$\boxed{\mathbf{1}}$ Dokazati sljedeću nejednakost

$$(m+n)! \leq \sqrt{(2m)!(2n)!}$$

Rješenje: Znamo da je

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Dalje je,

$$(m+n)! = \Gamma(m+n+1) = \int_0^{+\infty} x^{m+n}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^m e^{-\frac{x}{2}} x^n e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

Primjenimo Helderovu nejednakost za $p = q = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^m e^{-\frac{x}{2}} x^n e^{-\frac{x}{2}} dx \leq & \Big(\int_0^{+\infty} x^{2m}e^{-x}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ = & \sqrt{(2m)!}\sqrt{(2n)!}.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Neka je $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ mjerljiv prostor i $\mu(X) \in (0, +\infty)$. Neka je $f \in L_\infty(X)$ i $\alpha_n = \int_X |f|^n d\mu$ za $n \in N$. Dokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = ||f||_\infty.$$

Rješenje: Prvo primjetiomo da za $||f||_\infty = 0$ ovaj problem nema smisla. Zaista,

$$\begin{aligned}||f||_\infty = 0 &\implies f = 0 \text{ s.s na } X \\ &\implies \alpha_n = 0 \text{ za } n \in N.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $0 < ||f||_\infty < \infty$. Dalje je,

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} = & \int_X |f|^{n+1}d\mu = \int_X |f|^n|f|d\mu \\ \leq & ||f||_\infty \cdot \int_X |f|^n d\mu = ||f||_\infty \cdot \alpha_n.\end{aligned}$$

Odakle dobijamo,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq ||f||_\infty, \text{ za svako } n \in N$$

Odnosno dobijamo ocjenu

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq ||f||_\infty. \tag{1}$$

Dalje, iskoristimo Helederovu nejednaskost za $p = \frac{n+1}{n}$ i $q = n + 1$. Dobijamo,

$$\begin{aligned}\alpha_n = \int_X |f|^n \cdot 1 d\mu \leq& \Big(\int_X (|f|^n)^{\frac{n+1}{n}} d\mu\Big)^{\frac{n}{n+1}} \cdot \Big(\int_X 1^{n+1} d\mu\Big)^{\frac{1}{n+1}} \\ =& \Big(\int_X (|f|^{n+1}) d\mu\Big)^{\frac{n}{n+1}} (\mu(X))^{\frac{1}{n+1}} \\ =& \alpha_{n+1}^{\frac{n}{n+1}} (\mu(X))^{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

Odakle dobijamo

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq \alpha_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} (\mu(X))^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Dalje, iskoristimo jednu od ideja sa prethodnih vježbi. Uočimo za dato ϵ skup

$$A_\epsilon = \{x \in X : |f(x)| \geq ||f||_\infty - \epsilon\}.$$

Važno je naglasiti da skup A_ϵ ima strogo pozitivnu mjeru. Jer u suprotnom bi broj $||f||_\infty - \epsilon$ bio esencijalno gornje ograničenje funkcije $|f(x)|$ što se kosi sa činjenicom da je $||f||_\infty$ njen esencijalni supremum (tj. najmanje esencijalno gornje ograničenje).
Sada je,

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} = \Big(\int_X (|f|^{n+1}) d\mu\Big)^{\frac{1}{n+1}} \geq& \Big(\int_{A_\epsilon} (|f|^{n+1}) d\mu\Big)^{\frac{1}{n+1}} \\ \geq& (\mu(A_\epsilon))^{\frac{1}{n+1}} (||f||_\infty - \epsilon).\end{aligned}$$

Slijedi da je,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq& (||f||_\infty - \epsilon)\Big(\frac{\mu(A_\epsilon)}{\mu(X)}\Big)^{\frac{1}{n+1}} \\ \Longrightarrow& \liminf_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq ||f||_\infty - \epsilon \text{ za svako } \epsilon > 0 \\ \Longrightarrow& \liminf_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \geq ||f||_\infty\end{aligned}$$

Iz (1) i poslednje nejednakosti dobijamo da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = ||f||_\infty.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ a) Dokazati da je preslikavanje $F_a : L_1(0, +\infty) \to R$, dato sa $F_a(x) = \int_0^a |x(t)| dt$ neprekidno;
b) Dokazati da je skup funkcija $\{x \in L_1 : \forall s \int_0^s |x(t)| dt = s^2\}$ zatvoren.

Rješenje: a) Treba dokazati da iz $x_n \to x$ slijedi $F_a(x_n) \to F_a(x)$. Treba imati na umu da se radi o različitim vrstama konvergencije. Naime, x_n-ovi pripadaju domenu, tj. prostoru $L_1(0, +\infty)$ pa formula $x_n \to x$ zapravo znači $||x_n - x||_{L_1} \to 0$. S druge strane $F_a(x_n)$ su

realni brojevi pa $F_a(x_n) \to F_a(x)$, zapravo znači da $|F_a(x_n) \to F_a(x)| \to 0$.
Imamo

$$|F_a(x_n) \to F_a(x)| = \Big|\int_0^a |x_n(t)|dt - \int_0^a |x(t)|dt\Big| \leq \int_0^a ||x_n(t)| - |x(t)||dt \leq \int_0^a |x_n(t) - x(t)|dt$$
$$\leq \int_0^{+\infty} |x_n(t) - x(t)|dt = ||x_n - x||_{L_1}$$

Dakle imamo

$$|F_a(x_n) \to F_a(x)| \leq ||x_n - x||_{L_1}$$

Odakle slijedi tražena imlikacija.
b) Neka je

$$A = \{x \in L_1 : \forall s \int_0^s |x(t)|dt = s^2\}$$

Skup A možemo predstaviti kao $A = \cap_s F_s^{-1}(\{s^2\})$. Kako je jednočlan skup $\{s^2\}$ zatvoren, i kako je F_s neprekidno preslikavanje, to je $F_s^{-1}(\{s^2\})$ zatvoren skup. Sada je A zatvoren kao presjek zatvorenih skupova.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Linearni operator je definisan sa $y(s) = \int_0^1 \frac{\sin(st)}{t^\alpha}x(t)dt$, $y = Ax$. Ako je $A : L_p(0,1) \to L_q(0,1)$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, za koje α je operator A ograničen.

Rješenje: Za početak iskoristimo Helderovu njednakost. Imamo

$$|y(s)| \leq \Big(\int_0^1 \Big|\frac{\sin(st)}{t^\alpha}\Big|^q dt\Big)^{\frac{1}{q}} ||x||_p.$$

Sada stepenujemo sa q, pa integralimo od nula do jedan. Dobijamo

$$\int_0^1 |y(s)|^q ds \leq \int_0^1 \int_0^1 \Big|\frac{\sin(st)}{t^\alpha}\Big|^q dtds||x||_p^q.$$

Sada stepenujemo sa $\frac{1}{q}$ i dobijamo

$$\Big(\int_0^1 |y(s)|^q ds\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \Big(\int_0^1 \int_0^1 \Big|\frac{\sin(st)}{t^\alpha}\Big|^q dtds\Big)^{\frac{1}{q}} ||x||_p.$$

Treba da pokažemo konačnost poslednjeg dvostrukog integrala. Za početak ispitajmo egzistenciju unutrašnjeg integrala.
Uzimajući u obzir asimptotsku relaciju

$$\frac{\sin st}{t^\alpha} \sim \frac{s}{t^{\alpha-1}}$$

vidimo da unutrašnji integral postoji za $q(\alpha-1) < 1$, tj. za $\alpha < 1+1/q$, odnosno $\alpha < 2-1/p$.
Da bi smo ispitali egzistenciju spoljašnjeg integrala uvedimo smjenu $st = u$ u unutrašnji integral, pa dobijamo

$$\int_0^1 \int_0^1 \Big|\frac{\sin(st)}{t^\alpha}\Big|^q dtds = \int_0^1 s^{\alpha q-1} \int_0^s \frac{\sin^q u}{u^{q\alpha}} duds.$$

Funkcija $s \mapsto s^{\alpha q-1}\int_0^s \frac{\sin^q u}{u^{q\alpha}}du$, je neprekidna na $(0,1]$, pa se egzistencija spoljasnjeg integrala svodi na ispitivnje sigulariteta u nuli. Da bi smo to provjerili izračunaćemo njen limes kada s teži ka nuli. Iskoristićemo Lopitalovo pravilo, računicu sami izvedite. Dobijamo

$$\lim_{s\to 0} s^{\alpha q-1}\int_0^s \frac{\sin^q u}{u^{q\alpha}}du = 0.$$

Dakle, nula nije uopšte singularitet. Zaključujemo da je A ograničen za $\alpha < 2-1/p$. Za $\alpha \geq 2-1/p$ treba dalje ispitati. Pretpostavićemo da u tom slučaju da operator nije dobro definisan.
Neka je $x(t) = \frac{1}{t^\beta}$. Ova funkcija pripada prostoru $L_p(0,1)$, ako je $\int_0^1 \frac{1}{t^{p\beta}} < +\infty$, tj ako je $p\beta < 1$, odnosno $\beta < 1/p$.
S druge strane je,

$$y(s) = \int_0^1 \frac{\sin st}{t^{\alpha+\beta}}dt.$$

Kako je podintegralna funkcija asimptotski ekvivalentna sa $\frac{s}{t^{\alpha+\beta-1}}$, kada $t \to 0$. Treba nam β sa osobinom da je $2-\alpha \leq \beta < 1/p$. Takvo β je uvijek moguće odabrati ako je $2-\alpha < 1/p$.
Imamo još slučaj $\alpha = 2-1/p$. Koristimo funkciju $f(x) = \frac{1}{t^{1/p}\ln(t/2)}$. Jednostavno se pokazuje da ona pripada prostoru $L_p(0,1)$, s druge stane $y(s) = \int_0^1 \frac{\sin st}{t^2 \ln(t/2)}dt$, nije dobro definisano jer je podintegralna funkcija asimptotski ekvivalentna sa $\frac{s}{t\ln(t/2)}$, kada $t \to 0$.
Zaključujemo da je A ograničen ako i samo ako je $\alpha < 2-\frac{1}{p}$.

$\boxed{5}$ Pokazati da je relacijom $\xi_n = \int_0^1 f(t)t^n dt$, $f \in L_1(0,1)$ definisan ograničen linearni operator $A : L_1(0,1) \to c_0$, $A(f(t)) = \xi$, $\xi = (\xi_n)_{n=0}^\infty$ i odrediti mu normu.

Rješenje: Pokažimo da je operator dobro definisan.
Treba pokazati da za $f \in L_1(0,1)$, $Af \in c_0$. Imamo

$$\begin{aligned}||Af||_m =& \sup_{n\in N}\{|\int_0^1 f(t)t^n dt|\}\\ \leq& \sup_{n\in N}\{\int_0^1 |f(t)|t^n dt\}\\ \leq& ||f|| < +\infty\end{aligned}$$

Dakle, $Af \in m$, treba još pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)t^n dt = 0.$$

Želimo da zamjenimo mjesta integralu i limesu. Koristićemo TDK. Kako je

$$|f(t)||t^n| \leq |f(t)|, t \in [0,1]$$

imamo da

$$\int_0^1 |f(t)||t^n|dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt < +\infty.$$

Pronašli smo integrabilnu dominantu, pa imamo

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)t^n dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}(f(t)t^n)dt = 0.$$

Zaključujemo da $Af \in c_0$.
Linearnost pokažite sami.
Već smo pokazali da je $||Af||_m \leq ||f||_{L_1}$, pa je $||A|| \leq 1$. Da bi odredili normu, uzmimo funkciju $f(x) = 1$, jasno je da $f \in L_1(0,1)$.
S druge strane je,

$$Af = \Big(\int_0^1 t^n dt\Big)_{n=0}^{+\infty} = \Big(\frac{1}{n+1}\Big)_{n=0}^{\infty}.$$

Odnosno, $Af = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$. Dobijamo da je $||Af||_m = 1$. Dalje je, $||Af|| = 1 \cdot ||f|| \implies ||A|| = 1$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Naći konjugovani operator operatoru A ako je $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, definisan sa $A(x(t)) = \int_0^t x(s)ds$.

Rješenje: Operator A je linearan i ograničen -sami provjerite. Da pronadjemo konjugovani operator treba da važi

$$< Ax, y >_{L_2[0,1]} = < x, A^*, y >_{L_2[0,1]}, \forall x(t), y(t) \in L_2[0,1].$$

Dobijamo,

$$\begin{aligned}
< Ax, y >_{L_2[0,1]} &= \int_0^1 Ax(t)y(t)dt \\
&= \int_0^1 \Big(\int_0^t x(s)ds\Big)y(t)dt \\
&= \int_0^1 x(t)\Big(\int_t^1 y(s)ds\Big)dt \\
&= \int_0^1 x(t)A^*y(t)dt \\
&= < x, A^*, y >_{L_2[0,1]} .
\end{aligned}$$

Dakle, konjugovani operator operatoru A, je definisan sa $A^* : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $A^*y(t) = \int_t^1 y(s)ds$.