

# Uvod u teoriju telekomunikacionog saobraćaja

---

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## Diskretne

- Geometrijska raspodjela
- Poasonova raspodjela
- Binomna raspodjela...

## Kontinualne

- Eksponencijalna raspodjela
- Uniformna raspodjela
- Gausova raspodjela
- Pareto raspodjela...

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ➤ Geometrijska raspodjela

$$\text{Prob}\{X = k\} = (1 - q)q^k, \quad 0 < q < 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$q$  je bezdimenziona veličina

### **PRIMJER:**

Pretpostavimo da za slot vremenskog multipleksa konkuriše više korisnika. Neka je vjerovatnoća da je slot na raspolaganju posmatranom izvoru  $1-q$ . Slot se dodjeljuje drugim izvorima sa vjerovatnoćom  $q$ . Slučajna promjenljiva  $X$  predstavlja broj neuspjelih pokušaja zauzimanja kanala do prvog uspješnog pokušaja zauzimanja kanala.

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

➤ Modifikovana geometrijska raspodjela:

$$\text{Prob}\{X = k\} = (1 - q)q^{k-1}, \quad 0 < q < 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

## PRIMJER:

Paket se prenosi po linku. Vjerovatnoća neuspješnog prenosa je  $q$ . Vjerovatnoća uspješnog prenosa je  $1-q$ . Slučajna promjenljiva  $X$  predstavlja broj pokušaja do uspješnog prenosa.

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## Osobine geometrijske raspodjele

- Uslov normalizovanosti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - q)q^k = (1 - q) \times \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1 - q) \times \frac{1}{1 - q} = 1$$

- Srednja vrijednost:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \times \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k(1 - q)q^k = (1 - q)q \times \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = \\ &= (1 - q)q \times \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1 - q)q \times \frac{d}{dq} \frac{1}{1 - q} = \frac{(1 - q)q}{(1 - q)^2} = \frac{q}{1 - q} \end{aligned}$$

↖  
Ovo je moguće ako je red konvergentan

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

...Osobine geometrijske raspodjele:

■ Srednja kvadratna vrijednost:

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \times \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-q)q^k = (1-q)q \times \sum_{k=0}^{\infty} k(kq^{k-1}) = (1-q)q \times \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} kq^k$$

$$E[X^2] = (1-q)q \times \frac{d}{dq} \frac{q}{(1-q)^2} = (1-q)q \times \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{(1+q)q}{(1-q)^2}$$



Zamjena sume i izvoda

■ Varijansa:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \frac{(1+q)q}{(1-q)^2} - \frac{q^2}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

**PRIMJER:** Osobine modifikovane geometrijske raspodjele.

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ➤ Poasonova raspodjela

$$\text{Prob}\{X = k\} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}, \quad \rho > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$\rho$  je bezdimenziona veličina (intenzitet saobraćaja)

### **PRIMJER:**

Pretpostavimo da brojimo telefonske pozive koji tokom posmatranog vremena dolaze na telefonsku centralu. Ako je taj broj izbrojanih poziva  $k$ , a vrijeme  $t$ , onda se radi o Poasonovoj raspodjeli (eksperimentalni rezultat).  $\rho$  je proporcionalna vremenu  $t$  i srednjoj dolaznoj brzini poziva  $\lambda$ .

$$\rho = \lambda t$$

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

Osobine Poasonove raspodjele:

- Uslov normalizovanosti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} = e^{-\rho} \times e^{\rho} = 1$$

- Srednja vrijednost:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \times \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} = \\ &= \rho e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} = \rho e^{-\rho} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!} = \rho e^{-\rho} \times e^{\rho} = \rho \end{aligned}$$



# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ...Osobine Poasonove raspodjele

- Srednja kvadratna vrijednost:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \times \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\rho^k}{k!} = \\ &= \rho e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} = \rho e^{-\rho} \times \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} \right] = \\ &= \rho e^{-\rho} \times \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!} \right] = \rho e^{-\rho} \times \frac{d}{d\rho} [\rho e^{\rho}] = \rho e^{-\rho} \times [e^{\rho} + \rho e^{\rho}] = \rho(1 + \rho) \end{aligned}$$

- Varijansa:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \rho(1 + \rho) - \rho^2 = \rho \longrightarrow \mathbf{E[x]=Var[X]}$$

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ➤ Binomna raspodjela

$$\text{Prob}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad 0 < p < 1, k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$p$  je bezdimenziona veličina

### **PRIMJER:**

Pretpostavimo prenos poruke (koja sadrži  $n$  paketa) preko kanala koji sa vjerovatnoćom  $p$  unosi grešku tokom prenosa paketa. Slučajna promjenljiva koja predstavlja broj pogrešno prenesenih paketa ima binomnu raspodjelu.

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## Osobine binomne raspodjele:

- Uslov normalizovanosti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} == (p + 1 - p)^n = 1$$

↑  
**Njutnova binomna formula**

- Srednja vrijednost:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^n k \cdot P\{X = k\} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= np \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} = \\ &= np \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} p^j (1-p)^{n-1-j} = np \cdot (p+1-p)^{n-1} = np \end{aligned}$$

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

...Osobine binomne raspodjele:

- Srednja kvadratna vrijednost:

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^n k^2 P(X = k) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np + np^2(n-1)$$

- Varijansa:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = np + np^2(n-1) - (np)^2 = np - np^2$$

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

## ➤ Veza binomne i Poasonove raspodjele:

Poasonova raspodjela je granični slučaj binomne raspodjele kada broj pokušaja  $n$  teži beskonačnosti, a vjerovatnoća događaja  $p$  teži 0, pri čemu njihov proizvod ostaje konstantan i jednak  $\rho$ .

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}$$

Stirlingova formula

$$\begin{aligned} p(k) &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} = \\ &= \frac{N^N e^{-N}}{k!(N-k)^{N-k} e^{-(N-k)}} \left(\frac{\rho}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\rho}{N}\right)^{N-k} = \frac{\rho^k}{k!} \left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k} e^{-k} \left(1 - \frac{\rho}{N}\right)^{N-k} = \\ &= \frac{\rho^k}{k!} e^{-k} \left(\left(1 - \frac{k}{k-N}\right)^{\frac{k-N}{k}}\right)^{-k} \left(\left(1 - \frac{\rho}{N}\right)^{\frac{N}{\rho}}\right)^{\frac{\rho}{N}(N-k)} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-k} e^k e^{-\rho} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} \end{aligned}$$

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ➤ Eksponencijalna raspodjela:

$$f_X(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

$\mu$  predstavlja srednju brzinu dimenzije vrijeme<sup>-1</sup>

$$F_X(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

Mnogi fenomeni u telekomunikacionim mrežama se mogu opisati ovom raspodjelom (trajanje telefonskog poziva, interval između dva poziva koji dolaze na telefonsku centralu, faza tišine za izvor govornog saobraćaja,...)

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## Osobine eksponencijalne raspodjele:

- Uslov normalizovanosti:

$$\int_0^{\infty} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu x} dx = -\lim_{a \rightarrow +\infty} [e^{-\mu a}]_0^a = 1$$

- Srednja vrijednost:

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \mu x e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} z e^{-z} dz = \\ &= \frac{1}{\mu} \left\{ \left[ z(-e^{-z}) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-z} dz \right\} = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} e^{-z} dz = \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

...Osobine eksponencijalne raspodjele:

- Srednja kvadratna vrijednost:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \mu e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu^2} \int_0^{+\infty} z^2 e^{-z} dz = \\ &= \frac{1}{\mu^2} \left\{ [z^2 \times (-e^{-z})]_0^{+\infty} - 2 \int_0^{+\infty} z(-e^{-z}) dz \right\} = \frac{2}{\mu^2} \int_0^{+\infty} z e^{-z} dz = \frac{2}{\mu^2} \end{aligned}$$

- Varijansa:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} \longrightarrow \text{Var}[X]=E[X]^2$$

Koeficijent varijacije  $C_X=1$



# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

...Osobine eksponencijalne raspodjele:

## ■ Memoryless osobina

- Pretpostavimo da  $X$  predstavlja poziv koji je započeo u trenutku  $t' = 0$
- Posmatrajmo slučajnu promjenljivu  $X$  u trenutku  $t' = \tau$ , i pretpostavimo da je poziv još aktivan
- Potrebno je da odredimo funkciju raspodjele slučajne promjenljive  $R=X-\tau$ , koja predstavlja 'ostatak vremena'

$$\begin{aligned} F_R(t) &= \text{Prob}\{R \leq t\} = \text{Prob}\{X - \tau \leq t \mid X > \tau\} = \\ &= \frac{\text{Prob}\{X - \tau \leq t, X > \tau\}}{\text{Prob}\{X > \tau\}} = \frac{\text{Prob}\{\tau < X \leq t + \tau\}}{1 - \text{Prob}\{X \leq \tau\}} = \\ &= \frac{\text{Prob}\{X \leq t + \tau\} - \text{Prob}\{X \leq \tau\}}{1 - \text{Prob}\{X \leq \tau\}} = \frac{F_X(t + \tau) - F_X(\tau)}{1 - F_X(\tau)} \end{aligned}$$

- Odgovarajuća funkcija gustine raspodjele je

$$f_R(t) = \frac{d}{dt} F_R(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{F_X(t + \tau) - F_X(\tau)}{1 - F_X(\tau)} \right] = \frac{f_X(t + \tau)}{1 - F_X(\tau)}$$

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ...Osobine eksponencijalne raspodjele

### Memoryless osobina

- Prethodne relacije važe za bilo koju slučajnu promjenljivu  $X$ , pod imenom teorema “više od života”
- Vidimo da obje funkcije zavise od trenutka  $\tau$ , kada se ponovo slučajna promjenljiva razmatra
- U specijalnom slučaju eksponencijalne raspodjele važi

$$F_R(t) = \frac{F_X(t + \tau) - F_X(\tau)}{1 - F_X(\tau)} = \frac{1 - e^{-\lambda(t+\tau)} - (1 - e^{-\lambda\tau})}{1 - (1 - e^{-\lambda\tau})} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$f_R(t) = \frac{f_X(t + \tau)}{1 - F_X(\tau)} = \frac{\lambda e^{-\lambda(t+\tau)}}{1 - (1 - e^{-\lambda\tau})} = \lambda e^{-\lambda t}$$

- Dakle slučajna promjenljiva ‘ostatak vremena’ ima i dalje eksponencijalnu raspodjelu kao slučajna promjenljiva  $X$  i ne zavisi od  $\tau$ !!!!!!

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ...Osobine eksponencijalne raspodjele

### Memoryless osobina

- Ova osobina se široko primjenjuje u teoriji redova čekanja
- Slučajnu promjenljiva sa eksponencijalnom raspodjelom ima *memoryless* osobinu jer odgovarajuća promjenljiva 'ostatak vremena' ima identičnu eksponencijalnu raspodjelu
- Može se pokazati da je eksponencijalna raspodjela jedina kontinualna raspodjela sa ovom osobinom.
- Može se pokazati da je geometrijska raspodjela jedina diskretna raspodjela sa ovom osobinom.

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ...Osobine eksponencijalne raspodjele

Minimum dvije slučajne promjenljive sa eksponencijalnom raspodjelom

- Razmotrimo dvije slučajne promjenljive  $T_1$  i  $T_2$  koje imaju eksponencijalnu raspodjelu

$$F_{T_1}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$$

$$F_{T_2}(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$$

$$T = \min\{T_1, T_2\}$$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t) = \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 t} + 1 - e^{-\lambda_2 t} - (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{aligned}$$

- Slučajna promjenljiva  $T$  ima eksponencijalnu raspodjelu sa srednjom dolaznom brzinom  $\lambda_1 + \lambda_2$
- Lako je pokazati da ovo važi i za opšti slučaj, proizvoljnog broja slučajnih promjenljivih

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ...Osobine eksponencijalne raspodjele

### Poređenje eksponencijalne raspodjele i druge raspodjele

- Pretpostavimo dvije slučajne promjenjive  $X$  (eksponencijalna) i  $Y$  (proizvoljna raspodjela):

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \int_0^{+\infty} [1 - F_X(y)] f_Y(y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-\mu y} f_Y(y) dy \\ &= LT\{f_Y(y)\} \Big|_{s=\mu} \end{aligned}$$

gdje je  $LT\{f_Y(y)\}$  Laplasova transformacija funkcije  $f_Y(y)$

- Ako  $Y$  ima eksponencijalnu raspodjelu parametra  $\lambda$ , onda važi:

$$\begin{aligned} LT\{f_Y(y)\} &= LT\{\lambda e^{-\lambda t}\} = \frac{\lambda}{\lambda + s} \\ P(X > Y) &= \frac{\lambda}{\lambda + s} \Big|_{s=\mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ➤ Uniformna raspodjela

Kontinualna slučajna promjenljiva  $X$  ima uniformnu raspodjelu na intervalu  $[a, b]$  ako je:

$$f_X(x) = \frac{u(x-b) - u(x-a)}{b-a}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

gdje je  $u(x)$  jedinična step funkcija centrirana u  $x$ .

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## Osobine uniformne raspodjele:

- Koristi se kada rezultati nekog događaja mogu imati bilo koju vrijednost u opsegu vrijednosti bez definisanih privilegija
- Srednja vrijednost:

$$E[X] = \int_a^b x \times \frac{1}{b-a} dx = \frac{b+a}{2}$$

- Srednja kvadratna vrijednost:

$$E[X^2] = \int_a^b x^2 \times \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ➤ Gausova raspodjela

- Kontinualna slučajna promjenljiva  $X$  ima Gausovu raspodjelu ako je:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

gdje je  $\mu$  realan broj.

- Po centralnoj graničnoj teoremi, suma beskonačnog broja nezavisnih identično raspodijeljenih slučajnih promjenljivih teži Gausovoj raspodjeli!
  - To je tipičan trend sa Internet saobraćajem.
- Teško dokazivanje normalizovanosti, izračunavanje srednje vrijednosti i varijanse.
  - Srednja vrijednost je  $\mu$ , a varijansa  $\sigma^2$ .
- Teško odrediti  $F_X(x)$ .



# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## Sporadičan saobraćaj

- Poasonova i binomna raspodjela se tradicionalno koriste za modelovanje saobraćaja u mreži, ali nedavne analize pokazuju da ovi modeli nisu adekvatni za sporadičan saobraćaj (*bursty*) zato što saobraćaj često ima izuzetno velike trenutne vrijednosti, iako su srednje vrijednosti male.
- Saobraćaj u telekomunikacionim mrežama može imati visoku varijansa u širokom opsegu vremenskih intervala, tako da grupni saobraćaj nije usrednjen ako sakupimo kompletan saobraćaj tokom dugog vremenskog perioda.
- Udruživanjem saobraćaja više *bursty* izvora rezultatni saobraćaj ostaje *bursty* (*self-similarity* osobina).
- Za modelovanje *bursty* saobraćaja se koriste *heavy-tailed* raspodjele.

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## ➤ Pareto raspodjela

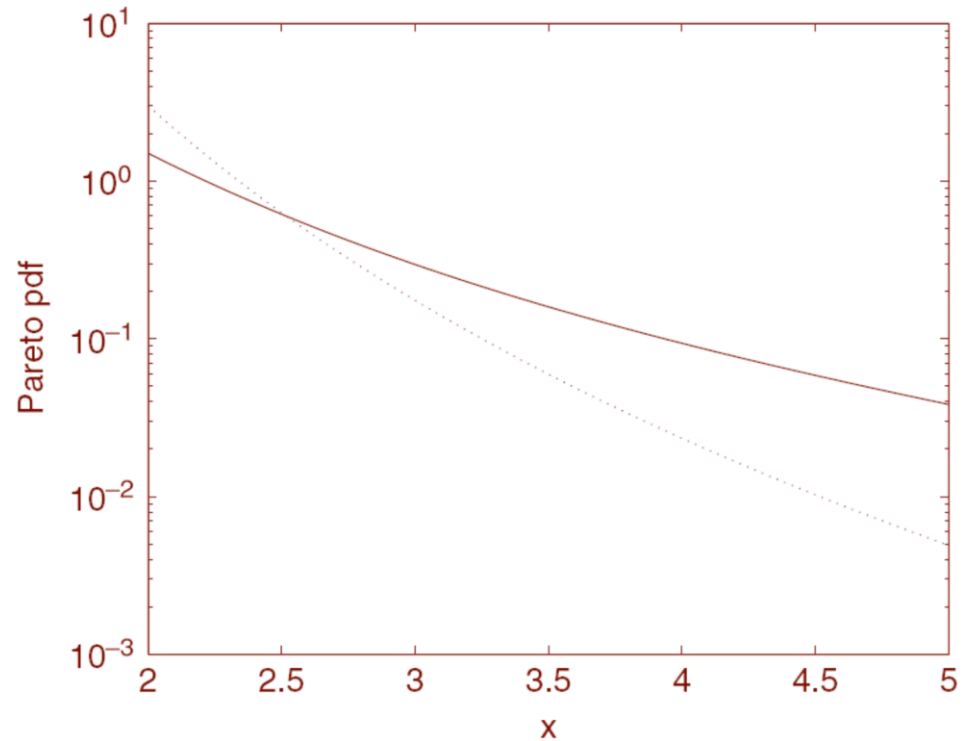
$$f(x) = \frac{b a^b}{x^{b+1}} \quad F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b$$

- $b$  je parametar oblika koji je pozitivan realan broj, dok je  $a$  pozitivna vrijednost koja mora biti manja od  $x$ .
- Koristi se za izražavanje trajanja Internet sesije.

# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

## ➤ Pareto raspodjela

- Isprekidana linija  $a=2$ ,  $b=5$
- Puna linija  $a=2$ ,  $b=3$



# Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

---

## Osobine Pareto raspodjele

- Srednja vrijednost je pozitivna za  $b > 1$
- Varijansa ima smisla za  $b > 2$

$$\mu = \frac{ba}{b-1}$$

$$\sigma^2 = \frac{b a^2}{(b-1)^2 (b-2)}$$

- Tipično se uzima da je  $b$  između 1.4 i 1.6
- Vjerovatnoća da je slučajna promjenljiva veća od  $x$  opada geometrijski.

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = \left(\frac{a}{x}\right)^b$$