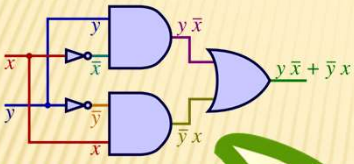
INDUSTRIJSKA PNEUMATIKA



Studijski program Mehatronika
III SEMESTAR
Nastavni fond: 2+2

Lekcija 3 (nastavak)

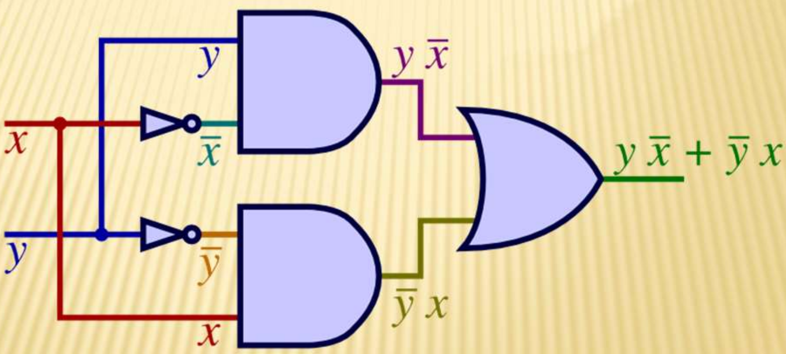
BULOVA ALGEBRA I ELEMENTARNA LOGIČKA KOLA

Predavač:

Prof. dr Marina Mijanović Markuš

UCG Mašinski fakultet Podgorica

ELEMENTARNA LOGIČKA KOLA



ZAŠTO BULOVA ALGEBRA?

- Sve inženjerske discipline imaju matematičku podlogu na osnovu koje razvijaju svoje koncepte. Razvoj digitalnih sistema, uključujući i računarske sisteme, nije različit u tom pogledu. U konkretnom slučaju, matematička osnova se naziva **Bulova (Boolean) algebra. Džordž Bul** (George Bool) je prvi matematičar koji je 1854. godine publikovao knjigu pod naslovom *An Investigation of the Laws of Thought* u koju je opisao rigoroznu matematičku strukturu koja se odnosi na ispitivanje načina rezonovanja.

ZAŠTO BULOVA ALGEBRA?

- Sve do kasnih tridesetih godina prošlog vijeka Bulova algebra u suštini nije naišla ni na kakvu praktičnu primjenu. Japanski naučnik **Nakašima** (A. Nakashima) 1937. godine i naredne godine **Šenon** (C. E. Shanon) sa MIT-a (Massachusetts Institut of Technology), svaki nezavisno, su primijenili Bulovu algebru za analizu mreže sa relejima. Ovo je bila veoma važna aplikacija, jer su telefonski sistemi u to vrijeme bili u brzom razvoju, pa je bilo neophodno koristiti neki pogodan matematički aparat kojim bi se opisivale željene komutacije i način ostvarivanja veza. Od tog trenutka, Bulova algebra je doživjela veliku ekspanziju u svakoj primjeni, i današnji sistemi su sve više digitalni.

ZAŠTO BULOVA ALGEBRA?

- Zbog važnosti prekidačke algebre kod projektovanja ne samo računara, nego i komunikacionih sistema, sistema upravljanja (i pneumatskog takođe) i bilo kojeg drugog sistema koji zahtijeva ili koristi digitalnu tehnologiju, veoma je važno da se razumije značaj ove algebre.
- Zbog toga ćemo definisati osnovne pojmove koji se odnose na Bulovu algebru i njen podskup - prekidačku algebru.

GEORGE BOOLE (1815-1864).

- sin obućara
- postao je briljantan naučnik - predavao latinski i grčki jezik
- poznati matematičar po doprinosima u oblasti diferencijalnih jednačina i u algebri
- pokušao da izvede matematičku analizu mišljenja (logike) - uspostavio je "logičku algebru" 1854

CLAUDE E. SHANON

- 1938. god. u svojoj magistarskoj tezi na MIT-u (*Massachusetts Institute of Technology* - *Boston*), opisao metod za predstavljanje sklopova od (tada elektromehaničkih) prekidača, skupom matematičkih izraza na bazi Booleove algebre.
- Ta metoda se i danas koristi za dizajn i analizu prekidačkih kola.
- prednosti matematskog opisivanja rada logičkih sklopova: lakše je projektovati pomoću algebarskih izraza koji opisuju prekidačka kola, nego pomoću šema ili logičkih dijagrama.

OSNOVNI ZAKONI I AKSIOMI ALGEBARSKE LOGIKE

ili Bulova (prekidačka) algebra

Zakoni logičkog donošenja odluka zasnivaju se na tvrđenju koje može biti

istinito ili neistinito,

ali ni u kom slučaju djelimično istinito ili djelimično neistinito.

BULOVA (PREKIDAČKA) ALGEBRA

Iako Bulova algebra može da bude definisana i na beskonačnom skupu elemenata, njena je primjena u digitalnoj tehnici ograničena na algebru na binarnom skupu {0,1}.

BOOLEOVA ALGEBRA

- Varijable mogu imati jednu od vrijednosti iz skupa {0,1}
- skup operacija nad varijablama $\{+, \times, /\}$

- logičko sabiranje X+Y=Z se može čitati kao:
  "X ili Y jednako Z" ili "X plus Y jednako Z”
- logičko množenje $X \times Y = Z$ se može čitati kao:
  "X i Y jednako Z" ili "X puta Y jednako Z”
- Invertovanje (negacija) $X = \overline{Y}$ “X jednako ne-Y”

LOGIČKE OPERACIJE

- Usvojeno je da se za konjunkciju koristi simbol:

" • " - *"logičko* I"

- Negacija koristi simbol:

" ¬ ", *"logičko* NE"

- Za disjunkciju usvajamo simbol:

" + " *"logičko* ILI"

LOGIČKE OPERACIJE

U algebrskoj logici promjenljive, bilo da su nezavisne ili zavisne, imaju vrijednosti nula (0) ili jedan (1), iz čega vidimo da se radi o diskretnim promenljivim i diskretnim funkcijama.

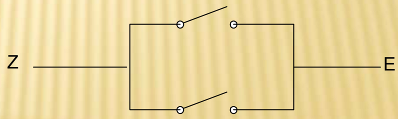
Ovo nam daje mogućnost da logička kola, koja posjeduju dva različita stanja, budu opisana funkcijama algebarske logike.

LOGIČKE OPERACIJE

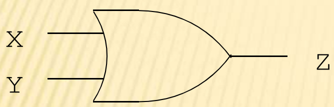
Dva kontakta predstavljaju dvije nezavisno promjenljive A i B tako da se mogu napraviti dvije prekidačke veze: redna (a) i paralelna (b).

redna (a)

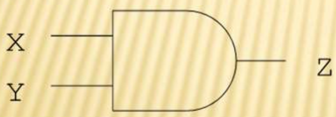
paralelna (b)



LOGIČKA KOLA

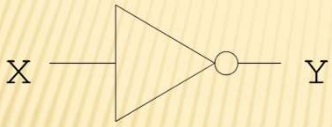


ULAZ		IZLAZ
X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

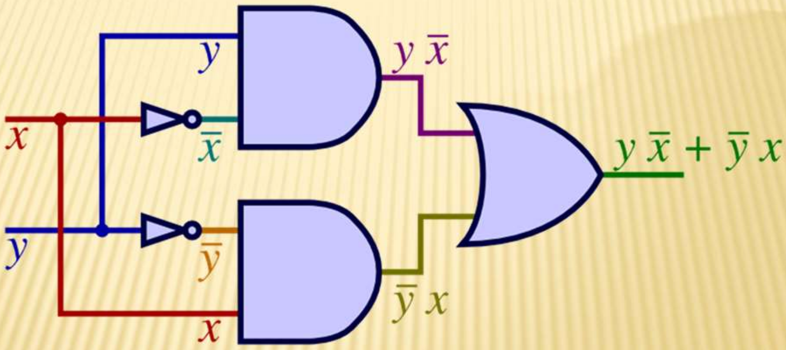


ULAZ		IZLAZ
X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

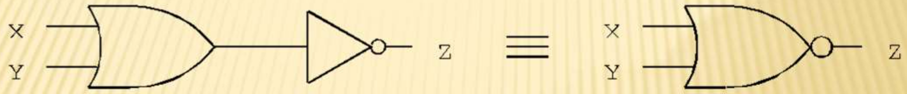
NE KOLO (INVERTOR)



ULAZ	IZLAZ
X	Z
0	1
1	0

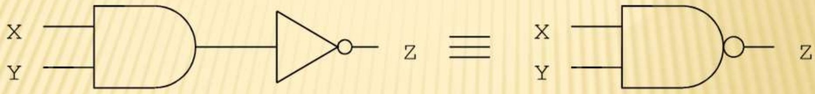


NILI KOLO



ULAZ		IZLAZ
X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

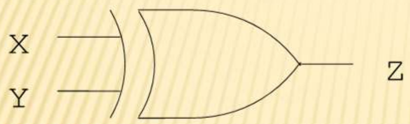
NI KOLO



ULAZ		IZLAZ
X	Y	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

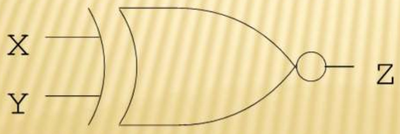
XOR/XNOR

Ekskluzivno ILI (XOR):



ULAZ		IZLAZ
X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NE ekskluzivno ILI (XNOR)
ili ekvivalencija:



ULAZ		IZLAZ
X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Primijetite da su ove dvije funkcije inverzne, tj. jedna drugoj negacija (v. tablice istine).

SVE LOGIČKE OPERACIJE SA 2 PROMJENLJIVE!

X	Y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Log. op.		0	×	XY’	X	X’Y	Y	⊕	+	↓	⊗	Y’	←	X’	→	↑	1

DEFINICIJA I AKSIOME

Neka je neprazan skup *B* u kome su definisane dvije ***binarne operacije*** +(sabiranje) i * (množenje), ***unarna operacija*** ¯ , a 0 i 1 su elementi iz skupa, tada skup

$$\{B,+,*,',0,1\}$$

nazivamo **Bulovom algebrom**, ako za bilo koje elemente skupa $a,b,c \in B$ važi:

- *zatvorenost* $a + b \in B, \quad a * b \in B$
- *komutativnost* $a+b=b+a, \quad a*b=b*a$
- *distributivnost* $a+(b*c)=(a+b)*(a+c), \quad a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$
- *postojanje neutralnog elementa* $a+0=a, \quad a*1=a$
- *postojanje inverznog elementa* $a+\bar{a}=1, \quad a*\bar{a}=0$

DEFINICIJA I AKSIOME

Element *0* zove se ***nula element,*** a element *1* se zove ***jedinični element.***

$a'=\bar{a}$ zove se ***komplement*** od *a.*

Operacije + i * zovu se ***sabiranje*** i ***množenje.***

Oznaka za operaciju * se često ne piše, već se koristi oznaka ·.

Usvajamo i klasične konvencije prioriteta operacija.
Najveći prioritet ima operacija komplementa - , zatim *, i najmanjeg prioriteta je operacija +

OSNOVNE FUNKCIJE SA 2 PROMJENLJIVE

Disjunkcija

$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 1$

Konjunkcija

$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

OSNOVNE FUNKCIJE SA 2 PROMJENLJIVE

Negacija

$$\overline{1} = 0$$

$$\overline{0} = 1$$

PRAVILA BULOVE ALGEBRE

Zakon identiteta

$$1 * A = A$$

$$0 + A = A$$

Zakon nultog elementa

$$0 * A = 0$$

$$1 + A = 1$$

PRAVILA BULOVE ALGEBRE

Zakon idempotencije:

$$A + A = A$$
$$A * A = A$$

Zakon inverzije:

$$A + \overline{A} = 1$$

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

Zakon involutivnosti:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

PRAVILA BULOVE ALGEBRE

Zakon komutacije:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$A + B = B + A$$

Zakon asocijacije:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

PRAVILA BULOVE ALGEBRE

Zakon apsorpcije:

$$A + A \cdot B = A \qquad A + \overline{A} \cdot B = A + B$$

$$A \cdot (A + B) = A \qquad A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

Zakon distribucije:

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot C + B \cdot C$$

ZAKONI ALGEBARSKE LOGIKE

De Morganovi zakoni:

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$$

PRAVILA BOOLEOVE ALGEBRE

Naziv pravila	"I" forma	"ILI" forma
Zakon identiteta	1 × X = X	0 + X = X
Zakon nultog elementa	0 × X = 0	1 + X = 1
Zakon idempotencije	X × X = X	X + X = X
Zakon inverzije	X × X' = 0	X + X' = 1
Zakon komutacije	X × Y = Y × X	X + Y = Y + X
Zakon asocijacije	(X × Y) × Z = X × (Y × Z)	(X+Y)+Z = X+(Y+Z)
Zakon distribucije	X+Y×Z=(X+Y)×(X+Z)	X × (Y+Z) = X×Z + Y×Z
Zakon apsorpcije	X × (X+Y) = X	X + X×Y = X
De Morganov zakon	(X×Y)' = X' + Y'	(X+Y)' = X' × Y'

IZVOĐENJE BULOVIH JEDNAČINA

- **standardni logički proizvodi**

(engl. *minterms*) m_0 , m_1 itd.

- **standardne logičke sume**

(engl. *maksterms*). M_0, M_1 itd.

- **I i II kanonska forma** funkcija

SUMA PROIZVODA I PROIZVOD SUME

- **logički proizvod** (engl. *product term*) je varijabla ili logički proizvod više varijabli (koplementiranih ili ne).

- **Logička suma** (engl. *sum term*) je varijabla ili logička suma više varijabli (koplementiranih ili ne).

PRVO SE MORA ZNATI

- koja su moguća stanja na ulazima, i
- željeni odziv na svako stanje na ulazu

- Na osnovu tih podataka se formira **tabela istine** (ili tablica istine).

PRIMJER TABLICE ISTINE

ULAZ		IZLAZ	Standardni logički proizvodi
X	Y	Z	
0	0	1	X'Y'
0	1	0	X'Y
1	0	1	XY'
1	1	1	XY

ALGEBARSKO PREDSTAVLJANJE PREKIDAČKIH FUNKCIJA

Algebarske, funkcije se mogu predstaviti u dva oblika.

Disjunktivna forma **predstavlja logičku sumu logičkih proizvoda (primer):**

$$Z = \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + AB$$

Konjunktivna forma **predstavlja logički proizvod logičkih suma (primer):**

$$Z = \left(\overline{A} + B\right) \cdot \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot \left(A + \overline{B}\right) \cdot \left(A + B\right)$$

LOGIČKE OPERACIJE

Tabelarni prikaz prekidačkih funkcija predstavlja se algebarski pomoću disjunktivne forme tako što napišemo logički zbir onoliko elementarnih proizvoda koliko u tabeli ima jediničnih vrednosti funkcije.

Elementarni proizvod (minterm) predstavlja proizvod nezavisno promenljivih u kome učestvuju sve promenljive.

LOGIČKE OPERACIJE

Funkcija je zadata tabelom:

Ona ima vrednost 1 za vrijednosti nezavisno promjenljivih navedenih u trećoj, četvrtoj, šestoj i sedmoj vrsti.

Decimalni broj	A	B	C	Z
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

T1

LOGIČKE OPERACIJE

Vršimo zapisivanje elementarnih proizvoda A B C za svaku od ovih, s tim što negiramo one promjenljive koje u datoj vrsti imaju vrijednost nula. Slijedi:

$$Z = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

(3) (4) (6) (7)

LOGIČKE OPERACIJE

Algebarski prikaz prekidačke funkcije u obliku konjunktivne forme, na osnovu zadate tabele, zapisujemo u vidu logičkog proizvoda onoliko elementarnih suma (makstermova) koliko u tabeli ima vrsta sa vrijednošću funkcije 0.

LOGIČKE OPERACIJE

Za primjer tablično zadate funkcije (tabela na slajdu 36) pišemo elementarne sume (makstermove) za vrste pod rednim brojem 0, 1 ,2, 5, jer za te vrijednosti nezavisno promjenljivih funkcija ima vrijednost nula. Ovakva forma funkcije glasi:

$$Z = \underset{(0)}{(A+B+C)} \bullet \underset{(1)}{(A+B+\overline{C})} \bullet \underset{(2)}{(A+\overline{B}+C)} \bullet \underset{(5)}{(\overline{A}+B+\overline{C})}$$

PISANJE IZRAZA ZA MINTERMOVE I MAKSTERMOVE

ULAZI			IZLAZ	Standardni logički proizvodi (mintermovi)	Standardne logičke sume (makstermovi)
X	Y	Z	A		
0	0	0	0	m_0=X'Y'Z'	M_0=X+Y+Z
0	0	1	0	m_1=X'Y'Z	M_1=X+Y+Z'
0	1	0	1	m_2=X'YZ'	M_2=X+Y'+Z
0	1	1	1	m_3=X'YZ	M_3=X+Y'+Z'
1	0	0	0	m_4=XY'Z'	M_4=X'+Y+Z
1	0	1	0	m_5=XY'Z	M_5=X'+Y+Z'
1	1	0	1	m_6=XYZ'	M_6=X'+Y'+Z
1	1	1	0	m_7=XYZ	M_7=X'+Y'+Z'

LOGIČKE OPERACIJE

Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF) i savršena konjunktivna normalna forma (SKNF) označavaju se brojčano tako što se umjesto elementarnog proizvoda (odnosno sume) piše decimalna vrijednost binarnog broja kome odgovara ta vrsta u tabeli (brojevi u zagradama ispod funkcije).

LOGIČKE OPERACIJE

Na ovaj način se za predašnje primjere (slajd 36) može napisati:

disjunktivna* forma *(SDNF):

$$Z = \Sigma(3,\ 4,\ 6,\ 7)$$

konjunktivna forma(SKNF):

$$Z = \Pi(0,\ 1,\ 2,\ 5)$$

LOGIČKE OPERACIJE

Vidimo da se oni brojevi koji nedostaju u SDNF nalaze u SKNF, jer ako funkcija nema vrijednost 1, onda je 0.

Pravilo je da se koristi ona forma koja daje manje elementarnih članova (suma ili proizvoda), jer je pogodnija za upotrebu i realizaciju.

PRIMJER 1:

I (SDNF) i II (SKNF) kanonska forma logičke jednačine izgledaju ovako:

$$A = \Sigma(m_0, m_2, m_4, m_6)$$
$$A = \Pi(M_1, M_3, M_5, M_7)$$

Jednačina izlaza A je:

$$A = X'Y'Z' + X'YZ' + XY'Z' + XYZ'$$

a može biti pojednostavljena kako slijedi:

$$A = X'(Y'Z' + YZ') + X(Y'Z' + YZ')$$
$$= (X' + X)(Z'(Y + Y')) = Z'$$

PRIMJER 2:

De Morganova teorema igra veoma značajnu ulogu kod projektovanja hardvera računara. Koristeći De Morganovu teoremu i neke od rezultata iz odeljka 5.1 pojednostaviti sledeće iskaze:

a) $\overline{\bar{x}+y(\bar{z}+w)}$, b) $\overline{[\bar{x}(\overline{y+z})](y+w\bar{z})(x+z)}$.

<u>**Odgovor:**</u>

a)
$$\overline{\bar{x}+y(\bar{z}+w)} = \bar{\bar{x}}\,\overline{y(\bar{z}+w)}$$
$$= \bar{\bar{x}}(\bar{y}+\overline{\bar{z}+w})$$
$$= \bar{\bar{x}}(\bar{y}+\bar{\bar{z}}\bar{w})$$
$$= x(\bar{y}+z\bar{w})$$
$$= x\bar{y}+xz\bar{w}$$

b)
$$\overline{[\bar{x}(\overline{y+z})](y+w\bar{z})(x+z)} = \overline{\bar{x}(\overline{y+z})}+\overline{y+w\bar{z}}+\overline{x+z}$$
$$= \bar{\bar{x}}+\overline{\overline{y+z}}+\bar{y}\,\overline{w\bar{z}}+\bar{x}\bar{z}$$
$$= x+y+z+\bar{y}(\bar{w}+\bar{\bar{z}})+\bar{x}\bar{z}$$
$$= x+y+z+\bar{y}(\bar{w}+z)+\bar{x}\bar{z}$$

PRIMJER 3:

Pojednostaviti sledeći izraz:

$$(\overline{a}b+ac)(a+\overline{b})(\overline{a}+\overline{c}).$$

Odgovor:

$$\begin{aligned}(\overline{a}b+ac)(a+\overline{b})(\overline{a}+\overline{c}) &= (\overline{a}+c)(a+b)(a+\overline{b})(\overline{a}+\overline{c})\\ &= (\overline{a}+c)(\overline{a}+\overline{c})(a+b)(a+\overline{b})\\ &= (\overline{a}+c\overline{c})(a+b\overline{b})\\ &= \overline{a}a\\ &= 0\end{aligned}$$

PRIMJER 4:

Šta se dobija komplementiranjem izraza $a+b(\overline{c}+u\overline{v})$ i kakav se zaključak na osnovu dobijenog rezultata može izvesti?

Odgovor:

Kada se izraz $a+b(\overline{c}+u\overline{v})$ komplementira imaćemo

$$\begin{aligned}\overline{a+b(\overline{c}+u\overline{v})} &= \overline{a}\,\overline{b(\overline{c}+u\overline{v})}\\ &= \overline{a}(\overline{b}+\overline{\overline{c}}\,\overline{u\overline{v}})\\ &= \overline{a}(\overline{b}+c(\overline{u}+v))\end{aligned}$$

Zaključujemo da se komplement izraza dobija zamenom +(OR) sa · (AND) i obrnuto, i zamenom elementa njegovim komplementom.

PRIMJER 5:

Odredi istinitosne tablice za sledeće funkcije

a) $f_1(x,y,z) = xy + \bar{x}z + \overline{yz}$,

b) $f_2(x,y,z) = \bar{x} + y\bar{z}$.

Odgovor:

PRIMJER 6:

Na osnovu načina prezentacije prekidačkih funkcija pomoću istinitosnih tablica, lako je odrediti broj mogućih prekidačkih funkcija od n promenljivih. Naime, za svaku moguću dodelu od n promenljivih moguće je definisati jednu funkciju čija je vrednost 0, ali takođe i drugu čija je vrednost 1. S obzirom da za n promenljivih postoji 2^n mogućih dodela, to znači da za n promenljivih ukupno postoji 2^{2^n} prekidačkih funkcija. Izlistaj sve moguće funkcije od dve promenljive i dodeli imena nekim od funkcija koje su prepoznatljive.

xy =	00	01	10	11	funkcija	ime
	0	0	0	0	0	
	0	0	0	1	xy	AND
	0	0	1	0	$x\bar{y}$	
	0	0	1	1	x	
	0	1	0	0	$\bar{x}y$	
	0	1	0	1	y	
	0	1	1	0	$\bar{x}y+x\bar{y}$	ExOR
	0	1	1	1	$x+y$	OR
	1	0	0	0	$\overline{x+y}$	NOR
	1	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}+xy$	ekvivalencija
	1	0	1	0	$\bar{y}$	
	1	0	1	1	$x+\bar{y}$	
	1	1	0	0	$\bar{x}$	
	1	1	0	1	$\bar{x}+y$	implikacija
	1	1	1	0	$\overline{xy}$	NAND
	1	1	1	1	1