Uvod u teoriju telekomunikacionog saobraćaja

Slučajne promjenljive u telekomunikacionim mrežama

Slučajne promjenljive u telekomunikacionim mrežama

- Diskretne
  - Geometrijska raspodjela
  - Poasonova raspodjela
  - Binomna raspodjela…
- Kontinualne
  - Eksponencijalna raspodjela
  - Pareto raspodjela…

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Geometrijska raspodjela

$$\text{Prob}\{X = k\} = (1-q)q^k, \quad 0 < q < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

- q je bezdimenziona veličina

PRIMJER

Pretpostavimo da za slot vemenskog multipleksa konkuriše više korisnika. Neka je vjerovatnoća da je slot na raspolaganju posmatranom izvoru 1-q. Slot se dodjeljuje drugim izvorima sa vjerovatnoćom q. Slučajna promjenljiva X predstavlja <u>broj neuspjelih pokušaja zauzimanja kanala do prvog uspješnog pokušaja zauzimanja kanala</u>.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Modifikovana geometrijska raspodjela

$$\text{Prob}\{X = k\} = (1-q)q^{k-1}, \quad 0 < q < 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

PRIMJER

Paket se prenosi po linku. Vjerovatnoća neuspješnog prenosa je q. Vjerovatnoća uspješnog prenosa je 1-q. Slučajna promjenljiva X predstavlja broj pokušaja do uspješnog prenosa.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine geometrijske raspodjele

- Uslov normalizovanosti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Prob}\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)q^k = (1-q) \times \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1-q) \times \frac{1}{1-q} = 1$$

- Srednja vrijednost

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \times \mathrm{Prob}\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-q)q^k = (1-q)q \times \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} =$$

$$= (1-q)q \times \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1-q)q \times \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{(1-q)q}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q}$$

Ovo je moguće ako je red konvergentan

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine geometrijske raspodjele

- Srednja kvadratna vrijednost

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \times \mathrm{Prob}\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-q)q^k = (1-q)q \times \sum_{k=0}^{\infty} k(kq^{k-1}) = (1-q)q \times \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} kq^k$$

$$E[X^2] = (1-q)q \times \frac{d}{dq} \frac{q}{(1-q)^2} = (1-q)q \times \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{(1+q)q}{(1-q)^2}$$

Zamjena sume i izvoda

- Varijansa $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = \frac{(1+q)q}{(1-q)^2} - \frac{q^2}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}$

- Funkcija generisanja vjerovatnoća

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \mathrm{Prob}\{X=k\} = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-q)(zq)^k = \frac{1-q}{1-zq}$$

PRIMJER: Osobine modifikovane geometrijske raspodjele.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Poasonova raspodjela

$$\text{Prob}\{X = k\} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}, \quad \rho > 0, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

- ρ je bezdimenziona veličina (intenzitet saobraćaja)

PRIMJER: Pretpostavimo da brojimo telefonske pozive koji tokom posmatranog vremena dolaze na telefonsku centralu. Ako je broj izbrojanih poziva jednak k, a vrijeme t, onda se radi o Poasonovoj raspodjeli (eksperimentalni rezultat). ρ je proporcionalna vremenu t i srednjoj dolaznoj brzini poziva λ.

$$\rho = \lambda t$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine Poasonove raspodjele

- Uslov normalizovanosti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} = e^{-\rho} \times e^{\rho} = 1$$

- Srednja vrijednost

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \times \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} =$$

$$= \rho e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} = \rho e^{-\rho} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!} = \rho e^{-\rho} \times e^{\rho} = \rho$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine Poasonove raspodjele

- Srednia kvadratna vriiednost

$$E\left[X^2\right]=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\times\mathrm{Prob}\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}=e^{-\rho}\times\sum_{k=1}^{\infty}k^2\frac{\rho^k}{k!}=$$

$$=\rho e^{-\rho}\times\sum_{k=1}^{\infty}k\frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!}=\rho e^{-\rho}\times\frac{d}{d\rho}\left[\rho\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!}\right]=$$

$$=\rho e^{-\rho}\times\frac{d}{d\rho}\left[\rho\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\rho^j}{j!}\right]=\rho e^{-\rho}\times\frac{d}{d\rho}\left[\rho e^{\rho}\right]=\rho e^{-\rho}\times\left[e^{\rho}+\rho e^{\rho}\right]=\rho(1+\rho)$$

- Varijansa $\mathrm{Var}[X]=E\left[X^2\right]-\{E[X]\}^2=\rho(1+\rho)-\rho^2=\rho$ $\rightarrow$ E[x]=Var[X]
- Funkcija generisanja vjerovatnoca

$$X(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}z^k\,\mathrm{Prob}\{X=k\}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z\rho)^k}{k!}e^{-\rho}=e^{-\rho}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z\rho)^k}{k!}=$$

$$=e^{-\rho}\times e^{z\rho}=e^{\rho(z-1)}$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Binomna raspodjela

$$\mathrm{Prob}\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad 0<p<1,\ \ k=0,1,2,\ldots.n$$

- p je bezdimenziona veličina

PRIMJER: Pretpostavimo prenos poruke (koja sadrži n paketa) preko kanala koji sa vjerovatnoćom p unosi grešku tokom prenosa paketa. Slučajna promjenljiva koja predstavlja broj pogrešno prenesenih paketa ima binomnu raspodjelu.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine binomne raspodjele

- Uslov normalizovanosti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \underset{\uparrow}{=} [p + 1 - p]^n = 1$$

Njutnova binomna formula

- Srednja vrijednost

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \times \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j![n-1-j]!} p^{j} (1-p)^{n-1-j} = np \times [p + 1 - p]^{n-1} =$$

$$= np$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine binomne raspodjele

- Srednja kvadratna vrijednost

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np + np^2(n-1)$$

- Varijansa

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = np + np^2(n-1) - (np)^2 = np - np^2$$

- Funkcija generisanja vjerovatnoća

$$X(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (zp)^k (1-p)^{n-k} = (1 - p + zp)^n$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Veza binomne i Poasonove raspodjele

Poasonova raspodjela je granični slučaj binomne raspodjele kada broj pokušaja n teži beskonačnosti, a vjerovatnoća dogadjaja p teži 0, pri čemu njihov proizvod ostaje konstantan i jednak ρ.

$$N! \approx \sqrt{2\pi} N^N e^{-N}$$ **Stirlingova formula**

$$p(k)=\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$= \frac{N^N e^{-N}}{k!(N-k)^{N-k} e^{-(N-k)}} \left(\frac{\rho}{N}\right)^k \left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k} = \frac{\rho^k}{k!} \left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k} e^{-k} \left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k} =$$

$$= \frac{\rho^k}{k!} e^{-k} \left(\left(1-\frac{k}{k-N}\right)^{\frac{k-N}{k}}\right)^{-k} \left(\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{\frac{N}{\rho}}\right)^{\frac{\rho}{N}(N-k)} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-k} e^{k} e^{-\rho} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Eksponencijalna raspodjela

$$f_X(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

- μ predstavlja srednju brzinu dimenzije vrijeme^{-1}

$$F_X(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

- Mnogi fenomeni u telekomunikacionim mrežama se mogu opisati ovom raspodjelom (trajanje telefonskog poziva, interval između dva poziva koji dolaze na telefonsku centralu, faza tišine za izvor govornog saobraćaja,...)

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine eksponencijalne raspodjele

- Uslov normalizovanosti

$$\int_0^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \mu e^{-\mu x} dx = -\lim_{a\to+\infty}[e^{-\mu a}]_0^a = 1$$

- Srednja vrijednost

$$E[x] = \int_0^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} \mu x e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} z e^{-z} dz =$$

$$= \frac{1}{\mu}\left\{\left[z\left(-e^{-z}\right)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-z} dz\right\} = \frac{1}{\mu}\int_0^{\infty} e^{-z} dz = \frac{1}{\mu}$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine eksponencijalne raspodjele

- Srednja kvadratna vrijednost

$$E\left[X^2\right] = \int_0^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 \mu e^{-\mu x} dx \underset{z=\mu x}{=} \frac{1}{\mu^2}\int_0^{+\infty} z^2 e^{-z} dz =$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left\{\left[z^2 \times \left(-e^{-z}\right)\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} z\left(-e^{-z}\right)dz\right\} = \frac{2}{\mu^2}\int_0^{+\infty} z e^{-z} dz = \frac{2}{\mu^2}$$

- Varijansa $\mathrm{Var}[X] = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2} \rightarrow$ Var[X]=E[X]^2
- Koeficijent varijacije C_X=1
- Laplasova transformacija funkcije gustine vjerovatnoće

$$X(s) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{sx} dx = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine eksponencijalne raspodjele

- Memoryless osobina
  - Pretpostavimo da X predstavlja poziv koji je započeo u trenutku x=0
  - Posmatrajmo slučajnu promjenljivu X u trenuku x=τ, i pretpostavimo da je poziv još aktivan
  - Potrebno je da odredimo funkciju raspodjele slučajne promjenljive R=X-τ, koja predstavlja 'ostatak vremena'

$$F_R(t) = \text{Prob}\{R \le t\} = \text{Prob}\{X - \tau \le t \mid X > \tau\} =$$
$$= \frac{\text{Prob}\{X - \tau \le t, X > \tau\}}{\text{Prob}\{X > \tau\}} = \frac{\text{Prob}\{\tau < X \le t + \tau\}}{1 - \text{Prob}\{X \le \tau\}} =$$
$$= \frac{\text{Prob}\{X \le t + \tau\} - \text{Prob}\{X \le \tau\}}{1 - \text{Prob}\{X \le \tau\}} = \frac{F_X(t+\tau) - F_X(\tau)}{1 - F_X(\tau)}$$

  - Odgovarajuća funkcija gustine raspodjele je

$$f_R(t) = \frac{d}{dt} F_R(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{F_X(t+\tau) - F_X(\tau)}{1 - F_X(\tau)}\right] = \frac{f_X(t+\tau)}{1 - F_X(\tau)}$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine eksponencijalne raspodjele

- Memoryless osobina
  - Prethodne relacije važe za bilo koju slučajnu promjenljivu X, pod imenom teorema "više od života"
  - Vidimo da obije funkcije zavise od trenutka τ, kada se ponovo slučajna promjenljiva razmatra
  - U specijalnom slučaju eksponencijalne raspodjele važi

$$F_R(t) = \frac{F_X(t+\tau) - F_X(\tau)}{1 - F_X(\tau)} = \frac{1 - e^{-\lambda(t+\tau)} - \left[1 - e^{-\lambda\tau}\right]}{1 - \left[1 - e^{-\lambda\tau}\right]} = 1 - e^{-\lambda t}$$
$$f_R(t) = \frac{f_X(t+\tau)}{1 - F_X(\tau)} = \frac{\lambda e^{-\lambda(t+\tau)}}{1 - \left[1 - e^{-\lambda\tau}\right]} = \lambda e^{-\lambda t}$$

  - Dakle slučajna promjenljiva 'ostatak vremena' ima i dalje eksponencijalnu raspodjelu kao slučajna promjenljiva X i ne zavisi od τ!!!!!!!

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine eksponencijalne raspodjele

- Memoryless osobina
  - Ova osobina se široko primjenjuje u teoriji redova čekanja
  - Slučajnu promjenljiva sa eksponencijalnom raspodjelom ima memoryless osobinu jer odgovarajuća promjenljiva ‘ostatak vremena’ ima identičnu eksponencijalnu raspodjelu
  - Može se pokazati da je eksponencijalna raspodjela jedina kontinualna raspodjela sa ovom osobinom.
  - Može se pokazati da je geometrijska raspodjela jedina diskretna raspodjela sa ovom osobinom.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine eksponencijalne raspodjele

- Minimum dvije slučajne promjenljive sa eksponencijalnom raspodjelom
  - Razmotrimo dvije slučajne promjenljive T_1 i T_2 koje imaju eksponencijalnu raspodjelu

$$F_{T1}(t) = 1-e^{-\lambda 1t}$$

$$F_{T2}(t) = 1-e^{-\lambda 2t}$$

$$T = \min\{T_1, T_2\}$$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t) \times F_{T_2}(t) = \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 t} + 1 - e^{-\lambda_2 t} - \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right) \times \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) = \\ &= 1 - e^{-\lambda_1 t - \lambda_2 t} = 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \end{aligned}$$

  - Slučajna promjenljiva T ima eksponencijalnu raspodjelu sa srednjom dolaznom brzinom $\lambda_1 + \lambda_2$
  - Lako je pokazati da ovo važi i za opšti slučaj, proizvoljnog broja slučajnih promjenljivih

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine eksponencijalne raspodjele

- Minimum dvije slučajne promjenljive sa eksponencijalnom raspodjelom
  - Razmotrimo multiplekser sa četiri kanala
  - Korisnik zatiče sva četiri kanala zauzeta.
  - Pretpostavimo da vrijeme posluživanja korisnika ima eksponencijalnu raspodjelu srednje brzine μ. Treba odrediti distribuciju vremena dok se jedan od kanala ne oslobodi.
  - Pristigli korisnik 'zna' da preostalo vrijeme posluživanja korisnika na šalterima ima eksponecijalnu raspodjelu srednje brzine μ (memoryless).
  - Korisnik će zauzeti prvi slobodni kanal.
  - Vrijeme čekanja je prema tome jednako minimumu četiri eksponencijalne raspodjele srednje brzine μ. To znači da je odgovarajuća raspodjela eksponencijalna sa brzinom 4μ.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine eksponencijalne raspodjele

- Upoređenje eksponencijalne raspodjele i druge raspodjele
  - Pretpostavimo dvije slučajne promjenljive X (eksponencijalna) i Y (proizvoljna)

$$\mathrm{Prob}\{X > Y\} = \int_0^{+\infty} [1 - F_X(x)] f_Y(x) dx = \int_0^{+\infty} f_Y(x) e^{-\mu x} dx = $$
$$= LT\{f_Y(x)\}\Big|_{s=\mu}$$

  –
  - gdje $\mathrm{LT}\{f_Y(x)\}$ predstavlja Laplasovu transformaciju funkcije $f_Y(x)$
  - Ako Y ima eksponencijalnu raspodjelu onda važi

$$LT\{f_Y(x)\} = LT\{\lambda e^{-\lambda t}\} = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$
$$\mathrm{Prob}\{X > Y\} = \frac{\lambda}{\lambda + s}\Big|_{s=\mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Sporadičan saobraćaj

- Poasonova i binomna raspodjela se tradicionalno koriste za modelovanje saobraćaja u mreži. Nedavne analize pokazuju da ovi modeli nisu adekvatni za sporadičan saobraćaj (bursty) zato što saobraćaj često ima izuzetno velike trenutne vrijednosti, iako su srednje vrijednosti male.
- To znači da saobraćaj u telekomunikacionim mrežama može imati visoku varijansa u širokom opsegu vremenskih intervala, tako da grupni saobraćaj nije usrednjen ako sakupimo kompletan saobraćaj tokom dugog vremenskog perioda.
- Udruživanjem saobraćaja više bursty izvora rezultantni saobraćaj ostaje bursty (self-similarity).
- Za ovakav saobraćaj se koriste heavy-tailed raspodjele od kojih je najpoznatija Pareto raspodjela.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Pareto raspodjela

- Funkcija raspodjele

$$F(x) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha}$$

- Funkcija gustine raspodjela

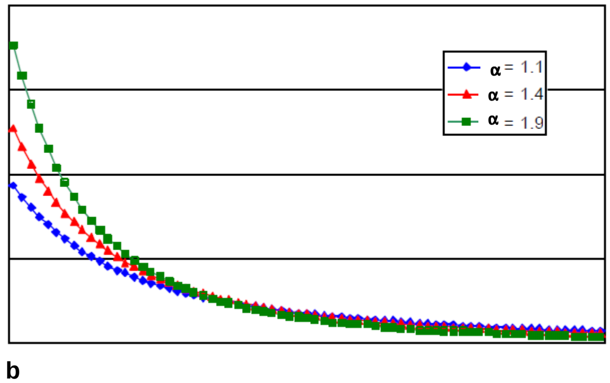
$$f(x) = \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \qquad x \geq b$$

  - α je parametar oblika koji je pozitivan realan broj, dok je b minimalna vrijednost slučajne promjenljive

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Pareto raspodjela

- Kada je $\alpha \leq 2$ varijansa je konačna.
- Kada je $\alpha \leq 1$ srednja vrijednost je konačna
- Paretova raspodjela se koristi za modelovanje self-similar saobraćaja ako je α između 1 i 2.



Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine Pareto raspodjele

- Srednja vrijednost

$$E(x) = \frac{\alpha b}{\alpha - 1}$$

- Varijansa

$$\sigma^2 = \frac{\alpha b^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}$$

- Tipično se uzima da je α između 1.4 i 1.6
- Vjerovatnoća da je slučajna promjenljiva veća od x opada geometrijski.

$$p(X > x) = 1 - F(x) = \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha}$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine Pareto raspodjele

- Laplasova transformacija

$$f(x) = \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \quad b \le x < \infty$$

$$X(s) = \int_{b}^{\infty} \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} e^{-sx} dx = \alpha b^{\alpha} \int_{b}^{\infty} \frac{e^{-sx}}{x^{\alpha+1}} dx$$

Teško izračunati jer je
α realan pozitivan broj

$$X(s) = \alpha b^{\alpha} s^{\alpha} \Gamma(-\alpha, sb), \quad gdje \quad je \ \Gamma(-\alpha, sb) = \int_{sb}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{\alpha+1}} dt$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Metoda procjene raspodjele slučajne promjenljive dobijene mjerenjima koja ima srednju vrijednost jednaku devijaciji.

- Ako je C_X<1, treba koristiti neku regularniju raspodjelu npr Erlangovu (slučajna promjenljiva koja se dobija sumiranjem nezavisnih eksponencijalnih slučajnih promjenljivih)
- Ako je C_X=1, mora se koristiti eksponencijalna raspodjela
- Ako je C_X>1, treba koristiti neku raspodjelu koja je varijabilnija od eksponencijalne npr Hiper-eksponencijalna raspodjela