Lebegov integral

Andjela Mijanović

March 31, 2020

Teorijski uvod: Funkcija $f : X \to \overline{R}$ je prosta, ako je skup njenih vrijednosti, tj. $f(X)$, konačan. Neka je f pozitivna, prosta, mjerljiva funkcija. Neka je na primjer $f(X) = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$. Integral te funkcije definišemo kao

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu\{x \in X : f(x) = c_i\},$$

pri čemu važi dogovor da je $0 \cdot +\infty = 0$.
Neka je $f : X \to \overline{R}$ pozitivna, mjerljiva funkcija (ne obavezno prosta). Njen integral definišemo kao

$$\int_X f d\mu = \sup_{s \leq f, s-prosta} \int_X s d\mu.$$

Ako je funkcija f samo mjerljiva onda rastavljamo $f = f^+ - f^-$, gdje su $f^+ = \max\{f(x), 0\}$ i $f^- = \max\{-f(x), 0\}$ njen pozitivni i negativni dio, i definišemo

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Ako je f kompleksno vrijednosna funkcija onda rastavljamo na njen realni i imaginarni dio.
Integral po skupu $A \subset X$ definiše se kao

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu,$$

gdje je

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ 0, & x \notin A; \end{cases}$$

Integral pozitivne funkcije može biti konačan, ali i beskonačan. Ako je konačan, tada kažemo da je f integrabilna, u suprotnom da nije integrabilna. Primijetimo takodje da integral znakopromjenljive funkcije može se definisati samo ako su f^+ i f^- integrabilne. Slično važi i za kompleksne funkcije.
Pokazuje se da integral zadovoljava uobičajne osobine:

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$
$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu, \text{ gdje je } A \cap B = \emptyset$$
$$f \leq g \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$$
$$\int_A c d\mu = c\mu(A), \ c\text{-konstanta}.$$

Odnos Lebegovog i Rimanovog integrala: Ako je funkcija Riman integrabilana onda je i Lebeg integrabilna i integrali su im jednaki. Postoje funkcije koje su Lebeg integrabilne, ali nijesu Riman integrabilne. Funkcije je Riman integrabilna ako i samo ako je njen skup tačaka prekida Lebegove mjere nula. Pazite, termin Riman integrabilna funkcija, odnosi se samo na običan, ali ne i na nesvojstven Rimanov integral.

1. Zadatak 1.

Neka je C Kantorov skup i

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in C; \\ k, & x \in P_k; \end{cases}$$

gdje je P_k interval dužine $\frac{1}{3^k}$ izbačen u k-tom koraku pri formiranju Kantorovog skupa. Dokazati da je f integrabilna i izračunati $\int_0^1 f(x)dm(x)$.

Rješenje:

Prije nego dokažemo integrabilnost funkcije f, treba dokazati njenu mjerljivost. Skup vrijednosti funkcije f je N. On je prebrojiv, ali ne i konačan, tako da f nije prosta. Treba pokazati da za svako $c \in R$ skup

$$A = \{x \in [0,1] : f(x) < c\}$$

mjerljiv. Za $c \leq 1$, $A = \emptyset$ pa je mjerljiv;
Za $c > 1$, $A = \{x : f(x) < c\} = \bigcup\limits_{k<c} P_k$, gdje je $P_k = \{x : f(x) = k\}$. Dovoljno je pokazati da je P_k mjerljiv za svako $k \in N$. Razmotrimo dva slučaja, prvi slučaj kad je $k = 1$, tada je $P_k = C \cup (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, pa je mjerljiv, u drugom slučaju za $k > 1$, P_k je unija intervala izbačenih pri formiranju Kantorovog skupa pa mjerljiv.
Dakle, zaključujemo da je f mjerljiva.
S obzirom da je f pozitivna funkcija, integral $\int_0^1 f(x)dx$ uvijek postoji, samo je pitanje da li je konačan ili beskonačan. Kako god, mi ćemo ga izračunati pa ako dobijemo konačnu vrijednost, prosto ćemo konstatovati da je f integrabilna.
Uočimo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dm(x) &= \int_C f(x)dm(x) + \int_{[0,1]\setminus C} f(x)dm(x) \\
&= \int_C 1dm(x) + \int_{[0,1]\setminus C} f(x)dm(x) \\
&= 1 \cdot m(C) + \int_{[0,1]\setminus C} f(x)dm(x) \\
&= 0 + \int_{[0,1]\setminus C} f(x)dm(x) \\
&= \int_{[0,1]\setminus C} f(x)dm(x).
\end{aligned}$$

Uvodimo jednu važnu tehniku vezanu za teoriju mjere a u pitanju je tehnika sječenih funkcija.
Uočimo niz funkcija

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ n, & f(x) > n; \end{cases}$$

Skup vrijednosti funkcije f_n je $\{1, 2, 3, ..., n\}$, dakle konačan, pa je f_n prosta funkcija. Takodje, očigledno je $f_n(x) \leq f(x)$. Kako je f_n prosta njen integral možemo jednostavno da izračunamo.

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]\setminus C} f_n(x)dm(x) &= \sum_{k=1}^{n} km\{x \in [0,1] \setminus C : f_n(x) = k\} \\
&= 1 \cdot m((\frac{1}{3}, \frac{2}{3})) + 2 \cdot m((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})) + ... + n \cdot m(\Delta_{n1} \cup \Delta_{n2} \cup ... \cup \Delta_{n2^{n-1}}) \\
&\quad + n \cdot m([0,1] \setminus \bigcup_{k \leq n} P_k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{2^{k-1}}{3^k} + n(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^k})
\end{aligned}$$

Suma $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^k}$ je suma geometriskog niza pa je njen zbir jednak $\frac{1}{3}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = 1 - (\frac{2}{3})^n$. Tako da je

$$\int_{[0,1]\setminus C} f_n(x)dm(x) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{2^{k-1}}{3^k} + n(\frac{2}{3})^n.$$

Na osnovu osobina integrala i činjenice da je $f(x) \geq f_n(x)$ zaključujemo da je

$$\int_{[0,1]\setminus C} f(x)dm(x) \geq \int_{[0,1]\setminus C} f_n(x)dm(x) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{2^{k-1}}{3^k} + n(\frac{2}{3})^n.$$

Na ovu poslednju njednakost možemo djelovati limesom kad $n \to +\infty$, jer ona je ispunjena za svako n. Kad uzmemo u obzir $n(2/3)^n \to 0$ kad $n \to +\infty$ vidimo da je

$$\int_{[0,1]\setminus C} f(x)dm(x) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{2^{k-1}}{3^k}. \tag{1}$$

Ovim još nijesmo ništa dobili, jer smo integral ocijenili odozdo, a to nam nikako neće pomoći da zaključimo da je končan što je naš cilj.
Da bi dobili suprotnu nejednakost, poslužimo se sljedećim rasudjivanjem. Neka je $s(x)$ prosta funkcija manja ili jednaka $f(x)$. Kako je s prosta to je skup njenih vrijednosti konačan a time i ograničen. Neka je na primjer $s(x) \leq n$, gdje je n neki prirodni broj. Tada je $s(x) \leq f(x)$, ali i $s(x) \leq n$. Kada se spoje ova dva uslova dobija se da je $s(x) \leq \min\{f(x), n\}$. (Naime, manja je i od jednog i drugog izraza pa je manja i od njihovog minimuma).
Uočimo da je $\min\{f(x), n\}$ upravo jednak sječenoj funkciji $f_n(x)$. Tako je $s(x) \leq f_n(x)$, za neko n. Dalje, nije teško provjeriti da je f_n rastući niz funkcija. (Za dokaza ove činjenice, razmotrite tri slučaja: 1° x je takav da je $f(x) \leq n$, 2° x je takav da je $n < f(x) \leq n+1$, 3° x je takav da je $f(x) > n+1$, pa ćete lako izvesti nejednakost $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$.) Tako je i niz integrala $\int_{[0,1]\setminus C} f_n(x)dm(x)$ rastući, pa imamo

$$\int_{[0,1]\setminus C} s(x)dm(x) \leq \int_{[0,1]\setminus C} f_n(x)dm(x) \leq \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]\setminus C} f_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{2^{k-1}}{3^k}.$$

Sada je dovoljno uzeti supremum po prostim funkcijama s, i izveli smo obratnu nejednakost.
Sada, dakle iskoristimo (1) i dobijamo

$$\int_{[0,1]\setminus C} f(x)dm(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{2^{k-1}}{3^k}.$$

Time smo na neki način izračunali vrijednost integrala (preko reda). Ali još uvijek ne znamo da li je ta vrijednost konačna.
Uočimo funkciju $\phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k$. Jasno je da je naš integral jednak $(1/3)\phi(2/3)$. Kako je

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x},\ |x|<1$$
$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = (\sum_{k=0}^{+\infty} x^k)' = (\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Tako je

$$\int_{[0,1]\setminus C} f(x)dm(x) = (1/3)\phi(2/3) = \frac{1}{3}\frac{1}{(1/3)^2} = 3.$$

2. Zadatak 2.

Za koje a, $b>0$ postoji integral $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a}dx$ kao Lebegov i kao Rimanov nesvojstven.
Rješenje:

Znamo da ako Rimanov integral postoji, tada postoji i Lebegov. Naravno, ovo se odnosi samo na pravi Rimanov integral, a ne i na nesvojstveni, o kome je ovdje riječ. Naime, konstrukcijom Lebegovog integrala izgubili smo uslovnu integrabilnost, jer kao što znamo funkcija f je integrabilna, ako i samo ako je integrabilna funkcija $|f|$. Dakle, kod Lebegovo integrala, integrabilnost je isto što i apsolutna integrabilnost nema uslovne.
Na intervalima obilka $[1,u]$ podintegralna funkcija je neprekidna, pa time Riman (a odmah i Lebeg) integrabilna.
Na intervalu $[1,+\infty)$, pointegralna funkcija je neprekidna a time i mjerljiva. Ako je funkcija pozitivna tada se njen Rimanov nesvojstven interal i Lebegov integral poklapaju.
Da rezimiramo, naša podintegralna funkcija će biti Lebeg integrabilna ako i samo ako je apsolutno integrabilna u smislu Rimana. Tako se ovaj zadatak svodi na ispitivanje apsolutne i uslovne konvergencije navedenog integrala.
Prvo uvedimo smjenu $x^b=t$, tada je $bx^{b-1}dx=dt$. Dobijamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^b}{x^a}dx = \frac{1}{b}\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{a/b-1/b+1}}dt$$

Označimo sa $p=a/b-1/b+1$. Ispitajmo konvergenciju integrala

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^p}dt. \tag{2}$$

Ocjena $|\sin t|\le 1$ omogućiće nam da zaključimo da integral (2) apsolutno konvergira za $p>1$. Naime, tada je $|\frac{\sin t}{t^p}| \le \frac{1}{t^p}$. Ako je $p=1$, taj integral se zove Dirihleov i vrijednost mu je $\frac{\pi}{2}$. On se zove tako, zbog toga što se njegova konvergencija provjerava putem Dirihleovog kriterijuma. Upravo ćemo taj kriterijum upotrijebiti za $0<p<1$.
Zaista, za $p>0$, funkcija $t\to\frac{1}{t^p}$ je opadajuća i teži ka 0 kad $t\to+\infty$, dok su integrali $|\int_1^u \sin tdt| = |\cos 1-\cos u|\le 2$ ograničeni. Tako da je naš integral konvergentan (možda ne i apsolutno) za $p>0$. Ako je $p\le 0$, naš integral je divergentan. Kako to dokazujemo.

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} t^{-p}\sin tdt \ge \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin tdt = 2,$$

jer je $-p\ge 0$ i $t\ge 1$. Na ovaj način oboren je Košijev uslov, tj. nije tačno da za svako $\epsilon>0$, postoji $M>0$, takvo da za svako $u,v\ge M$, važi da

$$|\int_u^v t^{-p}\sin t| \le \epsilon.$$

Na osnovu Košijevog kriterijuma ovaj intergal je divergentan.
Sada smo razriješili pitanje Rimanovog nesvojstvenog integrala, on postoji za $p>0$, a ne postoji za

$p \leq 0$.
Da bi smo riješili pitanje Lebegovog integrala, dokažimo da za $0 < p \leq 1$, naš integral uslovno konvergira, tj. da integral

$$\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t^p}| dt$$

divergira. Da bi smo ovo izveli iskoristimo još jednom intervale oblika $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ na kojima je sinus pozitivan. Imamo

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} |\frac{\sin t}{t^p}| dt \geq \frac{1}{((2n+1)\pi)^p} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin t dt = \frac{2}{((2n+1)\pi)^p}$$

i odatle je

$$\int_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t^p}| dt \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{((2n+1)\pi)^p},$$

a poslednji red je divergentan jer mu je opšti član asimptotski ekvivalentan sa $\frac{1}{n^p}$.