Slučajne veličine diskretnog tipa

Andjela Mijanović

April 15, 2020

Def: Funkcija $X : \Omega \to R$ se naziva slučajna promjenljiva ako za svaki Borelov skup B

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}.$$

Teorema: Svaki od navedenih uslova potreban je i dovoljan da bi funkcija $X : \Omega \to R$ bila slučajna promjenljiva: a) $X^{-1}(G) = \{\omega : X(\omega) \in G\} \in \mathfrak{F}$ za svaki otvoreni skup $G \subset R$;

b) $X^{-1}((-\infty, x)) = \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$ za svako $x \in R$;
c) $X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathfrak{F}$ za svako $x \in R$;
d) $X^{-1}((x, +\infty)) = \{\omega : X(\omega) > x\} \in \mathfrak{F}$ za svako $x \in R$;
e)$X^{-1}([x, +\infty)) = \{\omega : X(\omega) \geq x\} \in \mathfrak{F}$ za svako $x \in R$;
f) $X^{-1}([a, b)) = \{\omega : a \leq X(\omega) < b\} \in \mathfrak{F}$ za svaki polusegment $[a, b) \in R$;

1. Zadatak 1.

Igrač baca kockicu za igru. Ako padne 6 dobija 5 €, a ako ne padne 6 gubi 1 €. Ako je X dobitak igrača u jednoj partiji, da li je X slučajna veličina?
Rješenje:

Koristićemo tvrdjenje (b) teoreme. Odredimo prvo prostor ishoda.
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, tako da je $P(\omega_1) = \frac{1}{6}$ i $P(\omega_2) = \frac{5}{6}$. Odgovarajuća σ-algebra je

$$\mathfrak{F} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}.$$

Preslikavanje $X : \Omega \to R$ definisano je sa $X(\omega_1) = 5$, $X(\omega_2) = -1$.
Pa je: za $x \leq 1$

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \emptyset;$$

za $-1 < x \leq 5$

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \{\omega_1\};$$

za $x > 5$

$$\{\omega : X(\omega) < x\} = \{\omega_1, \omega_2\} = \Omega$$

Dakle, za svako $x \in R$, $X^{-1}((-\infty, x)) = \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$. Zaključujemo (teorema(b)) da je X sl. veličina. X ima raspodjelu:

$$X : \begin{matrix} -1 & 5 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{matrix}$$

2. # Zadatak 2.

Neka je data raspodjela sl. veličine X:

a)

$$X : \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.2 & 0.3 & p & 0.1 \end{matrix}$$

b)

$$X : \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & 2p & 3p & 2p \end{matrix}$$

Rješenje: a) Za vježbu;

b) Koristimo da je

$$p + 2p + 3p + 2p = 1$$

Dakle $8p = 1$, odnosno $p = \frac{1}{8}$. Rapodjela sl. veličine X je:

$$X : \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{matrix}$$

3. # Zadatak 3.

Raspodjela sl. veličine X je

$$X : \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & t & 2p & \frac{t}{2} \end{matrix}$$

Odrediti moguće vrijednosti za p i t.
Rjesenje: Koristimo da je

$$\begin{aligned} p + t + 2p + \frac{t}{2} &= 1 \\ 3p + \frac{3t}{2} &= 1 \\ 6p + 3t &= 2 \\ p &= \frac{2 - 3t}{6} \end{aligned}$$

Kako je $0 \leq p \leq 1$, odnosno $0 \leq \frac{2-3t}{6} \leq 1$, dobijamo $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$ i $0 \leq t \leq \frac{2}{3}$.

4. # Zadatak 4.

Kocka za igru baca se dva puta. Neka je sl. vel. X zbir palih brojeva. Naći raspodjelu za X.
Rjesenje:

Sa R_X označićemo skup realizacija sl. vel. X. Kako su mogući zbirovi brojevi od 2 do 12, to je

$$R_X = \{2, 3, 4, 5, ..., 12\}$$

Odredimo prostor ishoda.

$$\Omega = \{(i, j) | i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Odredimo vjerovatnoću za svaku vrijednost iz skupa realizacija.
$P(X=2)$ označava vjerovatnoću da sl. vel. uzme vrijednost 2, a to je ekivalentno realizaciji ishoda $P\{(1,1)\}$, pa je tražena vjerovatnoća $\frac{1}{36}$. Dakle,

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= P\{(1,1)\} = \frac{1}{36};\\
P(X=3) &= P\{(1,2),(2,1)\} = \frac{2}{36};\\
P(X=4) &= P\{(1,3),(3,1),(2,2)\} = \frac{3}{36};\\
P(X=5) &= P\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} = \frac{4}{36};\\
P(X=6) &= P\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\} = \frac{5}{36};\\
P(X=7) &= P\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\} = \frac{6}{36};\\
P(X=8) &= P\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\} = \frac{5}{36};\\
P(X=9) &= P\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4))\} = \frac{4}{36};\\
P(X=10) &= P\{(5,5),(4,6),(6,4)\} = \frac{3}{36};\\
P(X=11) &= P\{(5,6),(6,5)\} = \frac{2}{36};\\
P(X=12) &= P\{(6,6)\} = \frac{1}{36};
\end{aligned}$$

Dakle, raspodjela sl. vel. X je:

$$X : \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{matrix}$$

5. Zadatak 5.

Kocka za igru baca se 4 puta. Neka je α zbir broja dobijenih u prva dva bacnja a β zbir brojeva dobijenih u trećem i četvrtom bacanju. Naći vjerovatnoću da jednčina $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ ima realna i različita rješenja.
Rjesenje: Znamo da kvadratna jednačina ima realna i različita rješenja ukoliko je diskiriminanta $D > 0$. Kako je

$$D = \alpha^2 - 4\beta$$

potrebno je odrediti raspodjelu za novu sl. vel. D a potom izračunati $P\{D > 0\}$.
Na osnovu prethodnog zadatka znamo da je raspodjela za sl. vel. α i β data sa:

$$\alpha, \beta : \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{matrix}$$

Da bi odredili raspodjelu za sl.v. D prvo odredimo raspodjele za sl.v. α^2 i 4β. Ako je skup realizacija za sl.v. α, $R_\alpha = \{2,3,4,5,6,...,12\}$, tada je skup realizacija sl. v. α^2, $R_{\alpha^2} = \{4,9,16,25,...,144\}$. Sada odredimo vjerovatnoće za ove realizacije.

$$P\{\alpha^2 = 4\} = P\{\alpha = 2\} = \frac{1}{36}$$

Pa dobijamo:

$$\alpha^2 : \begin{array}{ccccccccccc} 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & 49 & 64 & 81 & 100 & 121 & 144 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array}$$

Analogno, dobijamo raspodjelu za sl.v. 4β:

$$4\beta : \begin{array}{ccccccccccc} 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 & 44 & 48 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array}$$

Dalje je,

$$\begin{aligned} P\{D>0\} = 1 - P\{D \leq 0\} =& 1 - (P\{D<0\} + P\{D=0\}) \\ =& 1 - (P\{\alpha^2 = 16, 4\beta = 16\} + P\{\alpha^2 = 36, 4\beta = 36\} \\ &+ P\{\alpha^2 = 4, 4\beta \geq 8\} + P\{\alpha^2 = 9, 4\beta \geq 12\} \\ &+ P\{\alpha^2 = 16, 4\beta \geq 20\} + P\{\alpha^2 = 25, 4\beta \geq 28\} + P\{\alpha^2 = 36, 4\beta \geq 40\}) \\ =& 1 - (\frac{3}{36}\cdot\frac{3}{36} + \frac{5}{36}\cdot\frac{4}{36} \\ &+ \frac{1}{36}\cdot 1 + \frac{2}{36}\cdot\frac{35}{36} + \frac{3}{36}\cdot\frac{30}{36} + \frac{4}{36}\cdot\frac{21}{36} + \frac{5}{36}\cdot\frac{6}{36}) \\ =& 1 - (\frac{29}{36^2} + \frac{310}{36^2}) = \frac{957}{36^2}. \end{aligned}$$

6. Zadatak 6.

U kutiji se nalazi 10 bijelih i 12 crnih kuglica. Izvlači se
a) sa vraćanjem
b) bez vraćanja
9 kuglica. Odrediti raspodjelu sl.vel. X koja predstavlja broj bijelih kuglica medju izvučenim.

Rjesenje:
a) Sastav kutije prije svakog izvlačenja je isti. Pa izvodimo 9 nezavisnih izvlačenja. Neka je A-dogadjaj da smo u pojedinačnom izvlačenju izvukli bijelu kuglicu. Tada je $P(A) = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$. Slučajna veličina X predstavlja broj pojavljivanja dogadjaja A u nizu od 9 nezavisnih eksperimenata. tj. broju "uspjeha" u nizu od 9 nezavisnih eksperimenata. Zaključujemo da $X : B(9, \frac{5}{11})$. Pa je

$$P\{X=k\} = \binom{9}{k}(\frac{5}{11})^k(\frac{6}{11})^{9-k},\ k = 0,1,2,..,9.$$

b) Odredimo prostor ishoda.

$$\Omega = \{\text{9-podskupovi skupa od 22 elementa}\}$$
$$|\Omega| = \binom{22}{9}$$

Za dogadjaj $\{X=k\}$ povoljni su oni 9-podskupovi koji se satoje od k bijelih i $9-k$ crnih kuglica pa je:

$$P\{X=k\} = \frac{\binom{10}{k}\binom{12}{9-k}}{\binom{22}{9}},\ k = 0,1,2,..9.$$

7. Zadatak 7.

n osoba medju kojima osobe A i B, na slučajan način su rasporedjeni na n stolica u nizu. Odrediti raspodjelu sl.vel. X koja predstavlja broj osoba koje sjede izmedju osoba A i B.

Rešenje: Odredimo prvo skup realizacija sl. vel. X.

Osobe A i B mogu sjedjeti jedna do druge, pa je broj osoba koje sjede izmedju njih jednak 0, a dok najviše može izmedju njih sjesti $n-2$ osobe. Pa je

$$R_X = \{0, 1, 2, ..., n-2\}.$$

Odredimo vjerovanoću dogadjaja $\{X = k\}$, tj. da tačno k osoba sjedi izmedju A i B.

$$\Omega = \{\text{Permutacije skupa od n elemenata}\} \; |\Omega| = n!$$

Od $n-2$ osobe odaberimo njih k koje ćemo smjestiti izmedju A i B. Njih možemo razmjestiti na $k!$ načina. Osobe A, B i njih k čine jedan entitet i zajedno sa preostalim osobama $n-(k+2)$ možemo ih razmjestiti na $(n-(k+2)+1)!$ načina. I još osobe A i B možemo razmjestiti na 2 načina. Dakle,

$$P\{X = k\} = \frac{2\binom{n-2}{k}k!(n-k-1)!}{n!}, \; k \in R_X.$$