Lebegov integral i konvergencija u mjeri

Andjela Mijanović

April 10, 2020

Def: Kažemo da niz $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ako

$$\forall \epsilon > 0,\ \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to 0,\ n \to \infty$$

Teorema1: Ako niz funkcija f_n konvergira tačka po tačka funkciji $f(x)$ za svako $x \in E$ i $\mu(E) < +\infty$ tada $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na skupu E.
Def: Ako su date funkcije f i g, kažemo da je $f \sim g$ ako je $\mu(\{x : |f(x) \neq g(x)|\}) = 0$.
Teorema2: Ako niz $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na A, tada postoji podniz f_{n_k} koji s.s na A konvergira ka f.

1. Zadatak 1.

a) Pokazati da uslov $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{x \in D : |f_n(x) - f(x)| > 0\}) = 0$ implicira da $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na D.
b) Pokazati da obratno ne važi.
Rešenje:

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljno i za svako $n \in N$, neka je

$$E_n = \{x \in D : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\};\ F_n = \{x \in D : |f_n(x) - f(x)| > 0\}.$$

Onda za svako $n \in N$, važi da je

$$\begin{aligned} x \in E_n &\Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| > \epsilon \\ &\Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| > 0 \\ &\Longrightarrow x \in F_n \end{aligned}$$

Dakle, $E_n \subset F_n$, pa je $\mu(E_n) \leq \mu(F_n)$. Kako važi da $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$. Tada je

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = 0$$

Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$, tj. $f_n \xrightarrow{\mu} f$.
b) Razmotrimo funkcije:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{n},\ x \in [0,1] \\ f(x) &= 0,\ x \in [0,1] \end{aligned}$$

Tada $f_n \to f$ (tačka po tačka), po teoremi 1 imamo da $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na $[0,1]$. Ali za svako $n \in N$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} > 0,\ \forall x \in [0,1]$$

Drugim riječima,

$$\{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| > 0\} = [0,1].$$

Tada je, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| > 0\} = 1 \neq 0$.

2. Zadatak 2.

Pretpostavimo da $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ za svako $n \in N$ i $x \in D \setminus Z$, gdje je $\mu(Z) = 0$. Ako $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na D, dokazati da tada $f_n \to f$ s.s na D.
Rešenje: Neka je $B = D \setminus Z$. Kako $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na D, tada $f_n \xrightarrow{\mu} f$ na B. Na osnovu teoreme 2 postoji podniz f_{n_k} od f_n, takav da $f_{n_k} \to f$ s.s na B. Neka je $C = \{x \in B : f_{n_k} \not\to f\}$. Tada je $\mu(C) = 0$ i $f_{n_k} \to f$ na $B \setminus C$. Kako je $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ za svako $n \in N$ i kako je $n_k \geq k$ imamo da $f_k \leq f_{n_k}$ za svako $k \in N$.
Zbog toga je

$$|f_k - f| \leq |f_{n_k} - f|$$

Dakle, $f_k \to f$ na $B \setminus C$. Kako je $B \setminus C = D \setminus (C \cup Z)$. Iz toga što je $\mu(Z \cup C) = 0$ zaključujemo da je $f_n \to f$ s.s na D.

3. Zadatak 3.

Konstrujisati ograničenu, mjerljivu funkciju koja nije ekvivalentna Riman-integrabilnoj funkciji.
Resenje: Prvo na segmentu $[0, 1]$ konstujišimo skup sa pozitivnom mjerom $0 < \alpha < 1$. Taj zadatak je već radjen na vježbama. Dobijamo skup A mjere α koji je perfektan i nigdje gust. Razmotrimo karakterističnu funkciju skupa A:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in A; \\ 0, & \text{ako } x \in A^C; \end{cases}$$

Ona je ograničena i mjerljiva (jer je karakteristična funkcija mjerljivog skupa). Ali kako je skup njenih tačaka prekida skup A i mjera skupa A je pozitivna to zaključujemo da $f(x)$ nije Riman-integrabilna. Ako se vrijednosti funkcije f izmjene na nekom skupu mjere nula, tada skup tačaka prekida nove funkcije će ponovo biti pozitivne mjere. Dakle, nijedna funkcija koja je ekivalenta funkciji f neće biti Riman-integrabilna.

4. Zadatak 4.

Ispitati da li je funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ Lebeg integrabilna na $[0, 1]$.
Resenje: Kako je funkcija $f(x)$ nenegativna i neprekidna na čitavoj oblasti definisanosti, to je za postojanje Lebegovog integrala dovoljna i neophodna konvergencija nesvojsvtvenog Rimanovog integrala

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Uvodjenjem smjene $\sqrt{x} = t$ dobijamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= 2 \arcsin\big|_0^1 = \pi. \end{aligned}$$

Dakle, Lebegov integral postoji i jednak je π.

5. Zadatak 5.

Dokazati da je funkcija $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$ Lebeg integrabilna na $(0, +\infty)$.
Resenje: Ispitivanje Lebeg integrabilnosti date funkcije ekvivalentno je ispitivanju apsolutne kon-

vergencije odgovarajućeg nesvojstvenog Rimanovog integrala. Neka je

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\ln x|}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^2+1} dx + \int_1^{+\infty} \frac{|\ln x|}{x^2+1} dx. \tag{1}$$

Ispitajmo konvergenciju prvog integrala na desnoj strani u (1).
Neka je $0 < \alpha < 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{|\ln x|}{x^2+1}}{\frac{1}{x^\alpha}} &= (0 < x < 1,\ |\ln x| = -\ln x = \ln \frac{1}{x}) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \ln \frac{1}{x}}{x^2+1} = (\text{Upustvo: Primjenom Lopitalog pravila pokazati da je} \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln \frac{1}{x} = 0) \end{aligned}$$

Kako je $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx < +\infty$ tada na osnovu kriterijuma za konvergenciju nesvojstvenog integrala zaključujemo da $\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^2+1} dx < +\infty$.
Posmatrajmo drugi integral na desnoj strani u (1). Neka je $\alpha > 1$. Tada je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{|\ln x|}{x^2+1}}{\frac{1}{x^\alpha}} &= (x > 1,\ |\ln x| = \ln x) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \ln x}{x^2+1} = 0 \end{aligned}$$

Iz konvergencije integrala $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 1$ slijedi da je $\int_1^{+\infty} \frac{|\ln x|}{x^2+1} dx < +\infty$.
Dakle, zaključujemo da je funkcija f Lebeg integrabilna na $(0, +\infty)$.

6. Zadatak 6.

Za koje α i β je funkcija $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$ Lebeg integrabilna na $[0,1]$. Za vježbu.

7. Zadatak 7.

Da li je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ako } x \in I; \\ 1, & \text{ako } x \in Q; \end{cases}$$

Riman integrabilna na $[0,1]$? Da li je Lebeg integrabilna na $[0,1]$ i izračunati $\int_0^1 f(x)dx$.
Rešenje: Funkcija nije Riman integrabilna na $[0,1]$ jer je skup njenih tačaka prekida pozitivne

mjere (mjera segmenata particije koji sadrže tačke prekida je pozitivna, zbog toga se mogu dobiti različite vrijednosti za Darbuove sume (pogledati Dirihleovu funkciju)). Po Lebegu ova funkcija je integrabilna jer je ograničena i mjerljiva (obrazložiti!). Da bi izračuali Lebeog integral od funkcije f na $[0,1]$ zamijenićemo podintegralnu funkciju sa njenom ekvivalentnom funkcijom $\phi(x) = x^3$ koja je Riman integrabilna na $[0,1]$ i dobijamo:

$$\begin{aligned} (L) \int_0^1 f(x)dx &= (L) \int_0^1 \phi(x)dx \\ &= (R) \int_0^1 \phi(x)dx \\ &= (R) \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

8. Zadatak 8.

Izračunati $\int_0^1 f(x)dx$, gdje je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x \in C; \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{ako } x \notin C; \end{cases}$$

C je Kantorov skup. Uraditi za vježbu.