L_p prostori

Andjela Mijanović

May 5, 2020

Teorijski uvod:
Lebeg-Stiltjesova mjera: Posmatrajmo rastuću, neprekidnu s lijeva funkciju $F : R \to R$, tada je $\mu_F([a,b)) = F(b^-) - F(a)$. Borelova σ -algebra na R, generiše elemente oblika $[a,b)$.

$$\int_a^b f d\mu_F$$

nazivamo Lebeg-Stiltjesov integral.
Teorema Fubinija: Neka su $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ i $(Y, \mathfrak{N}, \lambda)$ dva prostora sa mjerom, i neka je $f : X \times Y \to \overline{R}$, pozitivna, $\mu \times \lambda$-mjerljiva funkcija. Tada za skoro svako x (odnosno y), preslikavanje $(y \to f(x,y))$ $(x \to f(x,y))$ mjerljivo i važi jednakost

$$\int_{x \times Y} f(x,y) d(\mu \times \lambda) = \int_X \int_Y f(x,y) d\lambda(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) d\mu(x) d\lambda(y).$$

Helderova nejednakost: Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, neka su p, $q > 1$, realni brojevi takvi da važi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

neka su $f, g : X \to C$ mjerljive funkcije. Tada važi

$$\Big| \int_X fg d\mu \Big| \leq \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_X |g|^q d\mu \Big)^{1/q}.$$

Nejednakost Minkovskog: Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom, neka je $p \geq 1$ i neka su $f, g : X \to C$ mjerljive funkcije. Tada važi

$$\Big(\int_X |f+g|^p d\mu \Big)^{1/p} \leq \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p} + \Big(\int_X |g|^p d\mu \Big)^{1/p}.$$

L_p **prostori**: Neka je $\mathfrak{L}_\mathfrak{p}(X, \mu) = \{f : X \to C : \int_X |f|^p d\mu < +\infty\}$, za $p \geq 1$. Na osnovu nejednakosti Minkovskog , skup $\mathfrak{L}_\mathfrak{p}(X, \mu)$ je kopmleksan vektorski prostor,a preslikavanju $f \to ||f||_p = \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p}$ malo nedostaje da bude norma. Naime, uslovi $||\lambda f||_p = |\lambda| ||f||_p$ i $||f||_p \geq 0$ su ispunjeni. Nejednakost trougla je nejedakost Minkovskog. Jedino nije tačna ekvivalencija $||f||_p = 0 \iff f = 0$. Funkcija f može biti različita od nule na nekom skupu μ -mjere nula, a da pritome važi $||f||_p = 0$. Zato je izraz $||f||_p$ samo polunorma, a ne i norma.
U tom slučaju uočavamo relaciju

$$f \sim g \iff f = g, \ \mu - \text{skoro svuda.}$$

Kako je u pitanju relacija ekvivalencije to ćemo količnički skup $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}}(X,\mu)/\sim$ označiti sa $L_p(X,\mu)$. Elementi skupa $L_p(X,\mu)$ dakle nijesu funkcije, već klase ekvivalentnih funkcija.
ProstorL_∞: Za mjerljivu funkciju $f: X \to C$, kažemo da je esencijalno ograničena ako postoji konstanta $M > 0$ takva da nejednakost $|f| \leq M$, važi μ-skoro svuda. Najmanja konstanata M sa takvom osobinom naziva se esencijalni supremum funkcije $|f|$ i obilježava sa $\sup ess_X|f|$. Pa je $L_\infty(X,\mu) = \{f : X \to C : ||f||_\infty < +\infty\}$.

1. # Zadatak 1.

Naći $\int_0^1 x d\tau(x)$, gdje je $\tau(x)$ Kantorova stepenica.
Rješenje: Podijelimo obalst integracije na sljedeći način

$$\int_0^1 x d\tau(x) = \int_0^{1/3} x d\tau(x) + \int_{1/3}^{2/3} x d\tau(x) + \int_{2/3}^{1} x d\tau(x).$$

Kako je $\tau(x) = \frac{1}{2}$ za $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ to je $\int_{1/3}^{2/3} x d\tau(x) = 0$. Dalje, smjenom dobijamo

$$\int_0^1 x d\tau(x) = \int_0^1 \frac{x}{3} d\tau(\frac{x}{3}) + \int_0^1 (\frac{x}{3} + \frac{2}{3}) d\tau(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}).$$

Koristimo sljedeća svojstva Kantorove stepenice:

$$\begin{gathered}\tau(0) = 0\\ \tau(\tfrac{x}{3}) = \tfrac{1}{2}\tau(x),\\ \tau(1-x) = 1 - \tau(x).\end{gathered}$$

Odakle dobijamo da je $\tau(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tau(x)$. Dalje je,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x d\tau(x) =& \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{3} d\tau(x) + + \frac{1}{2}\int_0^1 (\frac{x}{3} + \frac{2}{3}) d\tau(x)\\ =& \frac{1}{6}\int_0^1 x d\tau(x) + \frac{1}{6}\int_0^1 x d\tau(x) + \frac{1}{3}\int_0^1 d\tau(x)\\ =& \frac{1}{3}\int_0^1 x d\tau(x) + \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Dobijamo da je

$$\int_0^1 x d\tau(x) = \frac{1}{2}.$$

2. # Zadatak 2.

Neka su f i g pozitivne funkcije na R, i neka je $E_y = \{x | g(x) \geq y\}$. Tada je $\int_R f(x)g(x)dx = \int_0^{+\infty} \phi(y)dy$, gdje je $\phi(y) = \int_{E_y} f(x)dx$.
Rješenje: Imamo da je

$$\int_0^{+\infty} \phi(y)dy = \int_0^{+\infty}\int_{E_y} f(x)dxdy.$$

Nameće se ideja da primjenimo Fubinijevu teoremu. Medjutim, problem je što skup na kome se vrši integracija u unutrašnjem integralu zavisi od y, tj. od promjeniljive u spoljašnjem integralu.
Zato uočimo funkciju $K : R \times R \to [0, +\infty]$, datu sa

$$K(x,y) = \begin{cases} f(x), & \text{ako } g(x) \geq y; \\ 0, & \text{ako } g(x) < y; \end{cases}$$

Pa imamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{E_y} f(x) dx dy &= \int_0^{+\infty} \int_R K(x,y) dx dy = \int_R \int_0^{+\infty} K(x,y) dy dx \\ &= \int_R \Big(\int_0^{g(x)} f(x) dy + \int_{g(x)}^{+\infty} 0 dy \Big) dx \\ &= \int_R f(x) g(x) dx. \end{aligned}$$

3. ## Zadatak 3.

Pokazati da funkcija $\frac{1}{\sqrt{x}(1+|\ln x|)}$ pripada prostoru $L_2(0, +\infty)$, ali ne pripada prostoru $L_p(0, +\infty)$ ni za jedno drugo $p \geq 1$.
Rješenje: Treba da pokažemo da je

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

Smjenom $\ln x = t$ dobijamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1 + |\ln x|)^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1 + |t|)^2} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t)^2} = 4. \end{aligned}$$

Tako smo dokazali da $f \in L_2(0, +\infty)$.
Još treba da se uvjerimo da ne pripada nijednom drugom L_p prostoru. Dovoljno je pokazati da je za $p \neq 2$, $\int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx = +\infty$.
Istom smjenom $\ln x = t$ dobijamo

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{p/2}(1 + |\ln x|)^p} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{(1-p/2)t} dt}{(1 + |t|)^2}. \end{aligned}$$

Sada, ukoliko je $p < 2$, tada je $1 - p/2 > 0$, pa podintegralna funkcija u poslednjem integralu ima eksponencijalni rast, kada $t \to +\infty$, i integral divergira. S druge strane , ako je $p > 2$, tada je $1 - p/2 < 0$, pa podintegralna funkcija teži ka nuli kada $t \to +\infty$, ali zato teži ka beskonačnosti i to eksponencijalno kada $t \to -\infty$. Tako poslednji integral konvergira samo kada je $1 - p/2 = 0$, tj. u slučaju kada je $p = 2$.

4. Zadatak 4.

Neka je f mjerljiva funkcija na prostoru E konačne mjere μ. Pokazati da tada $f \in L_p(E)$ i $0 < q < p$ povlači $f \in L_q(E)$.
Rješenje: Treba da pokažemo sljedeću implikaciju

$$f \in L_p(E) \implies f \in L_q(E)$$

odnosno, kada se upotrijebi definicija

$$\int_E |f|^p d\mu < +\infty \implies \int_E |f|^q d\mu < +\infty$$

Primjenićemo Helderovu nejednakost na funkcije $|f|^q$ i 1. Dakle, imamo

$$\int_E |f|^q \cdot 1 d\mu \leq \Big(\int_E (|f|^q)^{p/q} d\mu\Big)^{q/p} \cdot \Big(\int_E 1^r d\mu\Big)^{1/r} = \Big(\int_E (|f|^p) d\mu\Big)^{q/p} \cdot (\mu(E))^{1/r}$$

gdje je $\frac{q}{p} + \frac{1}{r} = 1$, odnosno $r = \frac{p}{p-q}$.
Oba činioca u posljednjem proizvodu su konačna po pretpostavci, pa je tada i konačan integral $\int_E |f|^q d\mu$.

5. Zadatak 5.

Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom takav da je $\mu(X) < +\infty$. Dokazati da je tada $\lim\limits_{p\to+\infty} ||f||_p = ||f||_\infty$.
Rješenje: Označimo sa M esencijalni supremum funkcije $|f|$. Nejednakost $|f(x)| \leq M$ važi μ-skoro svuda pa se može integraliti. Prvo ćemo je stepenovati sa p. Dakle, dobijamo

$$\int_X |f(x)|^p d\mu \leq M^p \mu(X).$$

Ako poslednju nejednakost stepenujemo sa brojem $1/p$, dobijamo

$$||f||_p \leq M(\mu(X))^{1/p}. \tag{1}$$

Kada $p \to +\infty$, $(\mu(X))^{1/p} \to 1$.
Sada funkciju $|f(x)|$ treba ocjeniti odozdo. Uočimo (za dato ϵ) skup

$$A_\epsilon = \{x \in X : |f(x)| \geq M - \epsilon\}.$$

Ponovo ćemo nejednakost $|f(x)| \geq M - \epsilon$, koja važi za sve $x \in A_\epsilon$ stepenovati sa p, potom integraliti po skupu A_ϵ i zatim stepenovati sa brojem $1/p$.
Dakle, dobijamo

$$\Big(\int_{A_\epsilon} |f(x)|^p d\mu\Big)^{1/p} \geq (M - \epsilon)\mu(A_\epsilon)^{1/p}.$$

Kako je $\Big(\int_{A_\epsilon} |f(x)|^p d\mu\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_X |f(x)|^p d\mu\Big)^{1/p}$, dobijamo da je

$$||f||_p \geq (M - \epsilon)\mu(A_\epsilon)^{1/p}. \tag{2}$$

Kombinujući (1) i (2) dobijamo

$$(M - \epsilon)\mu(A_\epsilon)^{1/p} \leq ||f||_p \leq M(\mu(X))^{1/p}.$$

Na osnovu poslednje nejednakosti imamo

$$M - \epsilon \leq \liminf_{p \to +\infty} ||f||_p \leq \limsup_{p \to +\infty} ||f||_p \leq M.$$

Sada kad puštimo limes kada $\epsilon \to 0$, dobijamo

$$M \leq \liminf_{p \to +\infty} ||f||_p \leq \limsup_{p \to +\infty} ||f||_p \leq M.$$

Što znači da su donji i gornji limes jednaki M, pa je i $\lim_{p \to +\infty} ||f||_p = M$, što je trebalo pokazati.

6. Zadatak 6.

Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ prostor sa mjerom takav da je $\mu(X) < +\infty$.
a) Dokazati da izraz $d(f,g) = \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$, pretstavlja jednu metriku na skupu svih mjerljivih funkcija posječenom po relaciji "biti jednak μ-skoro svuda";
b) Dokazati da je konvergencija po mjeri μ ekvivalentna konvergenciji u metrici d.
Rješenje: a) Prva osobina koju treba provjeriti je $d(f,g) \geq 0$ i da $d(f,g) = 0 \iff f = g$, μ-skoro svuda. Kako je prostor prosječen relacijom "biti jednak μ-skoro svuda" i podintegralna funkcija je pozitivna to je integral jednak nuli ako i samo ako je ta funkcija jednako nuli skoro svuda. Pa je prva osobina zadovoljena.
Druga osobina $d(f,g) = d(g,f)$ trivijalno važi. Ostaje još nejednakost trougla $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$. Naime, kako je

$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$

to je dovljno pokazati da za pozitivne brojeve a, b i c iz $a \leq b + c$ slijedi da je $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$. Kako je funkcija $a \to \frac{a}{1+a}$ rastuća, to imamo da je

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}.$$

Ako zamjenimo $a = |f(x) - h(x)|$, $b = |f(x) - g(x)|$ i $c = |g(x) - h(x)|$, a potom integralimo po mjeri μ duž skupa X dobimo treću osobinu.
b) Pokažimo da iz $d(f_n, f) \to 0 \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$.
$f_n \xrightarrow{\mu} f$ je po definicije ekvivalentno tome da

$$\mu(A_{n,\epsilon}) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \overset{n \to +\infty}{\to} 0.$$

Imamo da je,

$$\mu(A_{n,\epsilon}) = \int_{A_{n,\epsilon}} d\mu = \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \int_{A_{n,\epsilon}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} d\mu.$$

Kako je funkcija $a \to \frac{a}{1+a}$ rastuća, na skupu $A_{n,\epsilon}$ važi nejednakost

$$\frac{\epsilon}{1+\epsilon} \leq \frac{|f_n(x) - f(x)|}{1 + |f_n(x) - f(x)|}.$$

Kada integralimo po skupu $A_{n,\epsilon}$ i iskombinujemo sa prethodnim dobijamo da je $\mu(A_{n,\epsilon}) \leq \frac{1+\epsilon}{\epsilon} d(f_n, f)$.
Dakle, dobijamo da $d(f_n, f) \to 0 \implies f_n \xrightarrow{\mu} f$.
Dokažimo sada drugi smjer.

Neka je $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Integral po skupu X podijelimo na dva dijela -po skupu $A_{n,\epsilon}$ i po njegovom komplementu. Imamo

$$d(f_n, f) = \int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu = \int_{A_{n,\epsilon}} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu + \int_{A^C_{n,\epsilon}} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} d\mu \leq \mu(A_{n,\epsilon}) + \epsilon\mu(X)$$

Prolazeći gornjim limesom dobijamo

$$0 \leq \limsup_{n\to+\infty} d(f_n, f) \leq \epsilon\mu(X).$$

Kako je ϵ proizvoljno, to dobijamo da $f_n \xrightarrow{\mu} f \implies d(f_n, f) \to 0$.