Integrali - konvergencija

Andjela Mijanović

April 24, 2020

Teorijski uvod:

Teorema o monotonoj konvergenciji: Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, i neka je $f_n : X \to \overline{R}$ monotono rastući niz pozitivnih funkcija, tj. $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. Tada važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Fatuova lema: Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, i neka je $f_n : X \to \overline{R}$ niz pozitivnih funkcija (tj. $f_n \geq 0$). Tada važi

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Teorema o dominiranoj konvergenciji:Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, i neka je $f_n : X \to C$ niz funkcija koji za svako $x \in X$ konvergira ka funkciji f. Ako postoji integrabilna (na X) funkcija g, takva da za sve $n \in N$ i $x \in X$ važi $|f_n(x)| \leq g(x)$, tada važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Funkcija g u ovoj teoremi zove se dominanta.

Teorema Levija: Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, i neka je $f_n : X \to C$ neki niz funkcija. Ako je $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$, tada red $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konvergira skoro svuda, i važi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu.$$

1. Zadatak 1.

Koriseći teoremu o monotonoj konvergenciji izračunati

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} dx.$$

Rješenje:

Prvi problem sa kojim se ovdje susrećemo je da se parametar n osim u podintegralnoj funkciji nalazi i u granici integracije, tako da prvi zadatak je da n "spuštimo" iz granice u podintegralnu funkciju i za to koristimo karakterističnu funkciju. Dakle,

$$\int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x}{n})^n e^{-2x} \chi_{[0,n]}(x) dx.$$

Sada treba odrediti čemu teži podintegralna funkcija $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\chi_{[0,n]}(x)$. Jasno je da $\chi_{[0,n]}(x) \to 1$ kao i da $(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$, kada $n \to \infty$. Pa zaključujemo da je granična vrijednost niza $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = e^x \cdot 1 \cdot e^{-2x} = e^{-x}$.
Da bi mogli primjeniti teoremu o monotonoj konvergenciji ostaje još da pokažemo da je f_n monotono rastići niz. Ovaj problem se svodi na pokazivanje da je $(1+\frac{x}{n})^n$ monotono rastući niz, to ćemo i pokazati. Taj dokaz se zasniva na nejednakosti izmedju aritmetičke i geometrijske sredine primjenjene na $n+1$ brojeva $1, 1+\frac{x}{n}, ..., 1+\frac{x}{n}$.

$$(1+\frac{x}{n})^n = 1(1+\frac{x}{n})(1+\frac{x}{n})...(1+\frac{x}{n}) \le (\frac{1+1+\frac{x}{n}+1+\frac{x}{n}...+1+\frac{x}{n}}{n+1})^{n+1} = (1+\frac{x}{n+1})^{n+1}.$$

Nejedankosti

$$\begin{aligned} (1+\frac{x}{n})^n \le (1+\frac{x}{n+1})^{n+1} \\ 0 \le e^{-2x} \le e^{-2x} \\ \chi_{[0,n]}(x) \le \chi_{[0,n+1]}(x) \end{aligned}$$

izmnožimo i dobijamo da je f_n rastući niz pozitinih funkcija. Upotrebom teoreme o monotonoj konvergenciji dobijamo:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_0^\infty e^{-x} = 1.$$

2. Zadatak 2.

Dat je niz funkcija $f_n(x) = \frac{n^3x^{3/4}}{1+n^4x^2}$, $x \in [0,1]$. Dokazati da niz f_n ne konvergira uniformno na $[0,1]$ ali da ipak važi $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 0$.
Rješenje:

Nije teško uočiti da za sve $x \in [0,1]$ važi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, ali ova je konvergencija tačka po tačka. Za ispitivanje uniformne konvergencija koristimo sl. stav:
Niz funkcija $f_n : T \to C$, ravnomjerno konvergira ka funkciji f na skupu T, ako i samo ako je $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t\in T}|f_n(t) - f(t)| = 0$.
U našem slučaju je $|f_n(x) - f(x)| = \frac{n^3x^{3/4}}{1+n^4x^2}$. Ta funkcija je neprekidna na $[0,1]$ i diferencijabilna na $(0,1)$ pa dostiže makismum koji možemo da nadjemo ispitivanjem funkcije. Kada potražimo izvod dobijamo $f_n'(x) = 0$ ako i samo ako je $n^4x^2 = \frac{3}{5}$, tj. $x = \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{1}{n^2}$. Dobijamo da je $f_n(\sqrt{\frac{3}{5}}\frac{1}{n^2}) = \frac{5}{8}(\frac{3}{5})^{\frac{3}{8}}n^{3/2}$. Dakle,

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(t)| = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{8}(\frac{3}{5})^{\frac{3}{8}}n^{3/2} = \infty.$$

Tako da naš niz konvergira neravnomjerno na $[0,1]$.
Činjenica da f_n ne konvergira ravnomjerno ka 0, govori nam da ne možemo da iskoristimo teoremu iz Analize 2, koja prelazak na limes pod znakom integrala pravda pod uslovom da niz funkcija ravnomjerno konvergira na skupu integracije. Medjutim mi ćemo koristiti teoremu o dominiranoj konvergenciji.
Potrebno je pronadjemo integralnu dominantu, tj. funkciju $g(x)$ sa osobinama da $|f_n(x)| \le g(x)$, za sve $n \in N$ i da $\int_0^1 g(x)dx < +\infty$.
Posmatrajmo $m_x(n) = \frac{n^3x^{3/4}}{1+n^4x^2}$, za $n \in [0,+\infty)$. Diferenciranjem po n dobijamo da se maksimum

postiže ako je $n^4x^2 = 3$, tj. ako je $n = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{x}}$. Sada je $f_n(x) \leq m_x(x) \leq \frac{\sqrt[4]{27}}{4}x^{-3/4}$.
Funkcija $g(x) = \frac{\sqrt[4]{27}}{4}x^{-3/4}$ jeste integrabilna dominanata jer je $\int_0^1 g(x)dx = \sqrt[4]{27}$, pa dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

3. ## Zadatak 3.

Neka je $a \geq 0$. Izračunati $I(a) = \lim\limits_{n\to\infty}\int_a^{+\infty}\frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx$. Da li je $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a) = I(0)$?
Rešenje:
Uvedimo prvo smjenu $nx = t$. Posle smjene dobijamo:

$$I(a) = \lim_{n\to\infty}\int_{na}^{+\infty}\frac{te^{-t^2}}{1+\frac{t^2}{n^2}}dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t^2}}{1+\frac{t^2}{n^2}}\chi_{[na,+\infty)}(t)dt.$$

Sada je jednostavno naći integrabilnu dominantu. Naime, imenilac je uvijek veći ili jednak od 1, pa je razlomak manji ili jedak od brojioca, dok je karakteristična funkcija uvijek manja ili jednaka od jedan. Dakle, za integrabilnu domiantu uzećemo fukciju $g(x) = xe^{-x^2}$. Fukcija g je integrabilna na $(0, +\infty)$, njen integral se računa smjenom $-x^2 = s$ i jedak je $1/2$.
Sada je moguće limes ubaciti pod znak integrala. Imenilac u razlomku podintegralne funkcije teži ka 1, dok niz karakterističnih funkcija skupova $[na, +\infty)$ teži ka 0. Ovdje treba biti oprezan, jer ako je $a > 0$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} na = +\infty$, pa u tom slučaju niz karakterističnih funkcija teži ka 0. Ali kada je $a = 0$, tada je svaki član tog niza jednak 1, i limes je prema tome 1. Dakle imamo

$$I(a) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} 0dt = 0, & \text{ako } a > 0; \\ \int_0^{+\infty} te^{-t^2}dt = 1/2, & \text{ako } a = 0; \end{cases}$$

Odgovor na pitanje da li je $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a) = I(0)$ je sada jednostavan i glasi NE.

4. ## Zadatak 4.

Ako je $a > 0$ onda je $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+a} = \frac{1}{a}$. Dokazati.
Rešenje:
Podjimo od granične vrijednosti niza podintegralnih fukcija. Imamo da

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x^n+a} = \begin{cases} 1/a, & \text{ako } 0 \leq x < 1; \\ 1/(1+a), & \text{ako } x = 1; \\ 0, & \text{ako } x > 1; \end{cases}$$

Ovakav rezultat sugeriše da trebamo podijeliti oblast integracije od nula do 1 i od 1 do $+\infty$. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^n+a} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{dx}{x^n+a} + \lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^n+a} = L_1 + L_2.$$

Za prvi integral je lako pronaći integrabilnu dominantu. Imamo da $\frac{1}{x^n+a} \leq \frac{1}{a}$. Konstantna funkcija je naravno integrabilna na $[0,1]$, pa je prema TDK, $L_1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{dx}{x^n+a} = 1/a$.
Drugi integral ne možemo baš da tako lako savladamo. Još i dalje važi ocjena da je $\frac{1}{x^n+a} \leq \frac{1}{a}$, ali konstantna funkcija nije više integrabilna na intervalu beskonačne dužine. Naš niz nema integrabilnu dominantu. Zašto?
Primjetimo da je niz f_n opadajući. Tada za, $n \geq 2$, važi nejedakost $f_n(x) \leq f_2(x) = \frac{1}{x^2+a}$, što je integrabilna funkcija na intervalu $(1, +\infty)$.
Pronašli smo integrabilnu dominantu za $n \geq 2$. Da li to znači da možemo da nadjemo integrabilnu dominatu za n veće od nekog n_0?

5. Zadatak 5.

Izračunati:
a) $\int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{2^k} dx$
b) $\int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 \sin kx}{2^k} dx$
Rešenje: a) Ovaj zadatak ilustruje primjenu Levijeve teoreme.

Prvo pokažimo da je $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi |\frac{\sin kx}{2^k}| dx < +\infty$.
Ocjenom $|\sin kx| \leq 1$, dobijamo

$$\int_0^\pi |\frac{\sin kx}{2^k}| dx \leq \frac{\pi}{2^k}.$$

Kako je $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2^k} = \pi$, po Levijevoj teoremi dobijamo

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{2^k} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin kx}{2^k} dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{k2^k} \cos kx \Big|_0^\pi \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^k}{k2^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}.\end{aligned}$$

Koristili smo to da je $\cos k\pi = (-1)^k$, a zatim smo u redu ostavili samo sabirke sa neparnim indeksom, jer se parni anuliraju. Da rezultat ne bi ostavljali u obliku reda sabraćemo ga.
Uočimo funkciju $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, pa će rezultat našeg integrala biti $2\phi(1/2)$. Diferenciranjem dobijamo, $\phi'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$. Integracijom nalazimo da je $\phi(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C$. Kako je $\phi(0) = 0$, to je $C = 0$. Dakle vrijednost našeg integrala je $2\phi(1/2) = \ln 3$
b) Slično kao pod a) nalazimo da je zamjena mjesta integrala i sume opravdana ako je $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} < +\infty$, što se lako provjerava na primjer Dalamberovim kriterijumom. Dalje je,

$$\int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 \sin kx}{2^k} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^{2n}}.$$

Ovaj red nećemo diferencirati već integraliti član po čaln, nakon kraćeg računa dobijamo 20/9.