Vjerovatnoća i statistika

Slučajne veličine apsolutno-neprekidnog tipa

1. Slučajna promjenljiva X zadata je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} A \cdot \cos 2x & , \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0 & , \quad x < -\frac{\pi}{4},\ x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Odrediti:

(a) konstantu A;

(b) funkciju raspodjele $F_X(x)$;

(c) vjerovatnoću $\mathsf{P}\left\{0 < X < \frac{\pi}{8}\right\}$.

◀

(a) Konstantu A određujemo iz uslova:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} A \cdot \cos 2x \, dx = \frac{A}{2} \sin 2x \,\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = A.$$

(b) Za $t \le -\frac{\pi}{4}$, $F_X(t) = \mathsf{P}\{X < t\} = 0$.
Za $-\frac{\pi}{4} < t \le \frac{\pi}{4}$,

$$F_X(t) = \mathsf{P}\{X < t\} = \int_{-\infty}^{t} \varphi_X(x)dx = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{4}} 0 \, dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{t} \cos 2x \, dx = \frac{1 + \sin 2t}{2}.$$

Ako je $t > \frac{\pi}{4}$,

$$F_X(t) = \mathsf{P}\{X < t\} = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{4}} 0 \, dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{t} 0 \, dx = 1.$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \le -\frac{\pi}{4}, \\ \dfrac{1 + \sin 2t}{2}, & -\frac{\pi}{4} < t \le \frac{\pi}{4}, \\ 1, & t > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

(c) $\mathsf{P}\left\{0 < X < \dfrac{\pi}{8}\right\} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \varphi_X(x)dx$ ili pomoću funkcije raspodjele

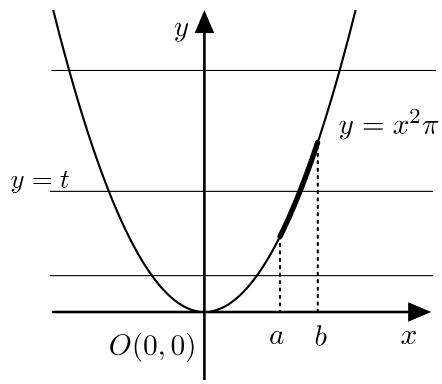
$$\mathsf{P}\left\{0 < X < \frac{\pi}{8}\right\} = F_X\left(\frac{\pi}{8}\right) - F_X(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

▶

2. Poluprečnik kruga ima raspodjelu $X : \mathcal{U}(a, b)$, $\;a, b > 0$. Naći funkciju raspodjele i gustinu za površinu kruga Y.

◀

Važi $Y = X^2\pi$.



Za $t \leqslant a^2\pi$ je $F_Y(t) = \mathsf{P}\{Y < t\} = 0$.

Za $a^2\pi < t \leqslant b^2\pi$ je

$$F_Y(t) = \mathsf{P}\{Y < t\} = \mathsf{P}\left\{X^2\pi < t\right\} = \mathsf{P}\left\{a < X < \sqrt{\frac{t}{\pi}}\right\} = \frac{\sqrt{\frac{t}{\pi}} - a}{b - a}.$$

Za $t > b^2\pi$ je $F_Y(t) = 1$.

Funkcija gustine:

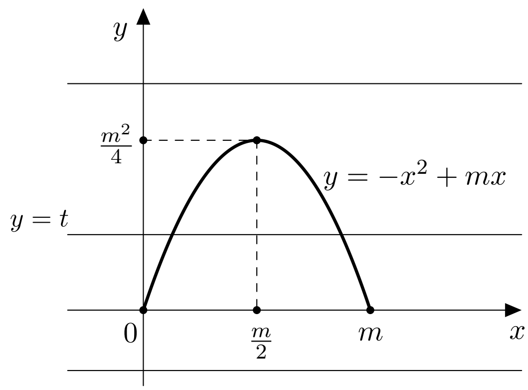
$$\varphi_Y(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(b-a)\sqrt{\pi t}}, & t \in (a^2\pi, b^2\pi), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

▶

3. Na duži AB dužine m slučajno se bira tačka C. Naći raspodjelu slučajne veličine koja predstavlja površinu pravougaonika čije su stranice jednake dužima AC i BC.

◀

Neka je $|AC| = X$. Tada je $X : \mathcal{U}(0, m)$. Neka je slučajan veličina Y jednaka površini pravougaonika čije su stranice AC i BC. Važi $Y = X(m - X) = -X^2 + mX$.



Za $t \leqslant 0$ je $F_Y(t) = \mathsf{P}\{Y < t\} = 0$.

Za $0 < t \leqslant \frac{m^2}{4}$ je

$$\begin{aligned} F_Y(t) = \mathsf{P}\{Y < t\} = \mathsf{P}\left\{-X^2 + mX < t\right\} &= \mathsf{P}\left\{X^2 - mX + t > 0\right\} \\ &= \mathsf{P}\left\{X \in (0, x_1) \cup (x_2, m)\right\} \\ &= \mathsf{P}\{X \in (0, x_1)\} + \mathsf{P}\{X \in (x_2, m)\} \\ &= \frac{m - \sqrt{m^2 - 4t}}{2m} + \frac{m - \sqrt{m^2 - 4t}}{2m} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{m^2 - 4t}}{m}. \end{aligned}$$

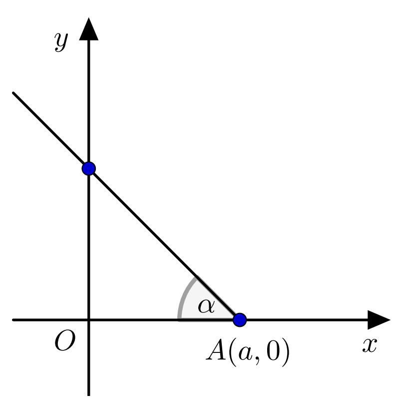
Za $t > \frac{m^2}{4}$ je $F_Y(t) = 1$.

▶

4. U pravouglom koordinatnom sistemu xOy iz tačke $A(a, 0)$, $a > 0$, se na slučajan način (pod slučajnim uglom α) povlači poluprava koja presijeca Oy-osu. Naći gustinu slučajne veličine Y koja predstavlja ordinatu tačke presjeka poluprave sa Oy-osom.

◀

$\alpha : \mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



Važi $\frac{Y}{a} = \operatorname{tg} \alpha$.

Za $t \in \mathbf{R}$ je

$$\begin{aligned}F_Y(t) = \mathsf{P}\{Y < t\} = \mathsf{P}\{a \operatorname{tg} \alpha < t\} &= \mathsf{P}\left\{\operatorname{tg} \alpha < \frac{t}{a}\right\} \\ &= \mathsf{P}\left\{-\frac{\pi}{2} < \alpha < \operatorname{arctg} \frac{t}{a}\right\} \\ &= \frac{\operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{\pi}{2}}{\pi} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}.\end{aligned}$$

Funkcija gustine je

$$\varphi_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{a}{\pi(a^2 + t^2)}, \ t \in \mathbf{R}.$$

▶

5. Štap dužine 1 se lomi na dva dijela. Neka je X_1 dužina kraćeg, a X_2 dužina dužeg dijela. Naći gustine slučajnih veličina X_1 i X_2.

◀

Označimo krajnje tačke štapa sa A i B. Neka je T tačka u kojoj se štap lomi. Tada je

$$|AT| = W : \mathcal{U}(0,1) \quad \text{i} \quad X_1 = \min\{W, 1-W\}.$$

Za $t \leqslant 0$ je $F_{X_1}(t) = \mathsf{P}\{X_1 < t\} = 0$.

Za $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$ je

$$\begin{aligned}F_{X_1}(t) = \mathsf{P}\{X_1 < t\} &= \mathsf{P}\big\{\min\{W, 1-W\} < t\big\} \\ &= 1 - \mathsf{P}\big\{\min\{W, 1-W\} \geqslant t\big\} \\ &= 1 - \mathsf{P}\{W \geqslant t, 1-W \geqslant t\} \\ &= 1 - \mathsf{P}\{t \leqslant W \leqslant 1-t\} \\ &= 2t.\end{aligned}$$

Za $t > \frac{1}{2}$, $F_{X_1}(t) = 1$. Dakle, $\varphi_{X_1}(t) = \left\{\begin{array}{ll} 2, & t \in (0, 1/2) \\ 0, & \text{inače} \end{array}\right.$.

Funkciju raspodjele za X_2 uraditi za vježbu.

▶

6. Slučajno se bira tačka unutar pravougaonika sa stranicama dužine 2 i 1. Neka je X rastojanje izabrane tačke do najbliže stranice pravougaonika. Naći raspodjelu slučajne veličine X.

◀

Neka je dat pravougaonik $ABCD$ sa stranicama dužine 2 i 1. Neka su X_1, X_2, X_3, X_4 rastojanja slučajno odabrane tačke do stranica AB, BC, CD, DA, redom. Tada je

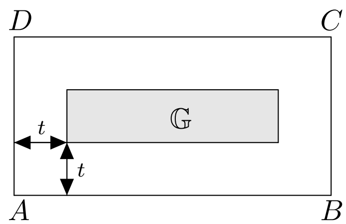
$$X = \min_{i=\overline{1,4}} X_i.$$

Ako je $t \leqslant 0$, onda je $F_X(t) = 0$.

Ako je $t > \frac{1}{2}$, onda je $F_X(t) = 1$.

Neka je $t \in (0, \frac{1}{2}]$. Tada je

$$F_X(t) = \mathsf{P}\{X < t\} = \mathsf{P}\left\{\min_{i=\overline{1,4}} X_i < t\right\} = 1 - \mathsf{P}\left\{\min_{i=\overline{1,4}} X_i \geqslant t\right\}$$
$$= 1 - \mathsf{P}\left\{X_1 \geqslant t, X_2 \geqslant t, X_3 \geqslant t, X_4 \geqslant t\right\}$$



$$= 1 - \frac{m(\mathbb{G})}{m(ABCD)} = 1 - \frac{(1-2t)(2-2t)}{2} = 3t - 2t^2.$$

Dakle,

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 3t - 2t^2, & 0 < t \leqslant \frac{1}{2} \\ 1, & t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

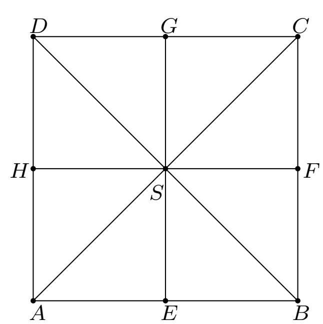
▶

7. U kvadratu dužine stranice 1 slučajno se bira tačka T. Naći raspodjelu slučajne veličine Z koja je jednaka rastojanju od tačke T do najbliže stranice kvadrata.

◀

Prvi način: pogledati prethodni zadatak.

Drugi način.

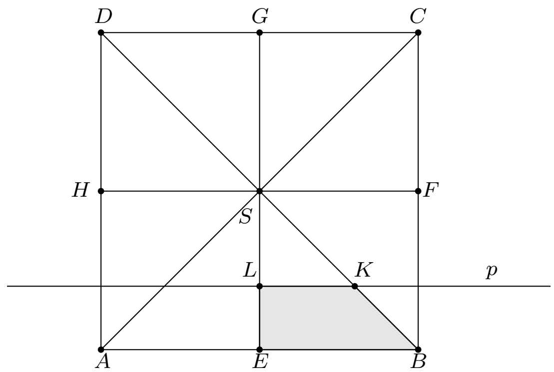


Ne umanjujući opštost pretpostavimo da je tačka T pripada trouglu $\triangle EBS$.

Ako je $t \leqslant 0$, onda $F_Z(t) = 0$.

Ako je $t > \frac{1}{2}$, onda $F_Z(t) = 1$.

Neka je $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ i neka je p prava paralelna sa AB i $d(p, AB) = t$. Događaju $\{Z < t\}$ 'odgovara' da tačka T pripada trapezu $EBKL$, gdje su K i L presječne tačke prave p sa pravama DB i EG, redom.



$$F_Z(t) = \mathsf{P}\{Z < t\} = \frac{m(EBKL)}{m(\triangle EBS)} = \frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t}{2} \cdot t}{\frac{1}{8}} = 4t(1-t).$$

Dakle,

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 4t(1-t), & 0 < t \leqslant \frac{1}{2} \\ 1, & t > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

►

8. U kvadratu dužine stranice 1 slučajno se bira tačka T. Naći raspodjelu slučajne veličine Z koja je jednaka rastojanju od tačke T do nekog fiksiranog tjemena kvadrata.

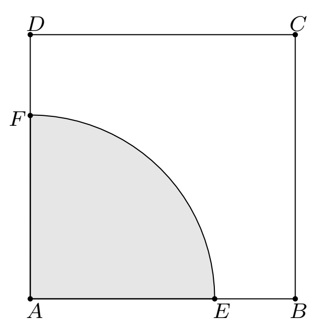
◄

Neka je Z rastojanje od tačke T do tjemena A.

Ako je $t \leqslant 0$, onda je $F_Z(t) = 0$.

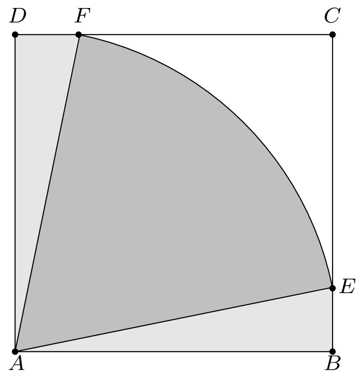
Ako je $t > \sqrt{2}$, onda je $F_Z(t) = 1$.

Neka je $t \in (0, 1]$. Događaju $\{Z < t\}$ 'odgovara' da tačka T pripada isječku AEF.



$$F_Z(t) = \mathsf{P}\{Z < t\} = \frac{m(AEF)}{m(ABCD)} = \frac{t^2\pi}{4}.$$

Neka je $t \in \left(1, \sqrt{2}\right]$. Događaju $\{Z < t\}$ 'odgovara' da tačka T pripada oblasti $ABEFD$.



$$F_Z(t) = \mathsf{P}\{Z < t\} = \frac{m(ABEFD)}{m(ABCD)} = \sqrt{t^2-1} + \frac{t^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{t^2-1}\right).$$

►