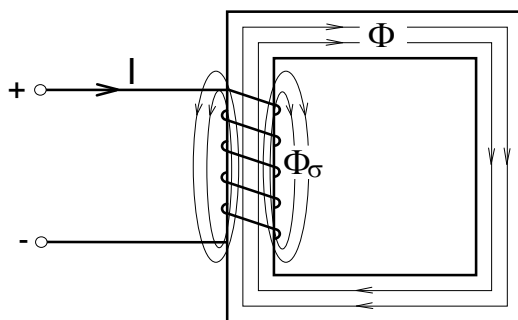
EMS-e  $e_M$  nazivaju se *ems-e međusobne indukcije* (uzajamne indukcije). Pri nepromjenljivim magnetnim svojstvima sredine ( $\mu = \text{const.}$ ), uvijek je  $M_{21} = M_{12} = M$ . Koeficijenti međusobne indukcije mjere se, takođe, u henrijima.

Kola, u kojima se pojavljuje međusobna indukcija, nazivaju se *induktivno spregnuta (vezana) kola*. Za dva kola ćemo kazati da su magnetno spregnuta koeficijentom međusobne indukcije od jednog henrija, ako se pri promjeni struje u jednom kolu brzinom od jednog ampera u sekundi, u drugom kolu indukuje elektromotorna sila međusobne indukcije od jednog volta.

### 3.7 Magnetna kola

Zahvaljujući činjenici da je električna provodnost provodnih materijala mnogo puta veća od električne provodnosti izolacionih materijala, bilo je moguće uvesti pojam električnog kola, koje obezbjeđuje podužno kretanje elektriciteta duž provodnika kola. Na analogan način možemo govoriti o *magnetnom kolu*, zahvaljujući činjenici da je magnetna provodnost (permeabilnost) feromagnetnih materijala mnogo veća od magnetne provodnosti ostalih sredina [ $\mu_{Fe} = (10^2 - 10^4)\mu_0$ ]. Dakle, moguće je formirati magnetno kolo od feromagnetnih materijala, koje će obezbijediti da se kroz njega zatvara većina linija magnetnog polja. I zaista, većina električnih uređaja i aparata sadrže *gvozdenu jezgra*, kao što su jezgra transformatora, jaram i kotva elektromagneta, statorski i rotorski limovi električnih mašina, koji obezbjeđuju *podužno "kretanje" magnetnog fluksa*. Aproksimacija "podužnog kretanja" ovdje nije tako dobra kao kod električnih kola (jer ni permeabilnost feromagnetika u odnosu na ostale sredine nije toliko veća, koliko je veća provodnost bakra u odnosu na izolatore). Ipak, inženjerski posmatrano, moguće je, a i korisno je, uvesti pojam magnetnog kola kroz koje se magnetni fluks podužno kreće i, analogno električnom kolu, usvojiti pojmove skoncentrisanih parametara i izraziti zakone magnetnog kola, koji su po formi slični zakonima električnog kola.

Prethodno je razmatrano magnetno kolo posebne (torusne) izvedbe kod kojeg su navojci bili raspoređeni ravnomjerno duž obima torusa. U praksi se, ipak, najčešće srijeću magnetna kola različite geometrije na koja je namotan jedan ili više namotaja, pri čemu njihovi navojci nisu ravnomjerno raspoređeni duž magnetnog kola već su skoncentrisani na ograničenim njegovim djelovima. Jedan primjer takvog magnetnog kola prikazan je na slici 3.18.



Slika 3.18 Magnetno kolo sa skoncentrisanim namotajem.



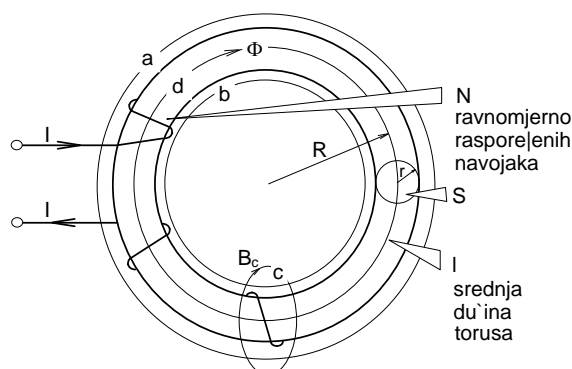
Sa slike 3.18 prikazan je i jedan dio fluksa  $\Phi_\sigma$ , koji potiče od skoncentrisanog namotaja, a ne zatvara se kroz magnetno kolo već kroz vazдушnu sredinu. Taj dio fluksa naziva se *rasuti fluks* (fluks rasipanja) i obično se teži da se on svede na najmanju moguću mjeru, jer samo u rijetkim slučajevima njegovo prisustvo može biti od koristi.

### 3.7.1 Omov zakon za magnetna kola

Primjer torusnog namotaja (sl.3.19) može se iskoristiti da se ukaže na jedan praktični pristup analizi prostih magnetnih kola, koji je analogan pristupu analizi električnih kola.

Uz pretpostavku da je  $r \ll R$ , može se smatrati da je  $B$  jednako u svim tačkama presjeka  $S$  torusnog jezgra (homogeno polje). Smatramo da se praktično sav fluks od namotaja na torusu zatvara kroz jezgro (feromagnetno), pa se magnetni fluks kroz torusno jezgro presjeka  $S$  može izračunati pomoću izraza

$$\Phi = BS = \mu \frac{NI}{2\pi R} (r^2 \pi). \quad (3.28)$$



sl. 3.19 Torusni namotaj

Ako se  $2\pi R$  označi kao srednja dužina torusnog jezgra  $l$ , a  $NI$  kao  $M$ , tada se izraz (3.28) može pisati u obliku:

$$\Phi = \mu \frac{S}{l} M = \frac{M}{\frac{l}{\mu S}} = \frac{M}{R_m} \quad (3.29)$$

gdje je:

$$R_m = \frac{l}{\mu S} \quad (3.30)$$

izraz analogan izrazu za električnu otpornost provodnika dužine  $l$  i poprečnog presjeka  $S$  izrađenog od materijala specifične provodnosti  $\gamma$   $\left( R = \frac{l}{\gamma \cdot S} \right)$ , i naziva se **magnetna otpornost** (magnetni otpor).

$M=NI$  se obično naziva **magnetopobudna sila (MPS)** (ponekad se sreće i izraz magnetomotorna sila), čija je jedinica A (amper), ali da bi se naglasilo da se radi o MPS-i, ona se izražava u amper-navojcima. Istu MPS-u će izazvati jedan navojak sa strujom od 100A ili 100 navojaka sa strujom od 1A.

Pažljivim upoređenjem izraza (3.29) i izraza za Omov zakon  $I=E/R$ , može se zapaziti potpuna analogija, s tim što je magnetni fluks  $\Phi$  analogan sa strujom  $I$ , a

magnetopobudna sila  $M$  analogna sa elektromotornom silom  $E$ , pa, dakle, uz takve analogije, izraz (3.29) predstavlja **Omov zakon za magnetno kolo**.

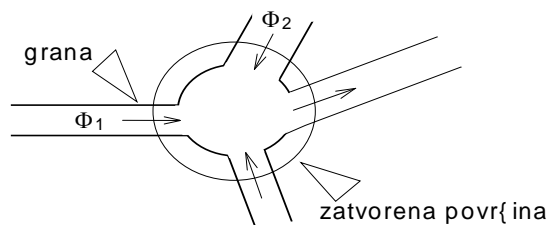
Magnetno kolo može biti sastavljeno iz više djelova različitih dužina, od različitih materijala sa različitim poprečnim presjecima jezgra i različitim brojem namotaja sa različitim strujama. Omov zakon za magnetno kolo važi i uvom slučaju, s tim što se magnetopobudna sila  $M$  i magnetska otpornost kola  $R_m$  tada računaju:

$$M = \sum_{k=1}^n N_k I_k \quad R_m = \sum \frac{l_k}{\mu_k S_k}.$$

Napomenemo da je pretpostavka o homogenosti magnetnog polja po njegovom presjeku, za najveći broj praktičnih primjena, korektna.

### 3.7.2 Kirhofovi zakoni za magnetna kola

Primjenimo zakon o konzervaciji magnetnog fluksa na magnetno kolo koje sadrži čvor u kome se spajaju grane magnetnog kola (Slika 3.20)



Slika 3.20 Čvor magnetnog kola.

S obzirom na prethodno razmatranje, a saglasno slici 3.20, Prvi Kirhofov zakon za magnetna kola ima oblik

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i = 0 \quad (3.31)$$

U dosadašnjem razmatranju već su uočene analogije među osnovnim veličinama koje karakterišu magnetna i električna kola (MPS-a  $M$  analogno sa ems  $E$ , magnetna otpornost  $R_m$  analogna sa električnom otpornošću  $R$  i magnetni fluks  $\Phi$  analogan sa strujom  $I$ ) pa, s tim u vezi, dobijeni izraz (3.31) je **Prvi Kirhofov zakon za magnetna kola**. Na sličan način može se dobiti izraz za Drugi Kirhofov zakon za magnetna kola polazeći od izraza za Amperov zakon ukupne struje.

Ako se pretpostavi složeno magnetno kolo proizvoljne konfiguracije, u čijoj svakoj grani djeluju mps  $N_i I_i$ , pa odabere proizvoljna kontura koja sadrži  $i=1, \dots, n$  grana, onda se, uz pretpostavku da su  $\vec{H}$  i  $d\vec{l}$  kolinearni, primjena Amperovog zakona ukupne struje svodi na izraz

$$\sum_{i=1}^n H_i l_i = \sum_{i=1}^n N_i I_i, \quad (3.32)$$

gdje je  $l_i$  dužina  $i$ -te grane. Valja napomenuti da se u izrazu (3.32) radi o olgebarskom sabiranju vodeći računa o pretpostavljenim smjerovima  $H_i$  i  $N_i I_i$  kako je to rađeno kad su se analizirala električna kola stalnih struja.

Kada se u proizvoljnim sabircima lijeve strane izraza (3.32) izraze  $H_i$  kao  $B_i/\mu_i$ , gdje je  $B_i$  magnetna indukcija, a  $\mu_i$  permeabilnost odgovarajućeg jezgra grane kola, a

zatim kada se takvi sabirci pomnože i podijele sa  $S_i$  (presjek jezgra grane), dobijaju se sabirci oblika

$$\frac{B_i}{\mu_i} \frac{l_i}{S_i} = \Phi_i R_{mi}, \quad (3.33)$$

pa izraz (3.32) poprima oblik

$$\sum_{i=1}^n \Phi_i R_{mi} = \sum_{i=1}^n M_i, \quad (3.34)$$

koji predstavlja iskaz **Drugog Kirhofovoh zakona za magnetna kola**. Treba napomenuti da je, u prethodnom postupku, nužno bilo pretpostaviti da je gustina fluksa po presjeku jezgra bilo koje grane konstantna, što se, u praktičnoj primjeni, obično čini.

Pri praktičnoj primjeni izraza (3.34) na konkretni problem, treba voditi računa o smjerovima pojedinih flukseva i MPS, analogno kao pri primjeni Drugog Kirhofovog pravila u električnim kolima.

### 3.8 Proračunavanje magnetnih kola

Pri proračunavanju prostih magnetnih kola, kakvo je prikazano na slici 3.21, problemi se mogu postaviti na dva načina:

1. Zadate su geometrijske dimenzije magnetnog kola, karakteristike feromagnetnih materijala i magnetni fluks koji treba realizovati u magnetnom kolu, a treba naći mps namotaja  $M=NI$ , potrebnu za realizaciju zadatog fluksa.

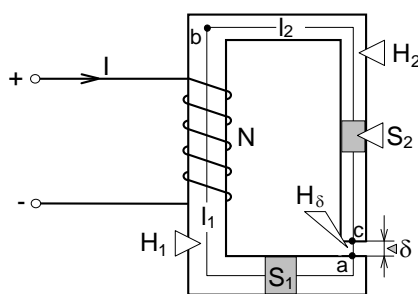
Rješavanje problema ovog tipa može se ilustrovati na primjeru magnetnog kola sa slike 3.21.

Magnetno kolo se razbija na red djelova jednakog poprečnog presjeka  $S$  realizovanih od homogenih materijala. Označava se kontura koja prolazi srednjom magnetnom linijom. Kako fluks u svim djelovima kola mora biti isti, to je uvijek  $B_i = \Phi / S_i$  za svaki dio kola. Ovo omogućava jednostavno određivanje vrijednosti  $\oint \vec{H} d\vec{l}$  za konturu koju obrazuje srednja linija magnetnog polja, pa je jednostavno naći i traženu mps  $NI$

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta = NI. \quad (3.35)$$

Vrijednosti  $H_1$  i  $H_2$  određuju se na osnovu izračunatih  $B_1$  i  $B_2$  sa zadatih krivih magnećenja materijala od kojih su realizovani odgovarajući djelovi magnetnog kola. Vrijednost  $H_\delta$  jednoznačno je definisana poznatim odnosom

$$H_\delta = \frac{\Phi / S_\delta}{\mu_0}. \quad (3.36)$$



Slika 3.21 Primjer prostog magnetnog kola.

2. Zadane su geometrijske dimenzije magnetnog kola, karakteristike magnećenja svih korišćenih materijala i mps  $M$ , a treba odrediti magnetni fluks kroz kolo  $\Phi$ .

Neposredno korišćenje izraza 3.34 za rješavanje problema ovakvog tipa nije moguće jer, po pretpostavci, svi djelovi kola nijesu od istog materijala. To je razlog što se, za rješavanje ovakvog tipa problema koristi iterativna procedura. Ova procedura zahtijeva da se pretpostavi magnetni fluks u kolu, a zatim da se izračuna mps na način kako je to prije opisano. Ako se, ovako izračunata, mps razlikuje od zadate vrijednosti mps, onda se pretpostavka o fluksu koriguje, pa se ponovo izvrši računanje mps. Ova procedura se ponavlja sve do zadovoljavajuće podudarnosti, dobijene sa zadatom vrijednošću MPS.

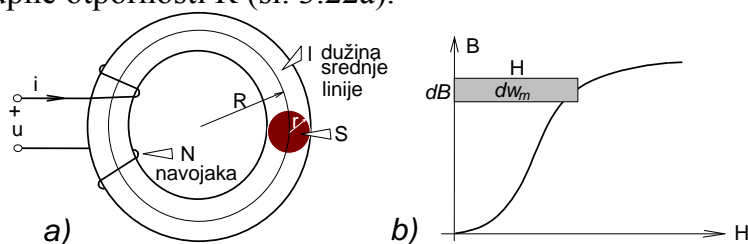
Rješavanje oba tipa zadataka kod prostih magnetnih kola znatno se pojednostavljuje ako je permeabilnost materijala od kojeg je napravljeno magnetno kolo konstantna. U takvim situacijama treba pribjeći primjeni Omovog zakona za magnetna kola.

Nije teško pretpostaviti kolike komplikacije mogu nastati pri proračunavanju složenih magnetnih kola sačinjenih od feromagnetnih materijala. Ovdje neće biti govora o rješavanju takvih kola.

Rješavanje složenih magnetnih kola za koja su sve permeabilnosti konstantne (linearno magnećenje) svodi se na primjenu Kirhofovih zakona, procedurom koja je analogna proceduri koja važi za rješavanje električnih kola. Metod superpozicije takođe je primjenjiv pri rješavanju ovakvih kola.

### 3.9 Energija magnetnog polja

Razmotrimo najjednostavnije magnetno kolo (pravilan torus) od feromagnetnog materijala, čija je permeabilnost  $\mu$  i na kome je ravnomjerno namotano  $N$  navojaka izolovane žice ukupne otpornosti  $R$  (sl. 3.22a).



Slika 3.22 Uz energiju magnetnog kola

Kada se torus priključi na promjenljivi napon  $u$ , pod uticajem tog napona, kroz namotaj će proteći struja  $i$ , koja stvara magnetno polje čiji je fluks  $\Phi$  takođe promjenljiv, pa se može pisati jednačina dinamičke ravnoteže električnih sila:

$$u - Ri - \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (3.37)$$

Pomnožimo li jednačinu (3.37) sa  $idt$  dobićemo jednačinu koja izražava zakon o održanju energije:

$$uidt - Ri^2 dt - id\Phi = 0 \quad (3.38)$$

Prvi član jednačine (3.38) predstavlja rad koji ulaže izvor napona  $u$ , drugi član je oslobođena Džulova toplota, a treći, rad uloženi na stvaranje magnetnog polja

$i \cdot d\Phi = dW_M$ . Magnetna kola obično rade van oblasti magnetnog zasićenja, te tada postoji linearna zavisnost između struje i fluksa  $\Phi = Li$ , pa se ukupna energija magnetnog kola dobija integraljenjem:

$$W_M = \int dW_M = \int_{i=0}^i Lidi = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \Phi i \quad (3.39)$$

U gornjim razmatranjima električnog kola fluks  $\Phi$  je fluks električnog kola, dakle fluks koji prolazi kroz površine koje se naslanjaju na električno kolo, a fluks magnetnog kola  $\Phi_{Fe}$  je fluks koji prolazi kroz presjek magnetnog kola. U posmatranom slučaju fluks električnog kola je  $N$  puta veći ( $N$  je broj navojaka električnog kola) od fluksa magnetnog kola:

$$\Phi = N\Phi_{Fe}$$

ili fluks jednog navoja namotaja je isti kao fluks kroz presjek magnetnog kola.

Primjenjujući zakon ukupne struje na posmatrano kolo imamo:

$$H \cdot l = N \cdot i$$

pa se, imajući u vidu da je  $\Phi_{Fe} = B \cdot S$ , magnetna energija kola može izraziti:

$$W_M = \frac{1}{2} N\Phi_{Fe} \cdot i = \frac{1}{2} N\Phi_{Fe} \frac{H \cdot l}{N} = \frac{1}{2} BSlH = \frac{1}{2} BHV. \quad (3.40)$$

Kod torusnog magnetnog kola sa slike 3.22a, MPS je  $M=Nl=Hl$ . Uz pretpostavku da je  $r \ll R$ , gustina fluksa  $B$  i jačina polja  $H$  su isti u svim djelovima kola, pa je  $\Phi=BS$ . Logično je zaključiti da je izračunata magnetna energija (3.40) ravnomjerno raspoređena u zapremini jezgra torusa. Na osnovu ovog zaključka, možemo izračunati **zapreminsku gustinu energije magnetnog polja**  $w_M$ :

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \mu \cdot H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (3.41)$$

što se može geometrijski interpretirati kao površina između krive magnećenja i ordinatne ose (sl.3.22b).

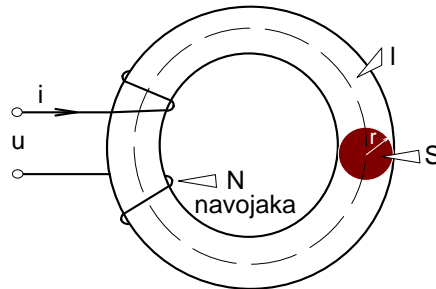
### 3.10 Gubici energije u magnetnom kolu

Vidjeli smo da je za magnećenje magnetnog kola potrebna određena energija – jednačina (3.39). Kada se magnećenje feromagnetnih materijala vrši naizmjenično, a to je slučaj kod transformatora, električnih mašina i svih drugih uređaja koji koriste naizmjeničnu struju, nastaju gubici energije uslijed pojave histerezisa i pojave vrtložnih struja. Ovi gubici jednim imenom zovu se **gubici u gvožđu**.

#### 3.10.1 Gubici usljed histereze

Neka je predmet posmatranja magnetno kolo od feromagnetnog materijala predstavljeno na slici 3.23. Neka je njegov namotaj priključen na izvor naizmjeničnog napona u učestanosti  $f$ . Kao posljedica priključenog napona, kroz namotaj će proticati

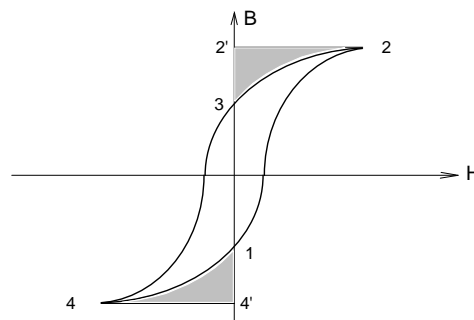
struja  $i$ , te će  $i$  polje u magnetnom kolu imati naizmjenični karakter. Dakle, u toku jedne periode magnetno kolo će se magnetiti u jednom, a zatim u drugom smjeru. Zbog nereverzibilnosti procesa magnećenja feromagnetika, zavisnost magnetne indukcije od jačine polja će, pri tome, imati oblik histerezisne petlje, kao na slici 3.24.



Slika 3.23 Magnećenje naizmjeničnom strujom magnetnog kola od feromagnetnog materijala.

U okviru izučavanja magnetnih polja, već je zaključeno da, za priraštaj magnetne energije po jedinici zapremine magnetnog kola, važi:

$$dW_m = HdB.$$



Slika 3.24 Histerezisna petlja.

Pri naizmjeničnom magnećenju magnetnog kola, idući od tačke 1 do tačke 2,  $H > 0$  i  $dB > 0$ , pa je uloženi rad za magnećenje pozitivan i, za jedinicu zapremine magnetnog kola, proporcionalan je površini ograničenoj krivama 1-2-2'-1 (sl.3.24). Idući od tačke 2 do tačke 3,  $H > 0$  i  $dB < 0$ , pa je rad negativan, što govori o tome da se dio energije, proporcionalan površini 2-3-2'-2 vraća u električno kolo. Idući od tačke 3 do tačke 4,  $H < 0$  i  $dB < 0$ , pa je uloženi rad opet pozitivan i proporcionalan površini 3-4-4'-3, a idući od tačke 4 do tačke 1  $H < 0$  i  $dB > 0$ , rad je opet negativan, te se energija proporcionalna površini 4-1-4'-4 vraća električnom kolu. Dakle, u toku jedne sekunde, ciklus naizmjeničnog magnećenja ponavlja se  $f$  puta ( $f$  je učestanost ili frekvencija magnećenja), te će energija, koja se gubi u jedinici zapremine magnetnog kola, za jedinicu vremena (snaga gubitaka  $P_H$ ) biti:

$$P_H / V :: f \times \text{površina histerezisne petlje},$$

odnosno, ukupna snaga gubitaka usljed histereze u magnetnom kolu biće:

$$P_H :: f \times \text{površina histerezisne petlje} \times V.$$

Prethodno razmatranje ukazuje, kvalitativno, na činjenicu da se dio energije gubi u magnetnom kolu (pretvara u toplotu), pri njegovom naizmjeničnom magnećenju. Međutim, ovdje nedostaje praktični algoritam za izračunavanje snage gubitaka u

magnetnom kolu usljed histereze. U ove svrhe, Štajnmecc je dao izraz za snagu gubitaka usljed histereze po jedinici mase magnetnog kola:

$$P_H = \eta f B_m^{1,6},$$

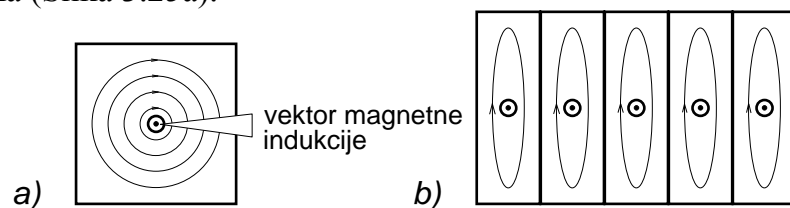
gdje je  $\eta$  Štajnmeccov sačinilac koji karakteriše materijal, a  $B_m$  maksimalna vrijednost indukcije, do kojeg je magnećeno magnetno kolo, u jednom i u drugom smjeru. Za praktične svrhe, ipak, češće se koristi izraz:

$$P_H = \eta f B_m^2. \quad (3.42)$$

Proizvođači feromagnetnih materijala, standardno, navode gubitke usljed histereze po jedinici mase pri  $B_m = \text{const.}$  (najčešće  $B_m = 1\text{T}$ ), i za  $f = \text{const.}$  (npr.  $f = 50\text{Hz}$ ).

### 3.10.2 Gubici usljed vrtložnih struja

Feromagnetni materijali od kojih se prave magnetna kola, pored ranije istaknutih svojstava, imaju i to svojstvo da su dobri električni provodnici. Imajući to u vidu, interesantno je razmotriti, šta se događa u poprečnom presjeku magnetnog kola, kada se kroz njega zatvara naizmjenični fluks, kad je gustina magnetnog fluksa u svim tačkama presjeka jednaka (Slika 3.25a).



Slika 3.25 Vrtložne struje u; a) Punom magnetnom kolu i b) Magnetnom kolu sačinjenom od limova.

S obzirom na osobinu električne provodnosti feromagnetnog materijala, čitav poprečni presjek može se posmatrati kao zbir, proizvoljno mnogo, provodnih kontura. Prema Faradejevom zakonu elektromagnetne indukcije, u svakoj od tih provodnih kontura, zbog promjenljivog fluksa, indukovaće se ems što će, s obzirom da su provodne konture zatvorene, u njima izazvati pojavu struja, i to takvog smjera da iste teže da stvore sopstveno polje, koje će uticati na suzbijanje promjene fluksa, koji ih je uzrokovao. Takve struje nazivaju se vrtložne (vihorne) struje. S obzirom da svaka provodna kontura pruža otpor proticanju struje kroz nju, očigledno je da vrtložne struje uzrokuju pretvaranje dijela energije u toplotu, prema Džulovom zakonu. Snaga tih gubitaka, obično se označava sa  $P_F$ , i naziva se **snaga gubitaka usljed vrtložnih struja** (gubici usljed vrtložnih struja). Otpornost kojom se strujna kontura suprostavlja proticanju vrtložne struje utoliko je veća ukoliko je njena dužina veća. Sa rastom otpornosti, opada snaga gubitaka, jer, pri istoj ems-i, struja opada, a gubici su proporcionalni kvadratu struje. Iz ovog razloga, kao mjera za sniženje gubitaka usljed vrtložnih struja, primjenjuje se mjera izvođenja magnetnih kola od tankih limova, koji su među sobom izolovani (Slika 3.25b). Što su limovi tanji, to su, za: istu masu, istu učestanost  $f$  i isto  $B_m$ , gubici usljed vrtložnih struja manji.

Gubici usljed vrtložnih struja, po jedinici mase, mogu se izraziti kao:

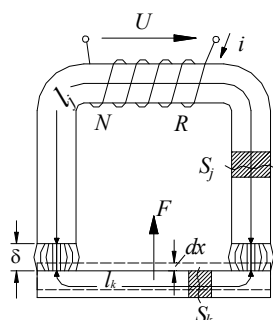
$$P_F = \sigma f^2 B_m^2, \quad (3.43)$$

gdje je  $\sigma$  koeficijent snage gubitaka usljed vrtložnih struja, koji karakteriše svojstva materijala feromagnetnog kola.

U katalogima proizvođača, navodi se podatak o gubicima usljed vrtložnih struja po jedinici mase, za standardnu učestanost i konstantnu maksimalnu indukciju.

### 3.11 Elektromagnet

Mnogi elektrotehnički uređaji; prekidači (sklopke), releji, zvonca, ventili, spojnice, “magneti” za prenošenje tereta u čeličanama i livnicama čelika, i dr., koriste u svom radu elektromagnet. Svi oni koriste mehaničku silu, kojom magnetno polje privlači feromagnetne dijelove. Tipična izrada elektromagneta, koji se sastoji od jarma sa namotajem i kotve, koja je pokretna, dat je na (sl. 3.26).



Slika 3.26 Skica elektromagneta

Jaram i kotva su od feromagnetnog materijala, a između njih je **medugvožđe** – vazduh, relativno male debljine  $\delta$ . Magnetomotorna sila Ni kalema, stvara u jarmu magnetno polje. Linije magnetnog polja “preskaču” kroz vazdušni procjep i zatvaraju se preko kotve. Tako se formira magnetno kolo, koje se sastoji od jarma, dužine  $l_j$  i presjeka  $S_j$ , kotve, dužine  $l_k$ , presjeka  $S_k$  i dva vazdušna procjepa dužine  $\delta$  i presjeka približno jednakog presjeku jezgra.

Obilježimo sa  $F$  rezultantnu silu kojom jezgro privlači kotvu i zamislimo da je u toku vremenskog intervala  $dt$  izvršeno virtuelno pomjeranje  $dx$  u pravcu djelovanja sile  $F$ . Vodeći računa o svim transformacijama energije, na osnovu zakona o održanju energije, može se napisati jednakost:

$$uidt = Ri^2 dt + dW_M + Fdx \quad (3.44)$$

Jednačina (3.44) iskazuje: rad izvora za vrijeme virtuelnog pomjeranja  $uidt$ , utrošio se na zagrijavanje provodnika  $Ri^2 dt$ , na promjenu energije magnetnog polja  $dW_M$  i na mehanički rad  $Fdx$ . S druge strane, za električno kolo (namotaj), u svakom trenutku, mora da važi jednačine dinamičke ravnoteže električnih sila (koja je takođe proizišla iz zakona o održanju energije):

$$u - Ri - \frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad (3.45)$$

što znači da napon izvora drži ravnotežu padu napona na termogenom otporu kalema  $Ri$  i indukovanoj elektromotornoj sili uslijed ukupne promjene fluksa električnog kola  $d\Phi/dt$ .

Pomnožimo jednačinu (3.45) sa  $idt$  i oduzmimo je od jednačine (3.44), pa će biti:

$$id\Phi = dW_M + Fdx \quad (3.46)$$



---

Imajući u vidu izraz za magnetnu energiju, (jednačina 3.40), kao i činjenicu da se pri zamišljenom virtuelnom pomjeranju, mijenjaju i struja i fluks, poslije izvjesnih transformacija, za ukupnu silu kojom jezgro privlači kotvu dobije se:

$$F = BHS_j = \mu H^2 S_j \quad (3.47)$$

Logično je zaključiti da se ova sila ravnomjerno rasporedi na obje stope elektromagneta, tj.  $F_1 = F/2$ .