Integrali - konvergencija nastavak

Andjela Mijanović

April 27, 2020

Teorijski uvod:
Teorema o monotonoj konvergenciji: Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, i neka je $f_n : X \to \overline{R}$ monotono rastući niz pozitivnih funkcija, tj. $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$. Tada važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Fatuova lema: Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, i neka je $f_n : X \to \overline{R}$ niz pozitivnih funkcija (tj. $f_n \geq 0$). Tada važi

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Teorema o dominiranoj konvergenciji:Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, i neka je $f_n : X \to C$ niz funkcija koji za svako $x \in X$ konvergira ka funkciji f. Ako postoji integrabilna (na X) funkcija g, takva da za sve $n \in N$ i $x \in X$ važi $|f_n(x)| \leq g(x)$, tada važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Funkcija g u ovoj teoremi zove se dominanta.
Teorema Levija: Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, i neka je $f_n : X \to C$ neki niz funkcija. Ako je $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu < +\infty$, tada red $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ konvergira skoro svuda, i važi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_X |f_n| d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{+\infty} f_n d\mu.$$

1. Zadatak 1.

Dokazati da je $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{1-x} \ln x dx = -9 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)^2}$.
Rješenje:

Prvo ćemo iskoristiti sljedeći razvoj

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Zamjenom u integral dobijamo:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{1-x}\ln x dx = \int_0^1 \sqrt[3]{x}\ln x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n dx$$
$$= \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sqrt[3]{x}\ln x\Big) dx.$$

Sada treba opravdati zamjenu mjesta integrala i sume. Uslov koji diktira Levijeva teorma glasu $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |x^n\sqrt[3]{x}\ln x| dx < +\infty$.
Kako je $0 < x < 1$ tada je $|\ln x| = -\ln x$ i nakon rješavanja

$$\int_0^1 x^{n+1/3}\ln x dx = -\frac{9}{(3n+4)^2},$$

dobijamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |x^n\sqrt[3]{x}\ln x| dx = -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{n+1/3}\ln x dx$$
$$= 9\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+4)^2} < +\infty.$$

Primjenom Levijeve teoreme dobijamo traženo rješenje.

$$\int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sqrt[3]{x}\ln x\Big) dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^{n+1/3}\ln x dx$$
$$= -9\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+4)^2}$$
$$= -9\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$$

2. Zadatak 2.

Neka je $0 < a < 1$. Pokazati da je $\int_0^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a-n-1}$.
Rješenje: Iskoristićemo geometriski red da bi dobili $\frac{1}{1+e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{nx}$. Međutim geometrijski red konvergira akko je količnik po modulu manji od jedan. U našem slučaju uslov konvergencije se svodi na $e^x < 1$, tj. $x < 0$. Kako je interval integracije $(0, +\infty)$, pa nam treba neki drugi razvoj. Imamo

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{e^x}\frac{1}{1+e^{-x}} = e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nx}.$$

Ovaj red konvergira za $e^{-x} < 1$, tj. $x > 0$. Zamjenom u integral dobijamo

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx = \int_0^{+\infty} e^{ax}\Big(e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nx}\Big)dx$$
$$= \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{(a-n-1)x}dx.$$

Primjena Levijeve teoreme zahtjeva da važi $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|(-1)^n e^{(a-n-1)x}|dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1-a} < +\infty$ što nije tačno. U stvari, ako pogledamo tekst zadatka vidimo da red na desnoj strani jednakosti uslovno konvergira. On konvergira prema Lajbnicovom kriterijumu, dok apsolutno divergira. Tako je jasno da primjena Levijeve teoreme ne dolazi u obzir.
Ideja za prevazilaženje ove poteškoće može se naslutiti upravo iz dokaza Lajbnicovog kiterijuma. Naime, u ovom dokazu se monotonija odgovarajućeg niza koristi kao bi se dokazalo kako su podnizovi parnih, odnosno neparnih parcijalnih suma monotoni. Poslužimo se istom tehnikom, pa integral I napišimo sa sumom u razvijenom obliku i grupišimo članove. Radi lakšeg zapisa uvedimo oznake $\phi_k(x) = e^{(a-k-1)x}$. Imamo

$$I = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{(a-n-1)x}dx = \int_0^{+\infty}((\phi_0(x)-\phi_1(0))+(\phi_2(x)-\phi_3(x))+...)dx$$
$$= \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(\phi_{2k}(x)-\phi_{2k+1}(x))dx.$$

U poslednjoj sumi sabirci su pozitivni, jer je $\phi_k(x) \geq \phi_{k+1}(x)$. Razmjenu mjesta integrala i sume moguće je i opravdati i sa teoremom o monotonoj konvergenciji, jer ako su sabirci nekog reda pozitivni, tada je niz njegovih parcijalnih suma monotono rastući niz pozitivnih funkcija. Tako je

$$I = \int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(\phi_{2k}(x)-\phi_{2k+1}(x))dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{a-2k-2}-\frac{1}{a-2k-1}\Big)$$

Nakon razgrupisavanja dobijamo $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a-n-1}$.

3. Zadatak 3.

Dat je niz funkcija $(f_n)_{n\in N}$, $f_n : (0,1) \to R$, koje su definisane na sljedeći način

$$f_n(x) = \begin{cases} n(n+1), & \text{ako } x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}); \\ 0, & \text{ako } x \in (0,1) \setminus (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}); \end{cases}$$

Ispitati da li su funkcije f_n, $(n \in N)$ integrabilne i da li niz ima integrabilnu dominantu.
Rješenje: Primijetimo da su funkcije f_n, $(n \in N)$ proste i nenegativne, pa možemo ih zapisati u obliku

$$f_n(x) = n(n+1)\chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}(x).$$

Provjerimo da li su integrabilne.

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 n(n+1)\chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}(x)dx$$
$$= n(n+1)\int_0^1 \chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}(x)dx$$
$$= n(n+1)\mu\Big(\Big(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\Big)\Big) = n(n+1)\cdot\frac{1}{n(n+1)} = 1 < +\infty.$$

Dakle, funkcije $f_n \in L((0,1))$ za svako $n \in N$.
Sada ispitajmo egzistenciju integrabilne dominante.
Iz $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, slijedi da

$$(\forall x \in (0,1))(\exists n(x) \in N)(\forall n \in N)(n \geq n(x) \Rightarrow \frac{1}{n} < x)$$

Dakle, $x > \frac{1}{n}$, pa $x \notin \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, što znači da je $\chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}(x) = 0$ za $n \geq n(x)$ (za dovoljno veliko $n \in N$).
Prema tome zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}(x) = 0$.
Imajući u vidu da važi da je $\infty \cdot 0 = 0$ zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

Ako bi postojala integrabilna dominanta mogli bi primjeniti TDK, pa bi važilo

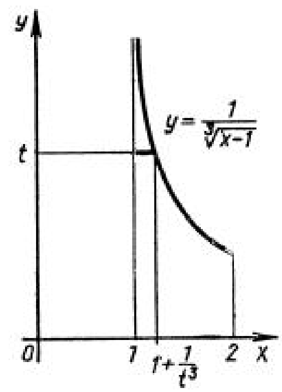
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)dx.$$

Odnosno, imali bi da je $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 0$, što je nemoguće. Dakle, niz nema integrabilnu dominantu.

4. Zadatak 4.

Izračunati Lebegov integral of funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ na $(1, 2)$.
Rješenje: Da bi izračunali integral od funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$, konstujišimo njenu sječenu funkciju brojem t, $t > 1$.

$$f_t(x) = \begin{cases} t, & \text{ako } x \in (1, 1 + \frac{1}{t^3}); \\ f(x), & \text{ako } x \in (1 + \frac{1}{t^3}, 2); \end{cases}$$



Izračuanajmo integral sječene funkcije.

$$\begin{aligned}(L)\int_{(1,2)} f_t(x) =& \int_1^{1+\frac{1}{t^3}} t dx + \int_{1+\frac{1}{t^3}}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \\ =&(t(1 + \frac{1}{t^3}) - t) + (\frac{3}{2} - \frac{3}{2t^2}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2t^2}.\end{aligned}$$

Sada primjenom TMK dobijamo

$$\int_1^2 f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2t^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

5. Zadatak 5.

Neka je $\{f_n\}$ niz nenegativnih funkcija koji konvergira ka funkciji f na R, i pretpostavimo da $\lim\limits_{n\to\infty} \int_R f_n dm - \int_R f dm < \infty$. Pokazati da za svaki mjerljivi skup $A \subset R$ važi

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n dm = \int_A f dm.$$

Rješenje: Neka je $g_n = f_n - f_n\chi_A$. Kako je $g_n \geq 0$ i $f_n \to f$, kad $n \to \infty$, primjenom Fatuove leme dobijamo

$$\int_R \lim_{n\to\infty} g_n dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_R g_n dm$$
$$\int_R (f - f\chi_A) dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_R (f_n - f_n\chi_A) dm$$
$$\int_R f dm - \int_A f dm \leq \lim_{n\to\infty} \int_R f_n dm - \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n dm$$

Iz poslednje nejednakosti dobijamo da je

$$\int_A f dm \geq \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n dm. \tag{1}$$

Neka je $h_n = f_n\chi_A \geq 0$, sličnim postupkom dobijamo

$$\int_R \lim_{n\to\infty} h_n dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_R h_n dm$$
$$\int_R f\chi_A dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_R f_n\chi_A dm$$
$$\int_A f dm \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n dm$$

Iz poslednje nejednakosti i (1) slijedi da je

$$\int_A f dm = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n dm$$

6. Zadatak 6.

Dokazati da važe sljedeće jednakosti:
a) $\int_0^1 \frac{1-(1-u)^p}{u} du = \int_0^1 \frac{1-t^p}{1-t} dt$
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \binom{p}{n} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{n(n+p)}$.
Rješenje a) Za vježbu. Primjeniti smjenu $1 - u = t$.

b) Korisićemo jednakost pod a) kako bi riješili zadatak. Neka je

$$L = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^p}{u} du$$
$$D = \int_0^1 \frac{1-t^p}{1-t} dt$$

Zapišimo L u drugačijem obliku.

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \frac{1-(1-u)^p}{u} du \\ &= \int_0^1 \frac{1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{p}{n} u^n}{u} du \\ &= \int_0^1 \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \binom{p}{n} u^n}{u} du \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{p}{n} u^{n-1} du. \end{aligned}$$

Da bi zamjenili mjesta integralu i sumi provjeravamo da li je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \left| \binom{p}{n} u^{n-1} \right| du < +\infty \tag{2}$$

Dokazati (2) za vježbu.
Kako red jeste konvergentan, možemo primjeniti Levijevu teoremu. Dobijamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{p}{n} u^{n-1} du &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{p}{n} \int_0^1 u^{n-1} du \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{p}{n} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Dakle

$$L = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{p}{n} \frac{1}{n}.$$

Zapišimo D u drugačijem obliku. Jasno je da ćemo koristiti razvoj $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$. Imamo

$$D = \int_0^1 \frac{1-t^p}{1-t} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (t^n - t^{n+p}) dt.$$

Za razmjenu mjesta sume i integrala možemo koristiti teoremu Levija ali jednostavniji način je primjena TMK. Naime, kako je $t \in [0,1]$, a $p > 0$ (tj. $p + n > n$), to je svaki sabirak u ovom redu pozitivan. Tako je

$$\begin{aligned} D &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (t^n - t^{n+p}) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p}{(n+1)(n+p+1)}, \end{aligned}$$

odnosno $D = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{n(n+p)}$, nakon pomjeranja indeksa sumacije.
Iz a) imamo da je $L = D$, pa dobijamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \binom{p}{n} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{n(n+p)}.$$