Pregled teorije vjerovatnoće I

Telekomunikacione mreže
Eleketrotehnički fakultet Podgorica

Sadržaj

- Osnovni koncepti teorije vjerovatnoće
- Uslovna vjerovatnoća
- Totalna vjerovatnoća
- Bajesova teorema
- Primjeri problema u telekomunikacionim mrežama

Osnovni koncepti teorije vjerovatnoće

- Teorija vjerovatnoće sa bavi slučajnim eksperimentima i događajima
- Eksperiment se može opisati sa:
  - Skupom mogućih rezultata
  - Podskupovima rezultata
  - Učestanošću sa kojom se pojedini podskupovi rezultata javljaju kada se eksperiment ponavlja

Osnovni koncepti teorije vjerovatnoće

- Slučajni eksperiment
  - Eksperiment čiji ishod varira nepredvidljivo
- Prostor rešenja: **kontinualni i diskretni**
  - Ishod eksperimenta: rezultat koji se ne može dekomponovati u druge rezultate
  - Ishodi su međusobno isključivi
  - Bilo koja dva ishoda iz prostora rešenja ne mogu se desiti istovremeno
  - Skup svih mogućih ishoda čini prostor rešenja *S*
  - **Primjer:** broj pokušaja do uspješnog slanja paketa

$$S = \{1, 2, \ldots, \infty\}$$

Osnovni koncepti teorije vjerovatnoće

- Događaj: Podskup od *S*, tj.
  - uspješan prenos u *k*-tom pokušaju
  - greška na jednom bitu ili greška na *burst*-u veličine *k*
- Vjerovatnoća: slučajni broj dodijeljen događaju koji indicira mogućnost pojavljivanja događaja u toku eksperimenta
- Notacija:
  - Ω - slučajni eksperiment sa prostorom rešenja *S*
  - A ili B – događaji eksperimenta
  - P(A) i P(B) – vjerovatnoće događaja A i B
  - Mjera vjerovatnoće je preslikavanje elementarnih događaja iz prostora *S* na pozitivnu realnu osu u intervalu od 0 do 1

$$0 \le P(A) \le 1, \quad \forall A \subseteq S$$

$$P(S) = 1$$

Osnovni koncepti teorije vjerovatnoće

- Ako A i B predstavljaju dva događaja:
  - $A \cup B$ je događaj kada se bilo A ili B, ili A i B pojave tokom eksperimenta
  - $A \cap B$ je događaj kada se A i B simultano pojave tokom eksperimenta
- Komplement događaja A označavaćemo sa $\bar{A}$
  - $\bar{A}$ je događaj kada se A ne pojavljuje
  - $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- A i B su međusobno isključivi ukoliko se ne mogu pojaviti istovremeno
- A i B su nezavisni ako i samo ako $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Osnovni koncepti teorije vjerovatnoće

- **Pravilo množenja**: Ako su događaji $A_1, A_2 \dots A_k$ međusobno nezavisni onda važi:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_k) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \cdots P(A_k)$$

- **Pravilo sabiranja**: Ako A i B predstavljaju bilo koja dva događaja, onda važi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

  - Ovo pravilo se može generalizovati i za slučaj sa većim brojem događaja

Osnovni koncepti teorije vjerovatnoće

- Kod diskretnog prostora događaja, prethodno navedeni aksiomi mogu se razumjeti na osnovu **učestanosti argumenta**, tj. $P(A) \approx f_A$.

$$f_A = \frac{N_A(n)}{n}$$

Broj pojavljivanja događaja A u *n* ponavljanja eksperimenata

Broj ponavljanja eksperimenta

- Kako je $N_A(n) \geq 0$, to je P(A) ≥ 0.
- Kako je $N_S(n) = 1$, to je P(S) = 1.
- Ako je A ∩ B = Ø, $N_{A\cup B}(n) = N_A(n) + N_B(n) \Rightarrow$

$$P(A \cup B) \approx N_{A\cup B}(n) = \frac{N_A(n)}{n} + \frac{N_B(n)}{n} \approx \text{P(A)+P(B)}$$

Osnovni koncepti teorije vjerovatnoće

Problem:

Neka **X** označava slučajnu promjenjivu koja je definisana kao suma rezultata nakon bacanja dvije kockice.

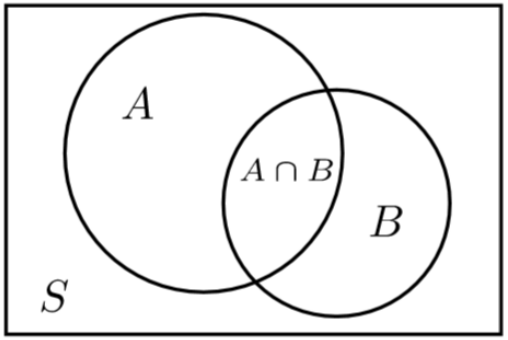
Odrediti prostor rešenja.

Koliko je **P(X=9)**?

Uslovna vjerovatnoća

- Interesuje nas kako se mijenja vjerovatnoća događaja A nakon saznanja da se događaj B desio. Ovu vjerovatnoću označavamo sa:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad za \ P(B)>0$$



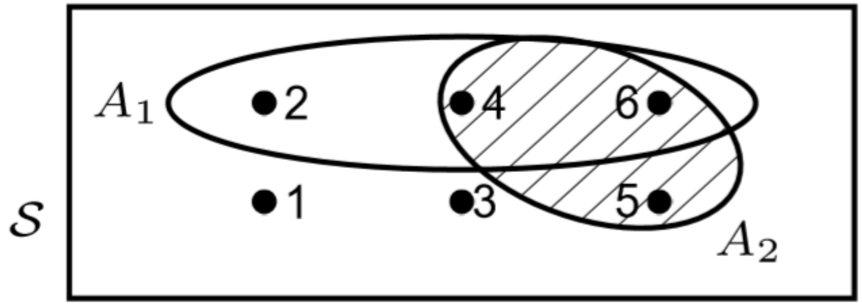
Ukoliko su događaji A i B nezavisni: P(A|B)=P(A)

- Interpretacija preko učestanosti pojavljivanja događaja:

$$P(A|B)=\frac{N_{A\cap B}(n)}{N_B(n)}=\frac{N_{A\cap B}(n)/n}{N_B(n)/n}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Uslovna vjerovatnoća

- Posmatrajmo eksperiment bacanje kocke, $S \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Događaj A_1 - rezultat je paran
- Događaj A_2 - rezultat je veći od 3



- $P(A_1) = 3/6,\ P(A_1 \cap A_2) = 2/6$

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{2}{3}$$

Uslovna vjerovatnoća

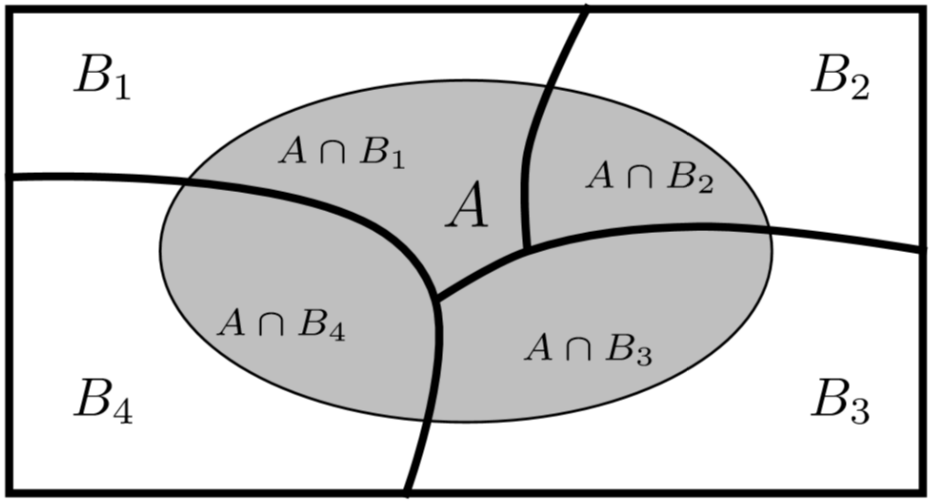
Razmatra se eksperiment bacanja dvije kocke.

- Neka E_1 predstavlja događaj da je suma rezultata 6 a F događaj da je rezultat na prvoj kocki 4. Da li su E_1 i F nezavisni događaji?
  - **$P(E_1 \cap F)=P([4,2])=1/36$**
  - **$P(E_1)P(F)=(5/36)(1/6)=5/216$**
- Neka E_2 predstavlja događaj da je suma rezultata 7. Da li je E_2 nezavisan od F?
  - **$P(E2 \cap F)=P([4,3])=1/36$**
  - **$P(E2)P(F)=(1/6)(1/6)=1/36$**
- Izvodi se beskonačan broj nezavisnih eksperimenta. Svaki eksperiment rezultuje uspjehom sa vjerovatnoćom p i greškom sa vjerovatnoćom 1-p. Odrediti vjerovatnoću da:
  - barem jedan eksperiment rezultuje uspjehom u n pokušaja
  - tačno k uspjeha se desi u n pokušaja

Totalna vjerovatnoća

- Pretpostavimo da su događaji *B1,B2,..., i Bn* međusobno isključivi i čine kompletan prostor rešenja, tj. $S = B_1 \cup B_2 \ldots \cup B_n$. Onda za proizvoljan događaj A važi:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$



Ilustracija na primjeru $S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$

Totalna vjerovatnoća

Primjer: Osiguravajuća kuća vjeruje da se ljudi mogu podijeliti u dvije klase: one koji su skloni udesima i one koji nisu. Statistika kompanije pokazuje da ljudi koji pripadaju prvoj klasi u prosjeku dožive udes u toku jednogodišnjem perioda sa vjerovatnoćom 0.4, dok je vjerovatnoća istog događaja 0.2 za drugu klasu ljudi. Ukoliko pretpostavimo da je 30% populacije sklono udesima, kolika je vjerovatnoća da će osiguravajuća kuća morati da isplati troškove udesa u toku jedne godine?

- Neka A označava skup ljudi koji su skloni nezgodama: $P(A) = 0.3 \ i \ P(\bar{A}) = 0.7$
  - Neka A_1 označava ljude koji dožive udes u toku godine:

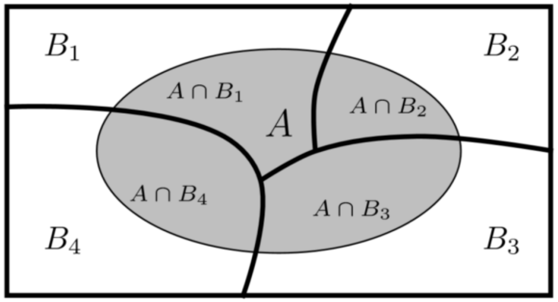
$$P(A_1 | A) = 0.4 \ i \ P(A_1 | \bar{A}) = 0.2$$

  - Stoga važi:

$$P(A) = P(A_1 | A)P(A) + P(A_1 | \bar{A})P(\bar{A}) = 0.26$$

Bajesova teorema

- Pretpostavimo ponovo da se skup rešanja sastoji od n (u primjeru na slici *n=4*) isključivih particija (podskupova).



$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{P(A)}$$

→ Uslovna vjerovatnoća

→ Totalna vjerovatnoća

$$P(A) = \sum_{i=j}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)$$

- Uvrštavnjem donje u gornju jednačinu dobijamo:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

$P(B_i)$ - a priori vjerovatnoća događaja *Bi*

$P(B_i \mid A)$ - a posteriori vjerovatnoća događaja *Bi*, pri poznatom ishodu A

Bajesova teorema

Prilikom odgovaranja na pitanje na zaokruživanje sa više opcija student ili zna odgovor ili pogađa. Neka je *p* vjerovatnoća da student za odgovor, a *1-p* vjerovatnoća da pogađa. Pretpostaviti da student koji pogađa odgovor bira tačnu opciju sa vjerovatnoćom *1/m*, gdje *m* broj ponuđenih odgovora. Takođe, pretpostaviti da sa vjerovatnoćom *q* student zaokužuje netačan odgovor iako zna tačan odgovor. Odrediti vjerovatnoću da je student znao odgovor na pitanje ukoliko je zaokružio tačan odgovor.

$$P(Z \mid I) = \frac{P(zna \,\&\, ispravno)}{P(I)} = \frac{m(1-q)\,p}{1+(m(1-q)-1)\,p}$$

- Koristeći uslovnu vjerovatnoću: $P(zna \,\&\, ispravno) = (1-q)\,p$
- Koristeći totalnu vjerovatnoću: $P(I) = (1-q)P(Z) + P(I \mid \bar{Z})P(\bar{Z}) = (1-q)\,p + \frac{1-p}{m}$

Primjeri iz telekomunikacionih mreža

Primjer 1:

U vremenskom multipleksu svaki slot u frejmu je rezervisan od strane određenog korisnika. Slot može biti zauzet ili slobodan. Ako frejm ima 30 slotova koliki je broj mogućih varijanti? Koliko iznosi vjerovatnoća da je samo jedan slot zauzet?

1	2	3	….	….	…	….	…	29	30

Rešenje: Broj mogućih varijanti je 2^{30}

Vjerovatnoća da je samo jedan slot zauzet: $P = \frac{30}{2^{30}}$

Primjer iz telekomunikacionih mreža

Primjer 2:

Poruka se segmentira na pet paketa koji se šalju Internetom. Obzirom da se prilikom prenosa paketa može pojaviti nesekvencijalni prijem koliki je broj mogućih redosleda? Koliko iznosi vjerovatnoća da će paketi biti primljeni sekvencijalno? Pretpostaviti da nema gubitaka paketa i da su svi redosledi pojavljivanja jednako vjerovatni.

Rešenje:

1seg.	2seg.	3seg.	4seg.	5seg.

Broj mogućih redosleda je 5*4*3*2*1=5!=120

Pošto su svi redosledi jednako vjerovatni vjerovatnoća sekvencijalnog prijema je

1/5!=1/120=0.0083

Primjeri iz telekomunikacionih mreža

Primjer 3:

Neka pet korisnika dijeli medijum za prenos. Vjerovatnoća zauzimanja medijuma za prenos je ista za sve korisnike. Vjerovatnoće greške u prenosu iznose redom za svakog korisnika:

$$2\cdot 10^{-6},\ 4\cdot 10^{-6},\ 3\cdot 10^{-6},\ 10^{-6},\ 5\cdot 10^{-6}.$$

Ukoliko je detektovana greška u prenosu, koja je vjerovatnoća da je drugi korisnik slao podatke?

Primjeri iz telekomunikacionih mreža

Rešenje:

$$P\left(A_1\right)=P\left(A_2\right)=P\left(A_3\right)=P\left(A_4\right)=P\left(A_5\right)=1/5$$

$$P(B|A_1)=2\cdot 10^{-6}$$

$$P(B|A_2)=4\cdot 10^{-6}$$

$$P(B|A_3)=3\cdot 10^{-6}$$

$$P(B|A_4)=10^{-6}$$

$$P(B|A_5)=5\cdot 10^{-6}$$

$$P\left(A_2|B\right)=\frac{P(B|A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{5}P(B|A_i)P(A_i)}=$$

$$=\frac{4\cdot 10^{-6}\cdot\frac{1}{5}}{\left(2\cdot 10^{-6}+4\cdot 10^{-6}+3\cdot 10^{-6}+10^{-6}+5\cdot 10^{-6}.\right)\cdot\frac{1}{5}}=\frac{4}{15}=0,27$$