8. Matematičko modelovanje

Prof.dr Igor Radusinović

igorr@ucg.ac.me

dr Slavica Tomović

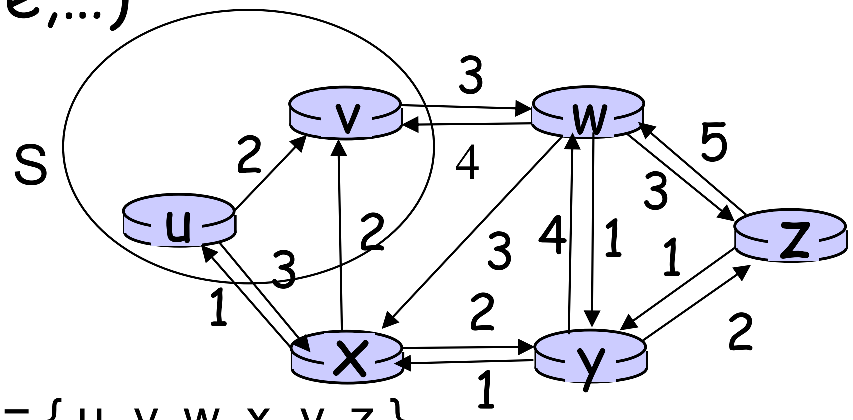
slavicat@ucg.ac.me

Matematičko modelovanje

- Grafovi
- Jackson-ove mreže
- Kontrola zagušenja
- Dinamičko rutiranje i kontrola zagušenja
- Bežično čvorište

Grafovi

- Čvorovi
- Grane
- Težinski faktori grana
- "Cut" (podskup skupa čvorova)
- Široka primjena (algoritmi rutiranja, modelovanje P2P komunikacije,...)

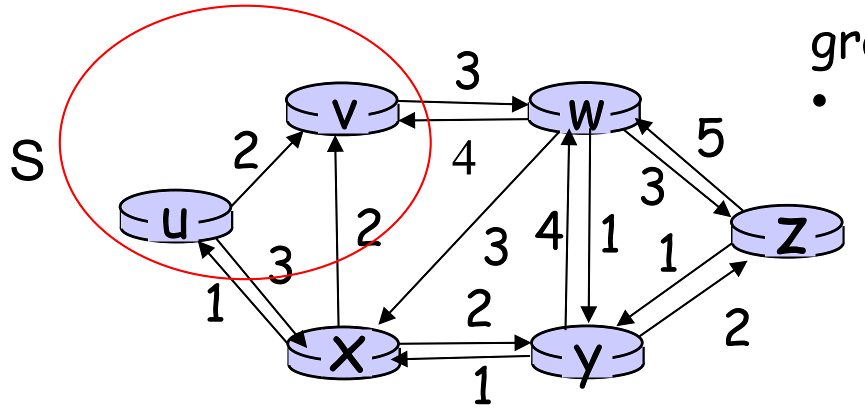


Graf: G = (N,E)

N = skup čvorova = { u, v, w, x, y, z }
E = skup grana ={ (u,v), (u,x), (v,x), (v,w), (x,w), (x,y), (w,y), (w,z), (y,z) }
S = cut = { u, v}
S^C = N/S = { x,y,w,z}

Grafovi

Kapacitet cut-a

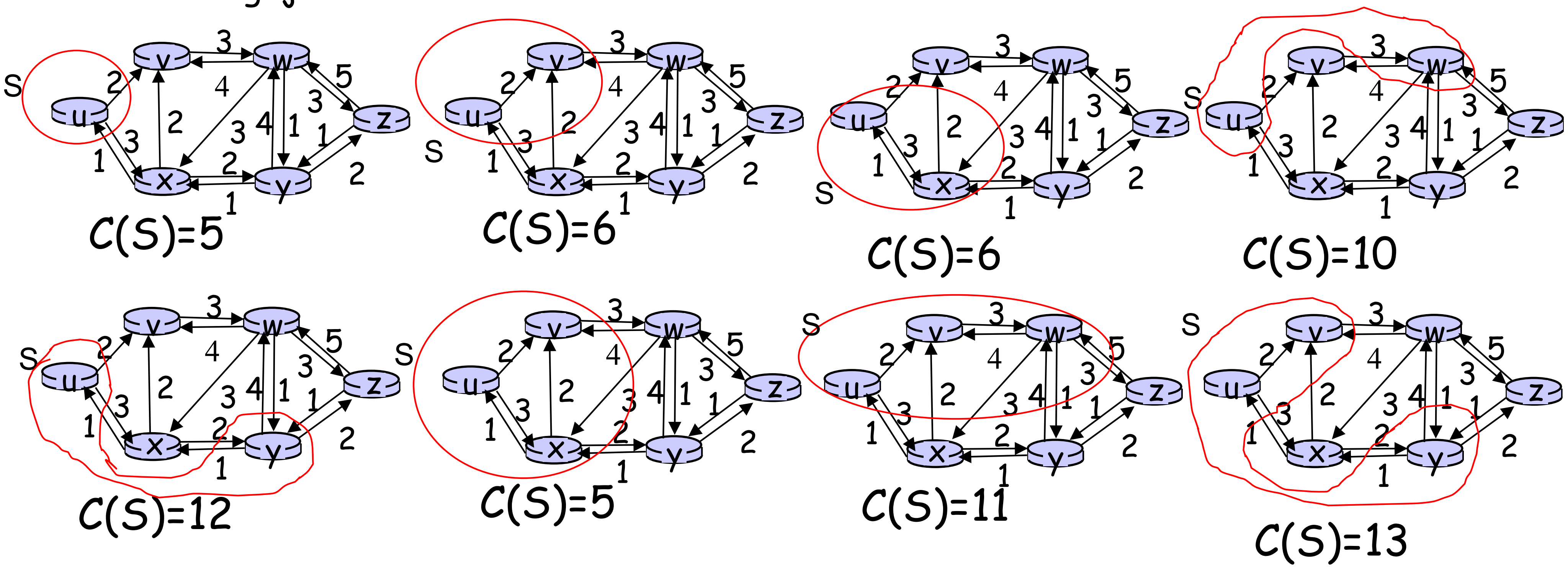


- Kapacitet cut-a S jednak je sumi težinskih grana koje izlaze iz njega i ulaze u S^C
- c(S)=c(v,w)+c(u,x)=3+3=6

Grafovi

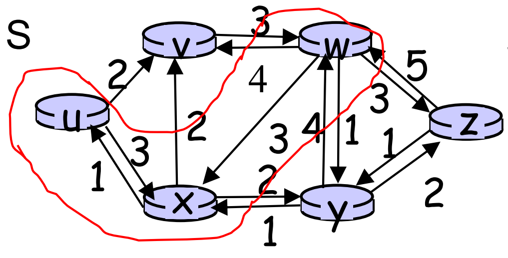
MAX-FLOW MIN-CUT teorema

- Rješava problem određivanja maksimalne propusnosti toka koji se može uspostaviti između dva čvorišta
- Neka težinski faktor predstavlja kapacitet linka
- Max-flow min-cut teorema kaže da je maksimalna vrijednost propusnosti toka koji se može uspostaviti između čvorova u i z jednaka minimalnom kapacitetu cut-ova S gdje $u \in S$ a $z \in S^c$

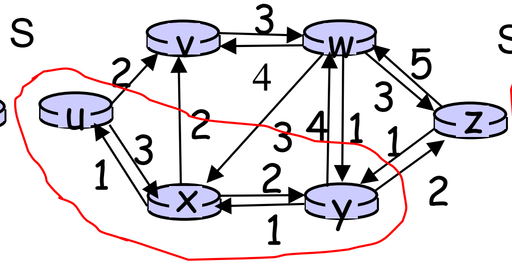


Grafovi

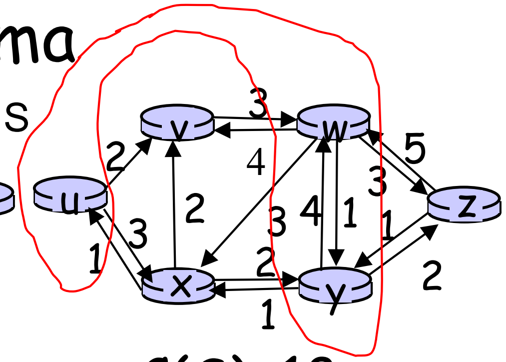
MAX-FLOW MIN-CUT teorema



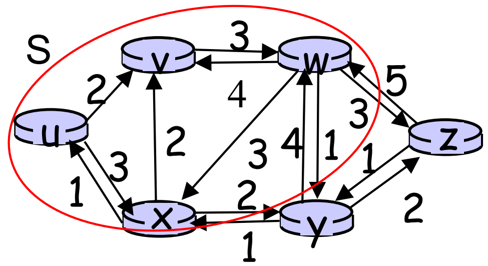
C(S)=12



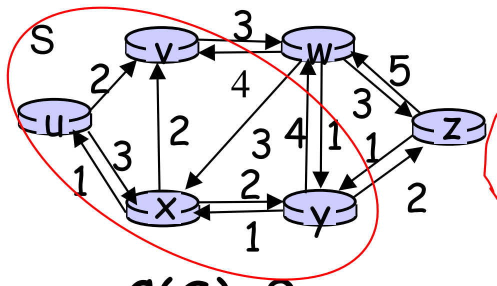
C(S)=10



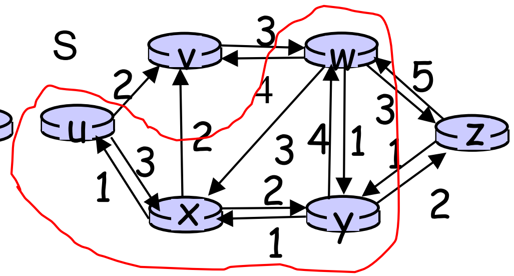
C(S)=18



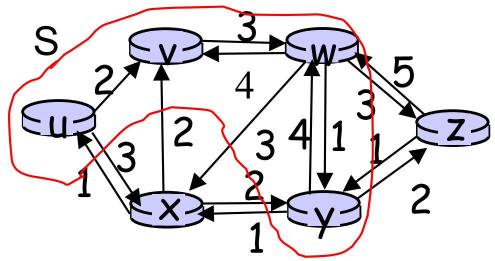
C(S)=6



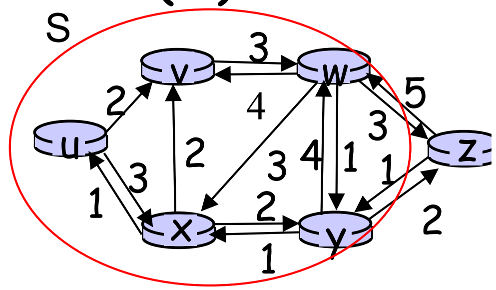
C(S)=9



C(S)=13



C(S)=12



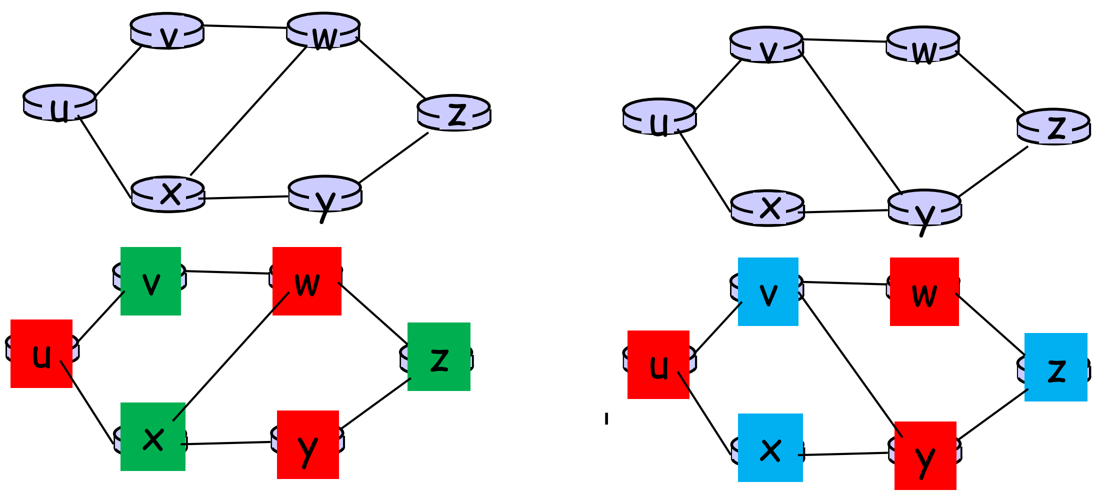
C(S)=5

Očigledno je maksimalna propusnost toka od u do z za mrežu abstrahovanu zadatim grafom jednaka 5.

Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli

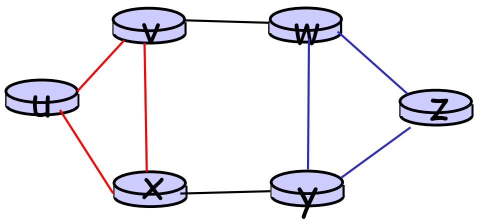
- Neusmjereni graf se sastoji od čvorova povezanih neusmjerenim granama.
- Dva čvora su susjedna ako su povezani granom
- Graf je povezan ako se svaki čvor može doseći iz svakog čvora
- Graf je potpuno povezan ako su bilo koja dva čvora povezana granom.
- Stepen čvora je jednak njegovom broju susjeda
- Maksimalni stepen grafa jednak je maksimalnom stepenu njegovih čvorova.
- Bojenje grafa predstavlja dodjelu boje svakom čvoru tako da nijedna dva susjeda nemaju istu boju.
- Minimalan potreban broj boja za bojenje grafa zove se hromatski broj grafa.



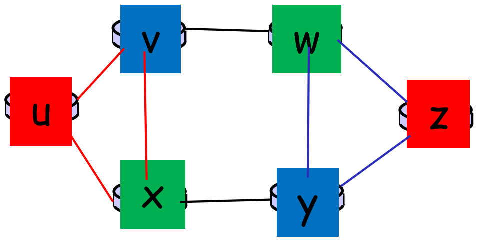
Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli

- Clique je podskup neusmjerenog grafa kod koga su svaka dva čvora susjedi
- Svi čvorovi u clique moraju biti različite boje
- Maksimalan broj čvorova u clique predstavlja donju granicu hromatskog broja grafa.

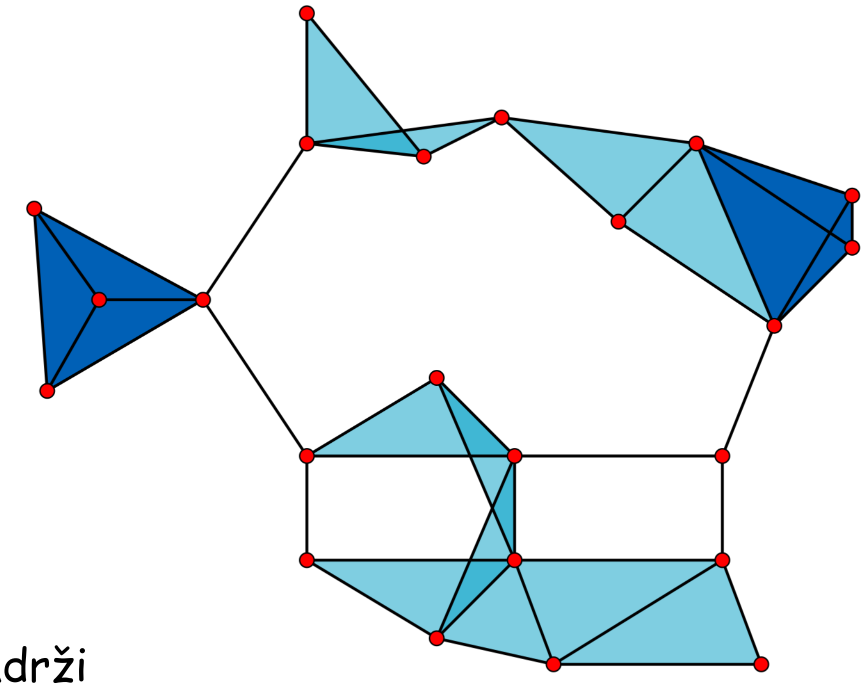


Koliki je hromatski broj ovog grafa (ima 2 clique)?



Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli



Graf sa slike sadrži

- 23 jednočvorna clique-a (čvorovi),
- 42 dvočvorna clique-a (grane),
- 19 tročvornih clique-ova (svijetlo plavi trouglovi), i
- 2 četvoročvorna clique-a (tamno plave površine).

Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli

Brook-ova teorema

U povezanom grafu u kome svaki čvor ima najviše Δ susjeda, čvorovi mogu biti obojeni sa svega Δ boja, izuzev u slučajeviama:

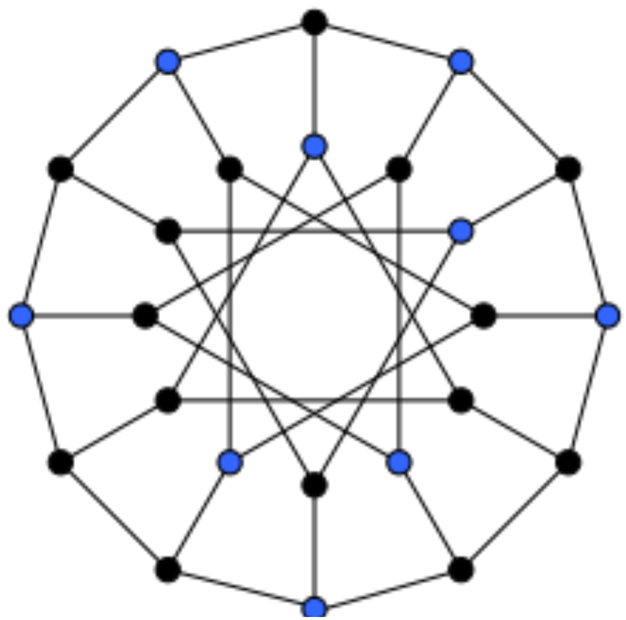
- Potpuno povezanog grafa
- Grafova u formi prstena

kojima je potrebno $\Delta + 1$ boja.

Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli

- Neka čvorovi predstavljaju bežična čvorišta
- Čvorovi su povezani granom ako jedan drugom izazivaju interferenciju
- Ovako definisan graf je graf konflikta
- Ako na ovakvom grafu primijenimo bojenje grafa onda svi čvorovi koji imaju istu boju mogu da šalju podatke bez interferencije i čine nezavisan skup.
- Maksimalni nezavisni skup grafa G je nezavisni skup sa najvećim brojem čvorova, koji predstavlja broj nezavisnosti grafa G.



Devet plavih čvorova formiraju maksimalni nezavisni podskup grafa (Generalizovani Petersonov graf)

Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli

Primjena 1

- Neka čvorovi grafa predstavljaju WiFi access pointe.
- Boje predstavljaju različite kanale.
- Bojenje osigurava da access point-i međusobno ne interferiraju
- Slična primjena je i kod baznih stanica

Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli

Primjena 2

- Alokaciji vremenskih slotova u bežičnoj mesh mreži sa J čvorišta.
- Neka paketi dolaze do bežičnih čvorišta koji ih moraju poslati.
- Radi jednostavnosti neka se paketi šalju samo jedanput a onda napuštaju mrežu.
- Neka je λ_i dolazna brzina paketa na čvoru i (i=1,2,…,J)
- Vektor $\lambda=(\lambda_{1,} \lambda_{2,} \lambda_3,\ldots, \lambda_J)$
- Postavlja se pitanje kada je moguće da bežični čvorovi šalju podatke ovim brzinama tako da nema interferencije (λ je *feasible* brzina)?
- Bežični čvorovi se mogu organizovati u nezavisne skupove S čiji članovi neinterferiraju.
- Neka su (S_1, S_2, …, S_K) maksimalni nezavisni skupovi a $p=(p_1, p_2,\ldots, p_K)$ vektor vjerovatnoća koje zadovoljavaju uslov normalizovanosti ($p_1 + p_2 + \ldots + p_K = 1$)
- Ako čvorovi nezavisnog seta S_K šalju podatke tokom p_k dijela vremena tada čvor i šalje podatke tokom

$$\sum_{\substack{k=1 \\ i \in S_K}}^{K} p_k$$

dijela vremena

- Do interferencije neće doći ako za svako čvorište važi

$$\lambda_i \leq \sum_{\substack{k=1 \\ i \in S_K}}^{K} p_k$$

Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli

Primjena 2

Prethodno se implementira na sledeći način

- Izračuna se vektor p
- Kreira se slot koji je dovoljno velik za prenos paketa
- Odabere se neki broj M
- Periodično se alocira svakih M slotova približno $p_k M$ slotova čvorovima nezavisnog seta S_k
- Ovaj TSMP (Time-Synchronized Mesh Protocol) protokol je pogodan kada se brzine slanja sporije mijenjaju u odnosu na vrijeme koje je potrebno za izračunavanje vektora p i realokacije vremenskih slotova.

Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli

Primjena 3

- Q-CSMA (Queue-based Carrier Sense Multiple Access)
- Kada čvorište želi da šalje podatke čeka dok se kanal ne oslobodi
- Kada se kanal oslobodi čvorište odbrojava timer čija je početna vrijednost slučajan broj čija srednja vrijednost, između ostalog, zavisi od broja čvorova koji se takmiče za kanal.
- Timer odbrojava samo kada je kanal slobodan.
- Kada timer istekne čvorište šalje frejm.
- Može se pokazati da i za ovaj MAC protocol važi

$$\lambda_i \leq \sum_{\substack{k=1 \\ i \in S_K}}^{K} p_k$$

- Sa nekim pozitivnim gap-om ε.
- Na žalost, kašnjenje paketa raste kada je ε malo.

Grafovi

Bojenje grafa i MAC protokoli

Primjena 3

- Q-CSMA se kombinuje sa kontrolom prihvatanja paketa u bafer koja prestaje sa prihvatanjem paketa ako popunjenost bafera pređe neku vrijednost koja zavisi od nivoa prioriteta.
- Kontrola prihvatanja efikasno podešava brzinu tako da je ona feasible i favorizuje pakete visokog prioriteta.
- Može da bira kašnjenja koja su prihvatljiva visoko prioritetnim paketima
- Prednost Q-CSMA u odnosu na TSMP je što ne zahtijeva trenutno prepoznavanje promjene uslova i automatsku adaptaciju i ne troši resurse prilikom alociranja slotova.

Jackson-ove mreže

- Najjednostavniji model mreže M/M/1 redova čekanja
- Neka na ulaze Jackson-ove mreže sa J redova čekanja dolazi C različitih klasa saobraćaja koje imaju Poasonove raspodjele parametara λ_c (c=1,2,…,C)
- Paket klase c se prenosi preko nekog skupa redova čekanja $S(c) \subset \{1,2,\ldots,J\}$ pri čemu se vodi računa o redosledu prolaska
- Pri tome pretpostavka je da paket prolazi kroz red čekanja samo jedanput
- Ukupna dolazna brzina je

$$\lambda = \sum_{c=1}^{C} \lambda_c$$

- Brzina kojim paketi dolaze na neki red čekanja j iznosi

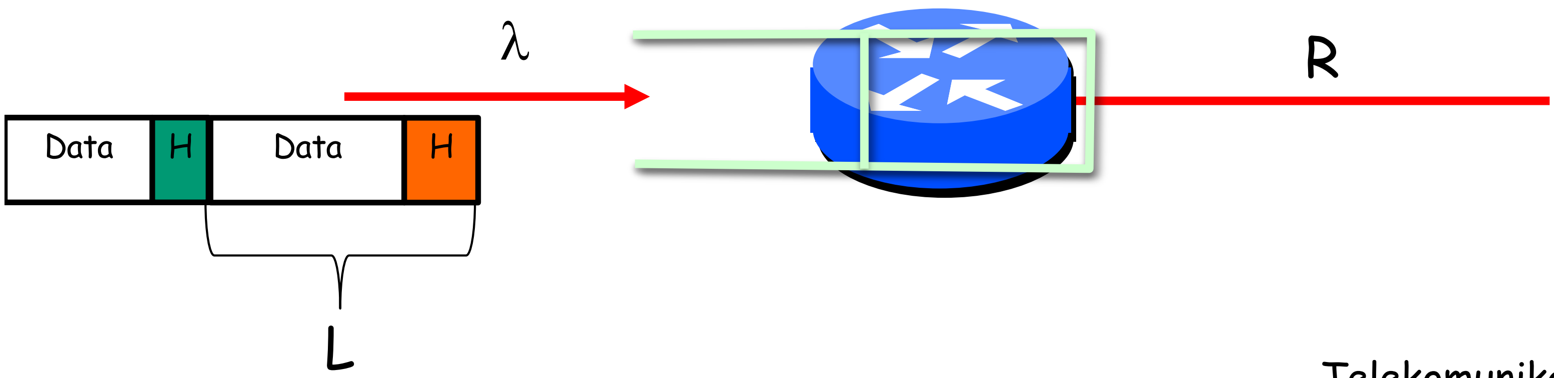
$$\gamma_j = \sum_{\substack{c=1 \\ j\in S(c)}}^{C} \lambda_c$$

- Odnosno jednaka je sumi Poasonovih brzina klasa koje prolaze kroz njega

Primjena redova čekanja

Primjer 1

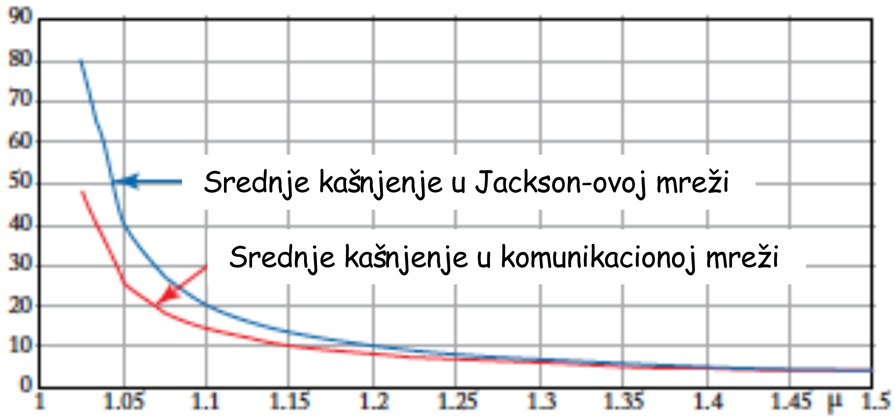
- U telekomunikacionim mrežama vrijeme posluživanja paketa je jednako kašnjenju uslijed prenosa
- Neka je dužina paketa L promjenljiva i može može opisati nezavisnom eksponencijalnom slučajnom promjenljivom srednje dužine $\bar{L}$ bita
- Ako je brzina prenosa na linku R onda vrijeme posluživanja ima eksponencijalnu raspodjelu parametra $\mu = \frac{\bar{L}}{R}$.
- Dodatno ako se dolazak paketa može opisati Poasonovim dolaznim procesom parametra λ , onda se red čekanja u baferu može približno modelovati M/M/1 redom čekanja.



Primjena redova čekanja

Primjer 2

- Pretpostavimo da nakon napuštanja reda čekanja (mrežnog čvorišta) paketi stižu na sledeći red čekanja (mrežno čvorište) i dalje nastavljaju saglasno store & forward komutaciji
- Jasno je da vremena dolazaka nijesu nezavisna od vremena posluživanja
- Vrijeme dolaska između dva susjedna paketa n i n+1 ne može biti manje od trajanja prenosa paketa n
- Prema tome, vrijeme dolaska paketa n+1 zavisi od vremena odlaska paketa n u narednom redu čekanja
- Mreža sa dva redno povezana reda čekanja zato nije prava Jackson-ova mreža.
- Međutim, rezultati simulacija pokazuju da su odstupanja mala tako da se dva redno povezana reda čekanja mogu aproksimirati i modelovati Jackson-ovom mrežom.



Primjena redova čekanja

Primjer 3

- Balansiranje saobraćaja je važna funkcija mreže koja se može modelovati Jackson-ovom mrežom
- Neka postoje dva puta kroz mrežu za prenos paketa od izvora do destinacije preko kojih se odgovarajućim balansiranjem saobraćaja može smanjiti kašnjenje koje unosi mreža.
- Neka paketi dolaze saglasno Poasonovoj raspodjeli parametra λ i mogu nastaviti preko jednog od dva reda čekanja čije su brzine posluživanja μ_1, odnosno μ_2.
- Pretpostavka je da sa vjerovatnoćom p paketi odlaze na prvi red čekanja a sa vjerovatnoćom 1-p na drugi, pri čemu je izbor nezavisan.
- Prethodno znači da paketi na ulaz prvog bafear dolaze saglasno Poasonovoj raspodjeli parametra λp, odnosno na ulaz drugog bafera saglasno Poasonovoj raspodjeli parametra λ(1-p)
- Ako je $\lambda p < \mu_1$ i $\lambda(1-p) < \mu_2$ onda su srednja kašnjenja koje unose prvi i drugi red čekanja

$$\frac{1}{\mu_1 - \lambda p}, odnosno \frac{1}{\mu_2 - \lambda(1-p)}$$

- Pošto paket prvo kašnjenje ima sa vjerovatnoćom p, a drugo sa vjerovatnoćom 1-p, srednje kašnjenje koje unosi balanser saobraćaja iznosi

$$\bar{T} = \frac{p}{\mu_1 - \lambda p} + \frac{1-p}{\mu_2 - \lambda(1-p)}$$

- Može se pokazati da optimalno balansiranje (p=0,5) ne garantuje minimalno $\bar{T}$
- Ako se pretpostavi da je $\lambda < \mu_1 + \mu_2$ minimalno $\bar{T}$ se dobija za

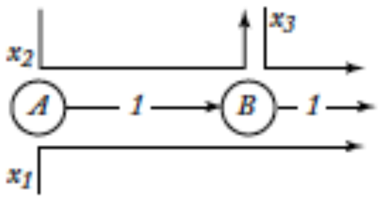
$$p = \frac{\lambda\sqrt{\mu_1} + \mu_1\sqrt{\mu_2} - \mu_2\sqrt{\mu_1}}{\lambda\left(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}\right)}$$

Kontrola zagušenja

- Već je rečeno da kontrola zagušenja predstavlja sprečavanje zagušenja mreže ili nekog njenog dijela
- Pokazano je da TCP kontrola zagušenja može veoma efikasno pristupom od kraja do kraja spriječiti pojavu velikih zagušenja u mreži
- Takođe, može se pokazati da TCP kontrola zagušenja garantuje fer podjelu resursa linka koji dijeli više TCP saobraćajnih tokova.
- Neka na ulaz mreže sa dva čvora (A i B) dolaze tri saobraćajna toka brzina x_1, x_2 i x_3. Brzine tokova su feasible ako važe sledeće relacije

$$g_a(x) := x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \; i \; g_b(x) := x_1 + x_3 - 1 \leq 0$$

- a i b su prvi i drugi link
- Brzine x_1 =0, x_2 =1 i x_3 =1 su feasible, a može se pokazati da obezbjeđuju maksimalnu propusnost (x_1+x_2 +x_3) mreže koja je jednaka 2
- Ova maksimalna propusnost nije fer prema prvom toku koji ne dobija ni jedan dio kapaciteta mreže
- Brzine 1/2, 1/2 i 1/2 su feasible, obezbjeđuju ravnopravnost svih tokova ali je propusnost mreže 1,5



Kontrola zagušenja

- Treba izbalansirati maksimizovanje propusnosti mreže i fer raspodjelu njenih resursa
- Neka je u(x_i) utility funkcija za tok 1 koja predstavlja koliko je korisniku vrijedno da brzina toka i iznosi x_i
- Utility funkcija raste sa sa povećanjem x_i ali je taj rast sve manji kako se x_i povećava (konkavna funkcija)
- Cilj je da se pronađe $x = (x_1, x_2, x_3)$ tako da je $\mathrm{f}(x) = u(x_1) + u(x_2) + u(x_3)$ maksimalno
- Neka je

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}, \alpha \neq 1 \\ log(x), \alpha = 1 \end{cases}$$

- Za $\alpha \neq 1$ cilj je maksimizovati funkciju

$$f(x) = \frac{1}{1-\alpha} ({x_1}^{1-\alpha} + {x_2}^{1-\alpha} + {x_3}^{1-\alpha})$$

Uz uslov da važi

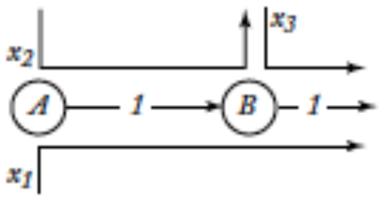
$$x_1 + x_2 \leq 1 \; i \; x_1 + x_3 \leq 1$$

- Kako f(x) raste za svako x_i jasno je da rješenje mora biti tako da važi

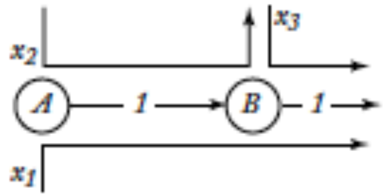
$$x_1 + x_2 \leq 1 \; i \; x_1 + x_3 \leq 1$$

- Odnosno

$$x_2 = x_3 = 1 - x_1$$



Kontrola zagušenja



- Na osnovu prethodnog

$$f(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left({x_1}^{1-\alpha} + 2(1-x_1)^{1-\alpha}\right)$$

Koja je maksimalna za

$$x_1 = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{\alpha}}}$$

- Rješenje $(x_1, 1-x_1, 1-x_1)$ se kreće od (0,1,1) koje obezbjeđuje maksimalnu propusnost do (1/2,1/2,1/2) koja obezbjeđuje fer podjelu resursa
- Zanimljivo je vidjeti vrijednosti x_1, x_2 i x_3 koje maksimizuju funkciju f(x) u zavisnosti od α
- Vidi se da promjena α od nule do beskonačnosti znači promjenu od maksimizovane sume brzina do maksimizovanja minimalne pojedinačne brzine

- Izbor parametra α za razmatrani slučaj obezbjeđuje mogućnost balansiranja dva oprečna zahtjeva: maksimalne propusnosti mreže i fer podjele resursa

Kontrola zagušenja

- U prethodnom slučaju je razmatrana u potpunosti poznata mreža što je rijedak slučaj
- U opštem slučaju se koristi Lagranžova funkcija

Teorema: Neka je f(x) konkavna funkcija, a $g_j(x)$ (j=a,b) konveksna funkcija po x. Tada x* predstavlja rješenje

$$Maksimizuj\ f(x)$$

$$pod\ uslovom\ da\ je\ g_j(x) \leq 0, j = a, b$$

Ako i samo ako x* zadovoljava prethodno ograničenje i x* maksimizuje

$$L(x, \lambda^*) := f(x) - \lambda_a^* g_a(x) - \lambda_b^* g_b(x)$$

za $\lambda_a^* \geq 0\ i \lambda_b^* \geq 0$ takve da je $\lambda_j^* g_j(x^*) = 0, za\ j = a, b$

Dodatno ako je

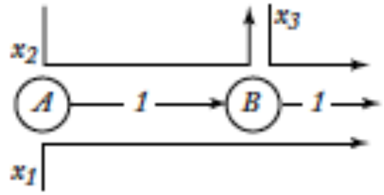
$$L(x(\lambda), \lambda^*) = \max_x L(x, \lambda\ )$$

Onda λ_a^* i λ_b^* minimizuju

$$L(x(\lambda), \lambda)$$

- L se naziva Lagranžeovom funkcijom a λ_a^* i λ_b^* Lagranžeovim množiocima

Kontrola zagušenja



- Primjenom prethodnog na ranije razmatranu mrežu dobija se

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda_a\, g_a(x) - \lambda_b\, g_b(x) = (u(x_1) - (\lambda_a + \lambda_b)x_1) + (u(x_2) - \lambda_a x_2) + (u(x_3) - \lambda_b x_3)$$

- Treba pronaći x(λ) koja maksimizuje $L(x,\lambda)$ za fiksnu vrijednost $\lambda = (\lambda_a, \lambda_b)$
- x_1 maksimizuje $u(x_1) - (\lambda_a + \lambda_b)x_1$, x_2 maksimizuje $u(x_2) - \lambda_a x_2$, a x_3 e $u(x_3) - \lambda_b x_3$
- Fizički smisao prethodnog je da svaki link j „tarifira" korisniku svakog toka „cijenu"λ_j po jedinici brzine.
- Na taj način korisnik prvog toka „plaća"$(\lambda_a + \lambda_b)x_1$ zato što tok ide preko dva linka. Zbog toga korisnik bira x_1 tako da maksimizuje utility funkciju $u(x_1) - (\lambda_a + \lambda_b)x_1$
- Slično važi i za ostala dva toka
- Ključno zapažanje je da je maksimizacija L podijeljena na maksimizaciju za svakog korisnika.
- Uparivanje varijabli x u originalni problem je urađeno zbog uslova ograničenja.
- Maksimizacija L nije uslovljena ograničenjima i rastavljena je na posebne probleme za svaku varijablu.
- Prethodna dekompozicija se dešava jer su uslovna ograničenja linearna u tokovima, tako da se varijabla x_i pojavljuje u različitim izrazima sume L.
- Tekođe, treba primijetiti da je cijena koji svaki link „tarifira" za svaki od svojih tokova ista.

Kontrola zagušenja

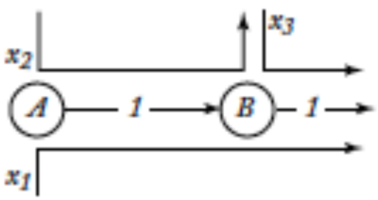
- Da bi se pronašli množitelji λ^* koristi se gradijentni algoritam za minimizaciju $L(x,\lambda)$

$$\lambda_j(n+1) = \lambda_j(n) - \beta \frac{d}{d\lambda_j} L(x(\lambda),\lambda) = \lambda_j(n) + \beta g_j(x)$$

- Gdje je x vektor brzina u koraku n a β je parametar koji kontroliše korak algoritma
- U svakom koraku n algoritam podešava λ u smjeru suprotnom od gradijenta funkcije $L(x(\lambda),\lambda)$ koji predstavlja najstrmiji pad funkcije.
- Za novu vrijednost cijene korisnici podešavaju svoje brzine tako da se približavaju $x(\lambda)$ za novu cijenu.
- To znači da korisnik 1 u koraku n određuje svoju brzinu na sledeći način

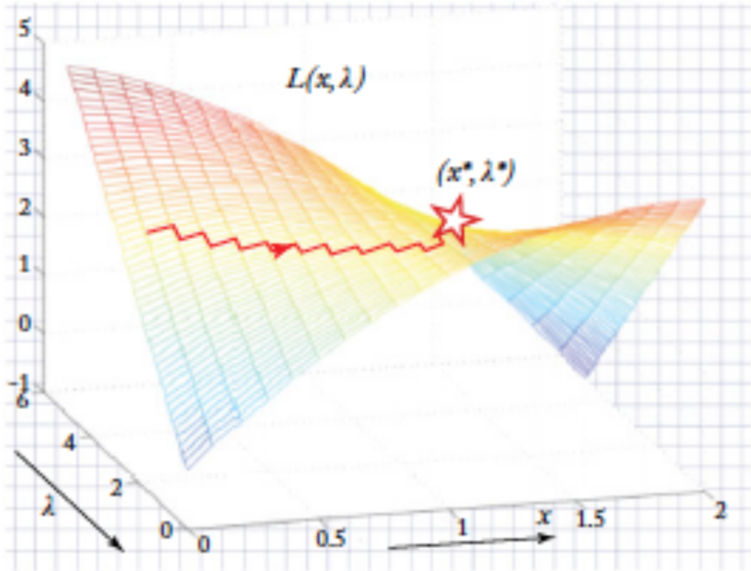
$$x_1(n)\ maksimizuje\ u\big(x_1(n)\big) - \big(\lambda_a(n) + \lambda_b(n)\big)x_1(n)$$

- Slično važi za $x_2(n)$ i $x_3(n)$



Kontrola zagušenja

- Slika ilustruje funkcionisanje gradijentnog algortma
- Vidi se da algoritam podešava x u pravcu gradijenta funkcije $L(x(\lambda),\lambda)$ po x, zatim λ u pravcu koji je suprotna gradijentu funkcije $L(x(\lambda),\lambda)$ po λ
- Algoritam traži tačku „sedla" koja je označena na slici
- Tačka „sedla" (x*, λ*) je minimum po λ od maksimuma funkcije $L(x(\lambda),\lambda)$ po x.



Kontrola zagušenja

- Radi ilustracije kako čvorišta izračunavaju cijenu, neka je $q_j(t)$ popunjenost reda čekanja na čvoru j u trenutku t
- Ovaj red čekanja se povećava brzinom koja je jednaka razlici između ukupne dolazne brzine i brzine posluživanja.
- U malom intervalu vremena τ

$$q_j\big((n+1)\tau\big) = q_j(n\tau) + \tau g_j(x)$$

- Gdje je x vektor brzina u trenutku $n\tau$
- Ako se napravi poređenje prethodne relacije sa relacijom

$$\lambda_j(n+1) = \lambda_j(n) - \beta \frac{d}{d\lambda_j} L(x(\lambda), \lambda) = \lambda_j(n) + \beta g_j(x)$$

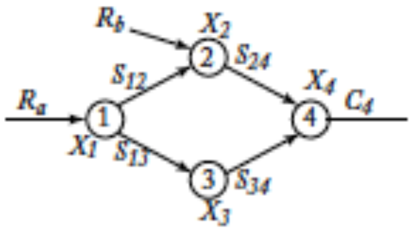
- za $\lambda_j(n+1)$ može se zaključiti da ako se gradijentni algoritam izvršava svakih τ sekundi onda

$$\lambda_j \approx \left(\frac{\beta}{\tau}\right) q_j$$

- Prema ovom izrazu trebalo bi uzimati da je cijena linka proporcionalna zauzetosti reda čekanja.
- To znači da kada se red čekanja puni link bi trebao da bude „skuplji" što korisnike prisiljava da smanje brzinu. Jasno je da važi slično i za pražnjenje reda čekanja.
- TCP kontrola zagušenja radi sličnu stvar pri čemu je razlika u tome što mnogo zavisi od RTT i broja tokova koji dijele link

Dinamičko rutiranje i kontrola zagušenja

- Na slici je prikazana mreža sa 4 čvora čija je trenutna popunjenost bafera X_1, X_2, X_3 i X_4
- Dva toka se prenose mrežom i imaju brzine R_a i R_b.
- S_{ij} predstavlja brzinu kojom čvor i šalje podatke čvoru j
- C_i predstavlja ukupni prenosni kapacitet čvora i
- Suma brzina tokova koji izlaze iz čvora i mora biti manja od C_i



- Cilj je maksimizovati sumu utility funkcija

$$u_a(R_a) + u_b(R_b)$$

- Pri čemu treba spriječiti nagli porast popunjenosti bafera
- Funkcije u_a i u_b su pozitivne i konkavne što znači da korisnici imaju veću korist od porasta brzine ali se ta korist smanjuje sa tim povećanjem
- Neka je

$$u_j(x) = k_j \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}, j = a, b, \alpha > 0, \alpha \neq 1, i\ k_j > 0$$

- Da bi se postigao zacrtani cilj treba maksimizovati brzine R_a, R_b, S_{12}, S_{13}, S_{24} i S_{34} za neko β>0.

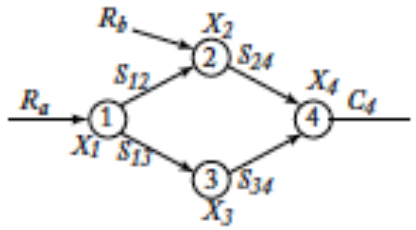
$$\phi \coloneqq \beta[u_a(R_a) + u_b(R_b)] - \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} X_i^2(t)\right]$$

- Kako bi se maksimizovao ovaj izraz treba odabrati brzine koje obezbjeđuju veliku vrijednost $u_a(R_a) + u_b(R_b)$ i veliko smanjenje sume kvadrata zauzetosti bafera
- Parametar β određuje kompromis između velike utility funkcije i velike zauzetosti bafera. Za veliko β više se težira utility funkcija od zauzeća.

Dinamičko rutiranje i kontrola zagušenja

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}X_2^2(t)\right] = X_2(t)\frac{d}{dt}X_2(t) = X_2(t)[R_b + S_{12} - S_{24}]$$

- Zato što je brzina promjene brzine $X_2(t)$ jednaka razlici dolazne brzine $R_b + S_{12}$ i odlazne brzine S_{24}
- Slično važi i sa ostale čvorove tako da se može izvesti da je



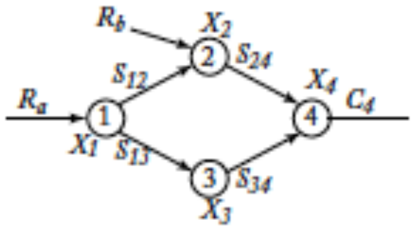
$$\phi = \\ = \beta[u_a(R_a) + u_b(R_b)] - X_1(t)[R_a - S_{12} - S_{13}] - X_2(t)[R_b + S_{12} - S_{24}] \\ - X_4(t)[S_{24} - S_{34} - C_4]$$

$$\phi = \\ = [\beta u_a(R_a) - X_1(t)R_a] + [\beta u_b(R_b) - X_2(t)R_b] + S_{12}[X_1(t) - X_2(t)] + S_{13}\,[X_1(t) - X_3(t) +] \\ + S_{24}[X_2(t) - X_4(t)] + S_{34}[X_3(t) - X_4(t)] + C_4X_4(t)$$

- Maksimizacija je laka jer različiti izrazi uključuju različite varijable, pri tome poslednji član sume ne sadrži nijednu vraijablu za odlučivanje

Dinamičko rutiranje i kontrola zagušenja

- Prema tome



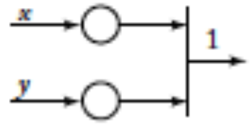
$$R_a \ maksimizuje \ \beta u_a(R_a) - X_1(t)R_a$$
$$R_b \ maksimizuje \ \beta u_b(R_b) - X_2(t)R_b$$
$$S_{12} = C_1 \ ako \ je \ X_1(t) > X_2(t) \ i \ X_2(t) < X_3(t)$$
$$S_{13} = C_1 \ ako \ je \ X_1(t) > X_3(t) \ i \ X_3(t) < X_2(t)$$
$$S_{24} = C_2 \ ako \ je \ X_2(t) > X_4(t)$$
$$S_{34} = C_3 \ ako \ je \ X_3(t) > X_4(t)$$

- Izvor a (b) podešava svoju brzinu R_a (R_b) na bazi zauzetosti bafera X_1(t) (X_2 (t)) na čvoru 1 (2)
- Konkavnost funkcije u_j utiče da se R_a (R_b) smanjuje sa X_1 (t)(X_2 (t))
- Ako se uzme ranije definisana utility funkcija, može se pokazati da važi

$$R_a = \left[\frac{k_a}{X_1(t)}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \ i \ R_b = \left[\frac{k_b}{X_2(t)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

- Primjećuje se da čvor 1 šalje pakete sledećem čvoru (2 ili 3) koji ima manju zauzetost obezbjeđujući da je ona manja od X_1(t) što ako nije ispunjeno nalaže čvoru 1 da prestane sa slanjem
- Čvor 2 i čvor 3 šalju podatke sve dok njihova zauzetost bafera ne pređe zauzetost bafera u čvoru 4
- Pošto brzine Ra i Rb teže nuli kada X_1(t) i X_2(t) rastu, jasno je da će mreža biti stabilna
- U realnim mrežama postoji kašnjenje u informisanju stanja bafera i čvorovi ne šalju bite nego pakete, što ne utiče na veliko odstupanje stvarnih rezultata od modela
- Ovaj mehanizam kontrole zagušenja se naziva backpressure mehanizmom i lako se implementira jer je algoritmu za odlučivanje dovoljna informacija o popunjenosti bafera njegovih susjednih čvorova kojima prosleđuje saobraćaj

Modelovanje bežičnog čvorišta



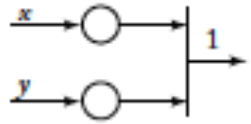
- U žičnim mrežama link „vidi“ zauzetost svog bafera
- U bežičnim mrežama ako dva čvora dijele isti kanal oni nijesu „svjesni“ o ukupnom broju paketa koji čekaju na prenos preko linka
- Neka dva čvora dijele isti kanal i neka su utility funkcije za tok 1 log(x) a za tok 2log(y)
- Optimizacioni problem je

$$Maksimizovati\ f(x,y) = log(x) + 2log(y)$$
$$uz\ ograničenje\ da\ je\ x + y \leq 1$$

- Ako se koristi već opisani dualni algoritma može se zaključiti da bi čvorovi trebali da podešavaju x i y na bazi ukupnog broja paketa koji čekaju na prenos preko linka. Međutim čvorovi nemaju tu informaciju
- Može se uočiti i pristup po kome bi čvorovi razmjenjivali informacije o zauzetostima svojih bafera što je veoma kompleksno posebno u velikim mrežama
- Pristup koji je realan je da se za svak čvor prati procenat vremena p_1, odnosno p_2, tokom kojeg koristi link. U tom slučaju

$$Maksimizovati\ f(x,y) = log(x) + 2log(y)$$
$$uz\ ograničenje\ da\ je\ x \leq p_1$$
$$uz\ ograničenje\ da\ je\ y \leq p_2$$
$$uz\ ograničenje\ da\ je\ p_1 + p_2 \leq 1$$

Modelovanje bežičnog čvorišta



- Da bi se odredio ovaj distribuirani algoriatm uvodi se sledeća modifikacija

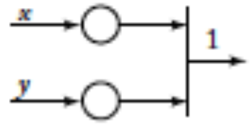
$$
\begin{gathered}
Maksimizovati\ f(x,y) = log(x) + 2log(y) + \beta\phi(p_1) + \beta\phi(p_1) \\
uz\ ograničenje\ da\ je\ x \leq p_1 \\
uz\ ograničenje\ da\ je\ y \leq p_2 \\
uz\ ograničenje\ da\ je\ p_1 + p_2 \leq 1
\end{gathered}
$$

- Gdje je $\phi(z)$ ograničena rastuća konkavna funkcija
- Ako se uzme da je β malo onda je to veoma mala modifikacija prethodne jednačine
- Ako se dvije nejednačine ograničenje zamijene penalty funkcijama dobija se sledeći cilj optimizacije

$$
\begin{aligned}
&Maksimizovati\ h(x,y,p_1,p_2;\lambda_1,\lambda_2) \\
&= log(x) + 2log(y) + \beta\phi(p_1) + \beta\phi(p_1) - \lambda_1(x - p_1) - \lambda_2(y - p_2)
\end{aligned}
$$

- Uslov normalizovanosti se uzima za kasnije

Modelovanje bežičnog čvorišta



- Ako se maksimizuje funkcija h po x, y, p_1, p_2 a minimizuje po λ_1, λ_2 gradijentnim algoritmom dobija se

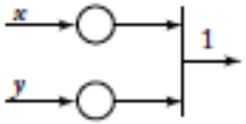
$$\frac{1}{x} = \lambda_1$$
$$\frac{2}{y} = \lambda_2$$
$$\beta\phi'(p_1) + \lambda_1 = 0$$
$$\beta\phi'(p_2) + \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_1(n+1) = \lambda_1(n) + \gamma\big(x(n) - p_1(n)\big)$$
$$\lambda_2(n+1) = \lambda_2(n) + \gamma\big(y(n) - p_2(n)\big)$$

- Kao i ranije poslednje dvije jednačine pokazuju da su λ_1 i λ_2 proporcionalne zauzetosti bafera na čvorovima 1 i 2, respektivno.
- Prve dvije jednačine objašnjavaju vezu kontrole toka i zauzetosti bafera
- Treća i četvrta jednačina se mogu transformisati u

$$p_1 = \psi\left(\frac{\lambda_1}{\beta}\right)\ i\ p_2 = \psi\left(\frac{\lambda_2}{\beta}\right), \text{pri čemu je } p_1 + p_2 = 1$$

- ψ je izvod funkcije ϕ. Postoji mnogo funkcija koje zadovoljavaju prethodno jednačine i potrebu da p_1 raste sa povećanjem zauzetosti bafera na čvoru 1, osnosno da p_2 raste sa rastom zauzetosti bafera na čvoru 2.

Modelovanje bežičnog čvorišta



- Jedno rješenje za pronalaženje p_1 i p_2 može da bude CSMA.
- Neka čvor i pokušava da pristupi slobodnom kanalu sa vjerovatnoćom a_i tokom kratkog slota u kome se takmiči sa ostalim čvorovima.
- Ako je a_i malo tako da se a_1a_2 može zanemariti, jasno je da čvor i zauzima kanal sa vjerovatnoćom $\frac{a_i}{a_1+a_2}$
- Prema tome, a_i bi trebalo da raste sa povećanjem broja paketa u baferu čvora i.
- CSMA se brine da je $p_1 + p_2 = 1$
- Na kraju algoritam bi trebao da izgleda ovako:
  - Svaki čvor pokušava da šalje sa vjerovatnoćom koja raste sa rastom zauzetosti njegovog bafera
  - Svaki čvor prima novi paket brzinom koja se smanjuje sa rastom zauzetosti njegovog bafera
- Ako se uzme da je

$$a_1 = e^{2Q(1,n)} \; i \; a_1 = e^{2Q(2,n)}$$

- Dobija se