Условна вјероватноћа

1. Школске другарице Ана и Ша среле су се након петнаестак година. Ана је кроз разговор сазнала да Ша има двоје дјеце и да је једно од њих син. Колика је вјероватноћа да је друго Шино дијете кћи ако:

   а) Ана нема додатних информација;

   b) Ана још зна да је споменути син старије Шино дијете?

Р

к - означава кћи

с - означава сина

$\Omega = \{(к,к),(к,с),(с,к),(с,с)\}$

Прва компонента у сваком пару означава старије Шино дијете, а друга компонента означава млађе Шино дијете.

$$P((к,к)) = P((к,с)) = P((с,к)) = P((с,с)) = \frac{1}{4}$$

а) $A = \{$једно Шино дијете је кћи$\} = \{(с,к),(к,с),(к,к)\}$

$B = \{$једно Шино дијете је син$\} = \{(с,с),(к,с),(с,к)\}$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

б) $C = \{$ старије Шино дијете је син $\}$

$= \{ (с, к), (с, с) \}$

$$P(A|C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

2. Из кутије у којој се налази 5 црних, 6 бијелих и 7 плавих куглица, случајно се извлаче 4 куглице. Ако је познато да нису заступљене све боје, наћи вјероватноћу да су извучене двије плаве и двије бијеле куглице.

Р

$A = \{$ извучене су двије плаве и двије бијеле куглице $\}$

$B = \{$ нису заступљене све боје $\}$

Тражи се $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Уочимо да је $A \subset B$ па је $P(AB) = P(A)$

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{7}{2}\binom{6}{2}}{\binom{18}{4}}$$

$\Omega = \{$ 4-подскупови скупа од 18-ел $\}$

$$|\Omega| = \binom{18}{4}$$

$$|A| = \binom{7}{2}\binom{6}{2}$$

$B^c = \{$ Заступљене су све три боје $\}$ –

је реализован акко је извучена једна црна, једна бијела и 2 плаве или једна црна, двије бијеле и једна плава куглица или двије црне, једна бијела и једна плава куглица.

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{7}{2} + \binom{5}{1}\binom{6}{2}\binom{7}{1} + \binom{5}{2}\binom{6}{1}\binom{7}{1}}{\binom{18}{4}}$$

па је

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\binom{7}{2}\binom{6}{2}}{\binom{18}{4} - \binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{7}{2} - \binom{5}{1}\binom{6}{2}\binom{7}{1} - \binom{5}{2}\binom{6}{1}\binom{7}{1}}$$

3. Човјек у џепу има n-кључева од којих само један отвара врата. Кључеве редом вади из џепа, без враћања док не извуче прави кључ. Наћи вјер. да се прави кључ појавио у k-том извлачењу ($k \leq n$).

Р

Нека је $A = \{$ прави кључ се појавио у k-том извлачењу $\}$, $k \leq n$ - је фиксан број.

Дефинишимо догађаје

$B_i = \{$ прави кључ се није појавио у i-том покушају $\}$

$i = \overline{1, n-1}$

Тада је

$$A = B_k^c B_{k-1} \dots B_1$$

$$P(A) = P(B_k^c B_{k-1} \dots B_1) = P(B_{k-1} \dots B_1) \cdot P(B_k^c \mid B_{k-1} \dots B_1) =$$

$$= P(B_{k-2} \dots B_1) P(B_{k-1} \mid B_{k-2} \dots B_1) P(B_k^c \mid B_{k-1} \dots$$

$$= \dots = P(B_1) P(B_2 \mid B_1) P(B_3 \mid B_2 B_1) \dots P(B_{k-1} \mid B_{k-2} \dots$$

$$\cdot P(B_k^c \mid B_{k-1} \dots B_1)$$

имамо n кључева
1-исправан, $n-1$ неисправних
из $n-1$ бирамо један

... исправни кључ

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \cdot \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$$

један смо извукли

4. n стрелаца независно један од другог гађају мету једанпут, при чему је вероватноћа поготка за сваког стрелца једнака $p \in (0,1)$. За $q \in (0,1)$ наћи број n тако да вероватноћа да мета буде бар једном погођена буде бар q.

Р:

A – {мета је погођена бар једном}

Дефинишемо догађаје

A_i – {i-ти стрелац је погодио мету}, $i = \overline{1,n}$

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(A_1^c A_2^c \cdots A_n^c) =$$

$$\overset{\text{независност}}{=} 1 - P(A_1^c) \cdots P(A_n^c)$$

$$= 1 - (1 - P(A_1)) \cdots (1 - P(A_n))$$

$$= 1 - \underbrace{(1-p) \cdots (1-p)}_{n} = 1 - (1-p)^n$$

Тражимо n тако да:

$$P(A) \geq q$$

$$1 - (1-p)^n \geq q$$

$$\log_{(1-p)} \Big| \quad (1-p)^n \leq 1 - q$$

основа мања од 1

$$n \geq \log_{(1-p)}(1-q)$$

$$n \geq \frac{\ln(1-q)}{\ln(1-p)}$$

5. У продавници се продају 3 врсте телевизора T_1, T_2 и T_3. Вјероватноће да се случајно одабере телевизор T_1, T_2 и T_3 редом су 0,25; 0.5; 0.25 док су вјероватноће да ће они исправно радити за 10 година једнаке 0,1; 0,2 и 0,4.

Колика је вјероватноћа да ће случајно одабрани телевизор радити за 10 година.

R: Дефинишимо $H_i = \{$ одабран је телевизор $T_i \}$ $i \in \{1, 2, 3\}$.

$P(H_1) = 0{,}25 \qquad P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1$

$P(H_2) = 0{,}5$

$P(H_3) = 0{,}25$

$A = \{$ Одабрани телевизор ће радити за 10 год. $\}$

$P(A|H_i)$ - вјер. да ће T_i радити исправно за 10 год

$P(A|H_1) = 0{,}1$

$P(A|H_2) = 0{,}2$

$P(A|H_3) = 0{,}4$

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)$$

$$= 0{,}1 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}225.$$

6\. У неком граду 30% такси аутомобила је плаве боје, 20% зелене боје и 50% је жуте боје. Они касне до 5min са вјероватноћама 0,1; 0,2 и 0,3 рес. Путник је позвао такси. Установило се да је дошао на вријеме. Колико је вјер. да је путник позвао жути такси?

<u>Р</u>

Дефинишимо H_1 = {Путник је позвао плави такси}

H_2 = {Путник је позвао зелени такси}

H_3 = {Путник је позвао жути такси}

$P(H_1) = 0,3 \quad P(H_2) = 0,2 \quad P(H_3) = 0,5$

Нека је A = {такси није каснио}

Тада је $P(A|H_1) = 1-0,1 = 0,9$

$P(A|H_2) = 1-0,2 = 0,8$

$P(A|H_3) = 1-0,3 = 0,7$

Сада (Бајесова формула)

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3A)}{P(A)} = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)}$$

путник је звао жути такси под условом да он није каснио

$$= \frac{35}{73}$$

7. У кутији је 5 бијелих и 10 црних куглица. Баца се коцкица за игру и из кутије се извлачи онолико куглица колико је показао број на коцки. Ако су све извучене куглице бијеле боје, израчунати вјероватноћу да је пао број 3.

Р

$H_i = \{$ број на коцки је $i \}$

$P(H_i) = \frac{1}{6}, \quad i \in \{1,2,3,4,5,6\}$

Нека је $A - \{$ све извучене су куглице бијеле боје $\}$

$$P(A|H_i) = \frac{\binom{5}{i}}{\binom{15}{i}} \quad i \in \{1,2,3,4,5\}$$

$$P(A|H_6) = 0$$

Користећи Бајесову формулу добијамо

$$P(H_3|A) = \frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_5)P(H_5)} = \frac{22}{455}$$

пао је број 3 ако знамо да су све куглице бијеле

Три пријатељице Шано, Марија и Ана, пријавиле су се за квиз знања. Оне се за одговор на питање јављају са вјероватноћама редом, $\frac{1}{3}$, 0,5 и $\frac{1}{6}$. На постављено питање одговарају тачно са вјероватноћама $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ и $\frac{5}{7}$. Ако на постављено питање није тачно одговорено, која је вјероватноћа да је на питање одговорила Маја.

$H_1 = \{$Шана је одговорила$\}$

$H_2 = \{$ Марија је одг.$\}$

$H_3 = \{$ Ана је одг.$\}$

$$P(H_1) = \frac{1}{3}, \quad P(H_2) = \frac{1}{2}, \quad P(H_3) = \frac{1}{6}$$

$A - \{$ на питање није тачно одговорено$\}$

Тражимо $P(H_2|A) = ?$

$$P(A|H_1) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

$$P(A|H_2) = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

$$P(A|H_3) = \frac{2}{7}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A|H_i)P(H_i)}$$

Scanned by TapScanner

9. Особа A случајно бира број из скупа $\{1, .. 20\}$ а особа B од 1 до броја који је изабрала особа A. Ако се зна да је збир изабраних бројева мањи од 11, одредити вјероватноћу да је број који је изабрала особа A бар за 5 већи од броја који је изабрала особа B.

<u>Р</u>

$H_i = \{$ Особа A је извукла број $i \}$

$i \in \{1, 2, .. 20\}$

$P(H_i) = \frac{1}{20}$, $i \in \{1, .. 20\}$

$C - \{$ збир је $<$ од 11 $\}$

$D - \{$ број који је изабрала A је бар за 5 већи од броја који је изабрала особа $\}$

Тражимо $P(D|C) = \frac{P(CD)}{P(C)} = ?$

$$P(C) = \sum_{i=1}^{20} P(C|H_i)P(H_i)$$

$P(C|H_1) = 1$ (изабран је 1)

$P(C|H_2) = 1$ 1 2

$P(C|H_3) = 1$ 1 2 3

$P(C|H_4)=1$ 1234

$P(C|H_5)=1$ 12345

$P(C|H_6)=\frac{4}{6}$

$\{\underbrace{1,2,3,4}_{+6<11},5,6\}$

$P(C|H_8)=\frac{2}{8}$

$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
$+8<11$

$P(C|H_7)=\frac{3}{7}$

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$
$+7<11$

$P(C|H_9)=\frac{1}{9}$

$\{1, \ldots 9\}$
$+9<11$

$P(C|H_i)=0,\ i\geq 10$

Сада тражимо $P(CD|H_i)$, $i\in\{1,\ldots 10\}$

$P(CD|H_6)=\frac{1}{6}$

$\{\underbrace{1,2,3,4}_{*},5,6\}$
$6<10$
али само $6-1=5$

$P(CD|H_7)=\frac{2}{7}$

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$
$+7<11$
од бар за 5 мањи од 7

$P(CD|H_8)=\frac{2}{8}$

$1,2,3,4,5,6,7,8$
$+8<10$
бар за 5 мањи од 8

$P(CD|H_9)=\frac{1}{9}$

$P(CD|H_i)=0,\ i\geq 10$

$P(CD|H_i)=0,\ i\leq 5$

$$P(D|C) = \frac{P(CD)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10} + \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{20} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{20} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{20}}{\frac{5}{20} + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{20} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{20} + \frac{2}{8}\cdot\frac{1}{20} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{10}}$$

10. Професор је за испит припремио 10 питања. Студент ће положити испит ако тачно одговори на два постављена питања или ако тачно одговори на једно од та два питања а затим одговори тачно на треће постављено питање. На колико питања студент мора знати одговор да би са вјероватноћом већом од 0,8 положио испит?

за Вјенду