Pregled teorije vjerovatnoće II

TELEKOMUNIKACIONE MREŽE

ELEKETROTEHNIČKI FAKULTET PODGORICA

Sadržaj

- Funkcija raspodjele slučajne promjenjive (CDF)
- Funkcija gustine vjerovatnoće (PDF)
- Združena funkcija raspodjele i gustine vjerovatnoće
- Uslovna funkcija raspodjele i gustine vjerovatnoće
- CDF i PDF sume slučajnih promjenjivih
- CDF i PDF maksimuma i minimuma slučajnih promjenjiih
- Poređenje slučajnih promjenjivih
- Momenti slučajne promjenjive
- Funkcija generisanja vjerovatnoće

Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

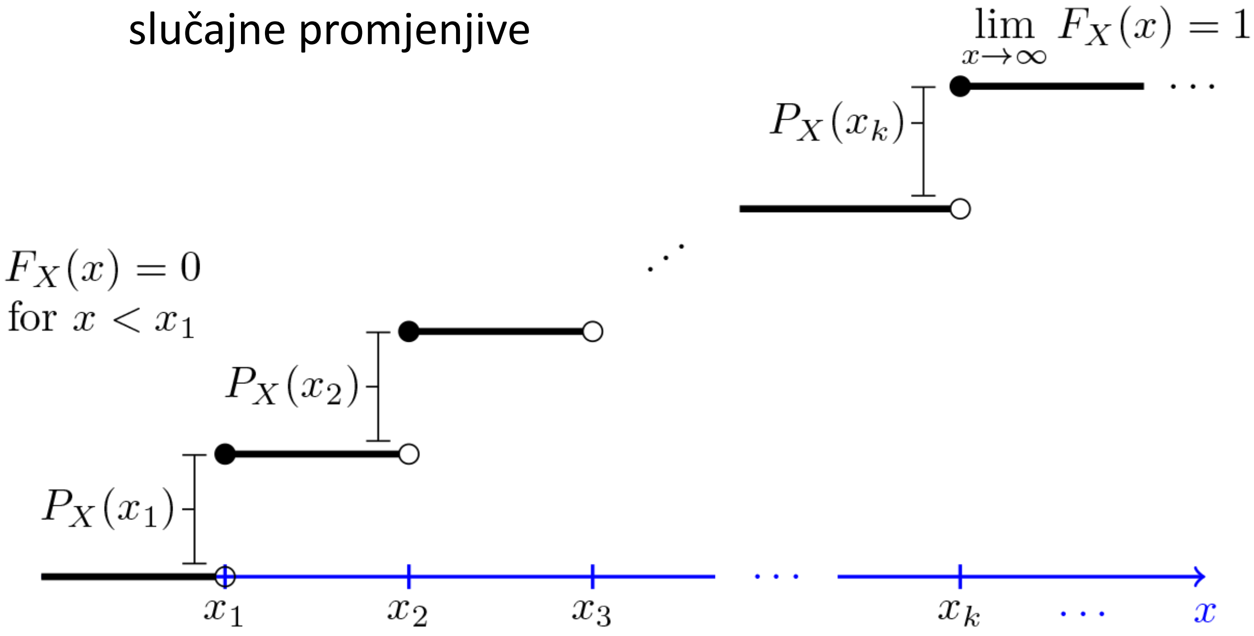
$$F_X(x) = p(X \le x)$$

- $0 \le F_X(x) \le 1$
- bezdimenziona veličina
- $F_X(x)$ je neopadajuća funkcija
- $F_X(x)$ teži 1 kada x teži +∞, odnosno 0 kada x teži -∞
- $F_X(x)$ je kontinualna funkcija: $\lim\limits_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$
- Za diskretnu slučajnu promjenljivu $F_X(x)$ je stepeničasta funkcija sa koracima jednakim vjerovatnoći diskretnih događaja

$$F_X(x) = P(X \le x_n) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) h(X - x_i)$$

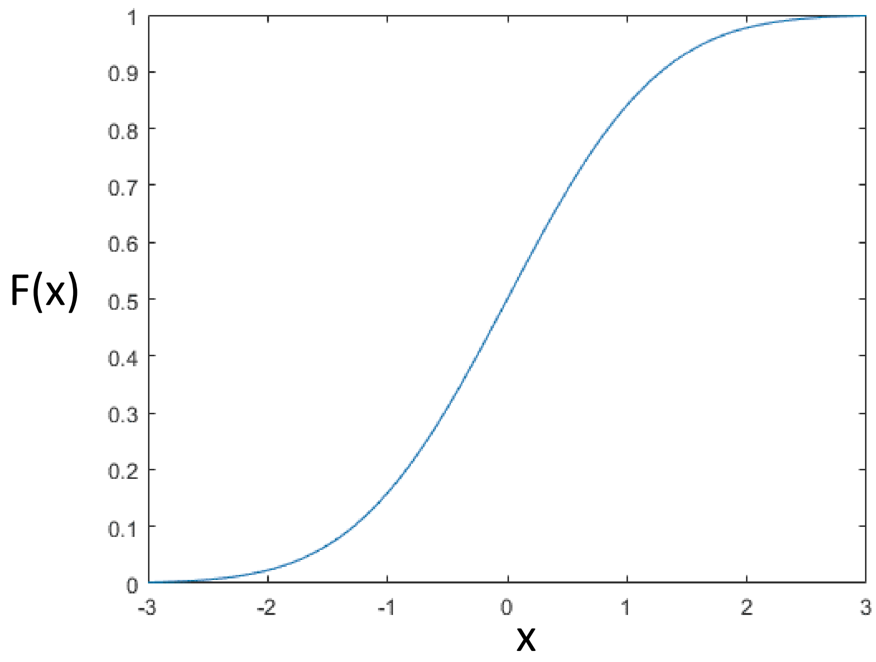
Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

CDF funkcija **diskretne** slučajne promjenjive



Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

CDF funkcija **kontinualne** slučajne promjenjive



Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

- Izračunavanje vjerovatnoće da se slučajna promjenljiva nalazi u opsegu:

$$\{X \leq x_2\} = \{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2\}$$

$$P\{X \leq x_2\} = P\{X \leq x_1\} + P\{x_1 < X \leq x_2\}$$

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = P\{X \leq x_2\} - P\{X \leq x_1\}$$
$$= F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

Funkcija gustine vjerovatnoće

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

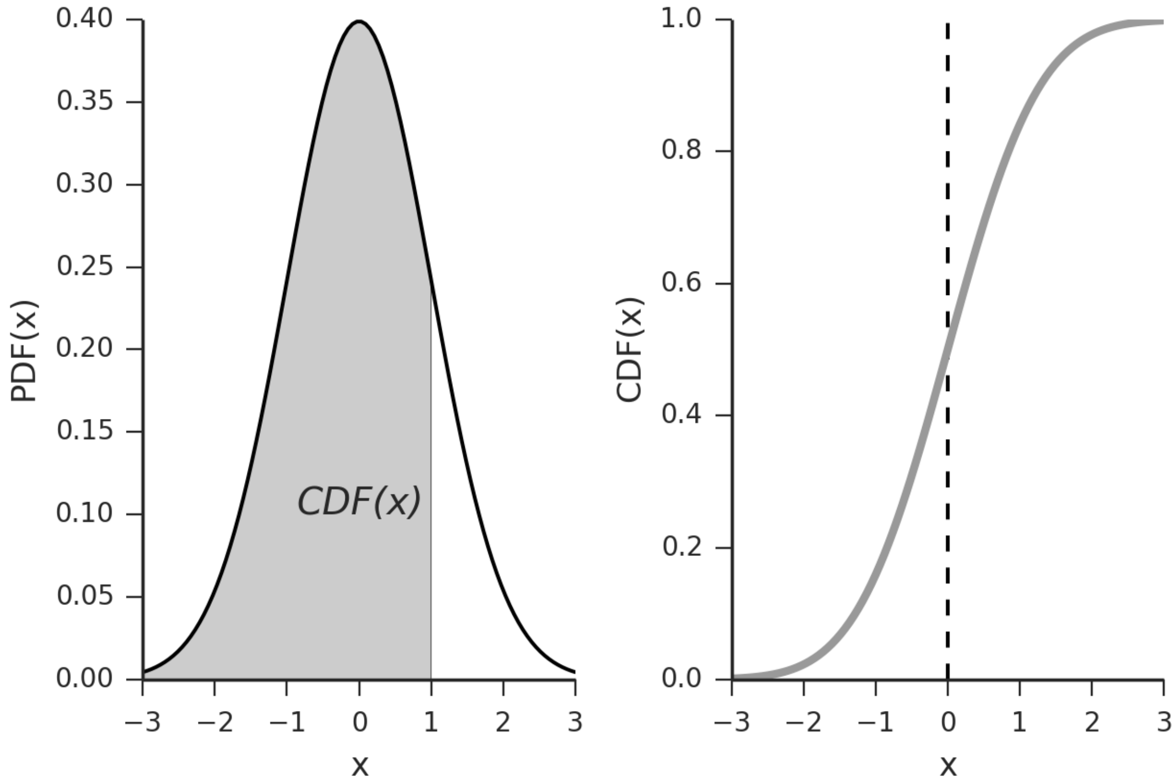
- $f_X(x) \geq 0$
- Dobijanje funkcije raspodjele iz $f_X(x)$: $\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = F(x)$
- Uslov normalizovanosti: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Vjerovatnoća i gustina:

  $$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

  $$f(x)dx = P(x \leq X \leq x + dx)$$

- Za diskretno X: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} P(X = x_i) \cdot \delta(x - x_i)$

Funkcija gustine vjerovatnoće



Združena raspodjela

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y) \Leftrightarrow F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y) dxdy$$

Marginalna raspodjela

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f_{XY}(x)\, dy$$

Statistički nezavisne slučajne promjenljive

$$f_{X_1, X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x)$$

$$F_{X_1, X_2 \dots X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x)$$

Uslovna raspodjela

- Osobine uslovne raspodjele:

$$F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x|Y = y)$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$F_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} F_{X|Y}(x|y)\, f_Y(y)dy$$

- **Primjer:** Neka je uslovna funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenjive X, za Y=y:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{x+y}{1+y} e^{-x}, \quad 0 \leq x \leq \infty, \quad 0 \leq y \leq \infty$$

Odrediti vjerovatnoću $P(X \leq 1|Y = 3)$.

Suma slučajnih promjenjivih

- Neka je Z= X + Y
  - CDF od Z:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}\,(x,y)dydy$$

  - PDF od Z:

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)dx$$

  - Ukoliko su X i Y nezavisne slučajne promjenjive, onda važi:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

  - Za diskretne slučajne promjenjive: $P(Z=k) = \sum_i P(X=i)P(Y=k-i)$

Maksimum i minimum slučajnih promjenjivih

- Neka su slučajne promjenjive Q i W definisane na sledeći način:

$$Q = \max(X, Y) \qquad W = \min(X, Y)$$

- Tada važi:

$$F_Q(q) = P(Q \leq q) = P(X \leq q, Y \leq q)$$

Ako su X i Y nezavisne:

$$F_Q(q) = P(X \leq q)P(Y \leq q) = F_X(q)F_Y(q)$$

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P(\{X \leq w\} \cup \{Y \leq w\})$$
$$= P(X \leq w) + P(Y \leq w) - P(\{X \leq w\} \cap \{Y \leq w\})$$

Ako su X i Y nezavisne:

$$F_W(w) = F_X(w) + F_Y(w) - F_X(w)F_Y(w)$$

Poređenje slučajnih promjenjivih

- Tražimo vjerovanoću da je X>Y:

$$P(X > Y) = \int P(X > y|Y = y) f_Y(y) dy$$

Ako su X i Y nezavisne:

$$P(X > Y) = \int P(X > y) f_Y(y) dy$$

$$= \int (1 - F_X(y)) f_Y(y) dy$$

Momenti slučajne promjenjive

- Matematičko očekivanje

$$E(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx & \text{- Za kontinualne slučajne promjenjive} \\ \sum_i x_i P(X = x_i) & \text{- Za diskretne slučajne promjenjive} \end{cases}$$

- Osobine:

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$ - Ovo važi bez obzira na zavisnost sl. promjenjivih

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$ - Ako su X i Y nezavisne sl. promjenjvie

Momenti slučajne promjenjive

- m-ti momement slučajne promjenjive:

$$E[X^m] = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx$$ - Za kontinualne slučajne promjenjive

$$E[X^m] = \sum_i x_i^m P(X = x_i)$$ - Za diskretne slučajne promjenjive

- **Varijansa**:
  - Drugi moment slučajne promjenjive

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2] = E\left[X^2 + E[X]^2 - 2XE[X]\right] =$$
$$= E[X^2] + E[X]^2 - 2E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2$$

  - Osobine:

$$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$$ - Za **nezavisne** slučajne promjenjive

Momenti slučajne promjenjive

- Standardna devijacija:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

- Koeficijent varijabilnosti:

$$C_X = \frac{\sigma_X}{E[X]}$$

- Centralni moment m-tog reda:

$$E[(X - E[X])^m] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E[X])^m f(x) dx$$

- Kovarijansa:

$$c_{XY} = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Transformacije slučajne promjenjive

- **Funkcija generisanja vjerovatnoće**
  - Primjenjuje se na diskretne slučajne promjenljive poznate raspodjele vjerovatnoća, koje uzimaju nenegativne i cjelobrojne vrijednosti.

$$X(z) = E[z^X] = \sum_k z^k P(X = k), \quad za\ |z| \leq 1$$

  - Radi se o nizu sa nenegativnim koeficijentima, koji je definisan za sve vrijednosti slučajne promjenjive.

$$X(z = 1) = \sum_k P(X = k) = 1$$

$$X(z = 0) = P(X = 0) \leq 1$$

$$|X(z)| = \left|\sum_k z^k P(X = k)\right| \leq \sum_k |z^k P(X = k)| = \sum_k |z^k|\, P(X = k) \leq \sum_k P(X = k) = 1$$

Transformacije slučajne promjenjive

- **Funkcija generisanja vjerovatnoće**

$$X'(z) = \frac{d}{dz}\sum_k z^k P(X=k) = \sum_k \frac{d}{dz} z^k P(X=k) = \sum_k k z^{k-1} P(X=k)$$

$$\Rightarrow X'(z=1) = \sum_k k P(X=k) = E[X]$$

$$X''(z) = \frac{d}{dz}\sum_k k z^{k-1} P(X=k) = \sum_k k \frac{d}{dz} z^{k-1} P(X=k) = \sum_k k(k-1) z^{k-2} P(X=k)$$

$$\Rightarrow X''(z=1) = \sum_k k^2 P(X=k) - \sum_k k P(X=k)$$

$$\boxed{\boldsymbol{X''(z=1) + X'(z=1) = E\left[X^2\right]}}$$

Transformacije slučajne promjenjive

- **Funkcija generisanja vjerovatnoće**
  - Razmotrimo dvije slučajne promjenljive X i Y, i nađimo funkciju generisanja vjerovatnoća njihove sume W=X+Y

$$P(W=j)=\sum_k P(X=k)P(Y=j-k)$$
$$= P(X=k)\otimes P(Y=k) \quad \Leftrightarrow konvolucija$$

  - Iz osobina *z* transformacije slijedi:

$$W(z)=\sum_j \sum_k z^j P(X=k)P(Y=j-k)$$

$$=\sum_k P(X=k)\sum_j z^j P(Y=j-k)$$

$$=\sum_k P(X=k)\, z^k \sum_j z^{j-k} P(Y=j-k) = X(z)Y(z)$$

Transformacije slučajne promjenjive

- **Funkcija generisanja vjerovatnoće**
  - Nekada je poznata funkcija generisanja vjerovatnoća, a treba odrediti raspodjelu vjerovatnoća

$$X(z) = \sum_{k} z^k P(X = k) \quad \rightarrow \quad P(X = k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k} X(z)|_{z=0}$$

Na osnovu razvoja Mac Laurinovog reda

Transformacije slučajne promjenjive

- **Laplasova transformacija**
  - Za slučajnu promjenljivu X (kontinualnu definisanu za $x \in [0,+\infty\}$ ili diskretnu) sa funkcijom gustine raspodjele $f_X(x)$ Laplasova transformacija X(s) je definisana kao:

$$X(s) = E[e^{-sx}] = \begin{cases} \int_0^{\infty} f_X(x) e^{-sx} dx \\ \sum_i P(X = \mathrm{i}) e^{-si} \end{cases}$$

  - Veza između Laplasove transformacije i *karakateristične funkcije* za kontinualne slučajne promjenljive $x \in [0,+\infty\}$ se dobija za $s=-j\omega$
  - Uslov normalizovanosti: $X(s = 0) = 1$
  - Slično kao za karakterističnu funkciju može se pokazati da važi:

$$E[X^m] = (-1)^m X^{(m)}(s = 0)$$