INDUSTRIJSKA PNEUMATIKA

Studijski program Mehatronika
III SEMESTAR
Nastavni fond: 2+2

Lekcija 4:

Logičke funkcije

Predavač:

Prof. dr Marina Mijanović Markuš

UCG
Mašinski fakultet
Podgorica

Logičke funkcije

- PREDSTAVLJANJE LOGIČKIH FUNKCIJA

  - Šematsko prikazivanje pomoću logičkih kola,
  - Tabelarno, pomoću tablica istinitosti,
  - Analitičko, pomoću osnovnih logičkih operacija.

Možemo dodati i predstavljanje pomoću Karnoovih karata (ili mapa)

Logičke funkcije (1)

Osnovne osobine

- Logičke funkcije se mogu definisati nad proizvoljnim brojem promenljivih, Y=f(A, B, C,...).

- Vrednosti promenljivih u logičkim funkcijama mogu biti samo iz skupa {0, 1}.

- Nad promenljivama logičke funkcije izvršavaju se logičke operacije (I, ILI, NE, ekskluzivno ILI).

- Vrednost logičke funkcije može biti samo iz skupa {0, 1}.

Logičke funkcije (2)

Logička funkcija se može predstaviti:

- kombinacionom tablicom ili tablicom istinitosti

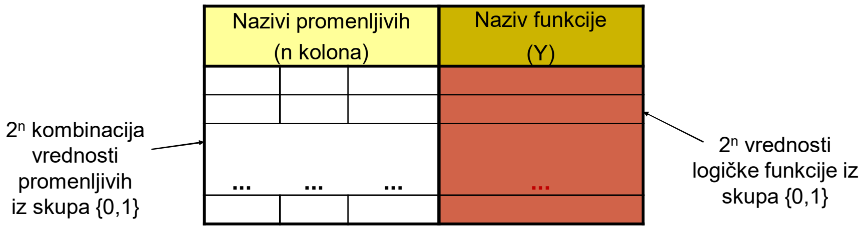
- algebarskim izrazom

- Karnoovom kartom

Kombinacione tablice (1)

Kombinaciona tablica predstavlja tablicu u kojoj su date vrijednosti logičke funkcije za sve moguće kombinacije vrijednosti promjenljivih koje se u njoj pojavljuju.

Kombinaciona tablica za logičku funkciju Y koja ima n logičkih promjenljivih



- Kombinacione tablice **nisu** pogodne za predstavljanje funkcija sa velikim brojem promjenljivih n zbog velikog broja vrsta (2^n).

Kombinacione tablice (2)

Primjer 1

Na slici je prikazana kombinaciona tablica u kojoj su date vrijednosti logičke funkcije Y koja zavisi od tri promjenljive A, B i C.

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Napomena: Dobro je koristiti sistematičan pristup pri upisu kombinacija vrijednosti promjenljivih u kombinacionu tablicu.

Kombinacione tablice (3)

Primjer 2

Većinska logika

Tri glasača A, B i C glasaju za neki predlog. Predlog je usvojen ako su dva ili više glasača glasala *za*.

Označimo glas *za* predlog logičkom vrijednošću 1, a glas *protiv* predloga vrijednošću 0. Takođe, *usvojen* predlog označimo logičkom vrijednošću 1, a *odbijen* vrijednošću 0.

Predstaviti ovu logičku funkciju kombinacionom tablicom.

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Kombinacione tablice (4)

Primjer 3

Lift

Napraviti logičku funkciju koja će davati signal (logičko 1) kada lift može da krene i predstaviti je kombinacionom tablicom.

Koristiti tri logičke promjenljive:

A - ima vrijednost 1 ako su spoljna vrata lifta zatvorena, a 0 ako su otvorena

B - ima vrijednost 1 ako su unutrašnja vrata lifta zatvorena, a 0 ako su otvorena

C - ima vrijednost 1 ako se u liftu neko nalazi, a 0 ako je lift prazan

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Algebarski prikaz

- Logička funkcija se može predstavliti algebarskim izrazom koga čine logičke promjenljive (A, B, C, ...) povezane logičkim operacijama (I, ILI, NE, ...).

- Logičke funkcije se algebarski najčešće predstavljaju pomoću savršenih normalnih formi koje se pojavljuju u dva oblika, kao:

  - savršena disjunktivna normalna forma (SDNF)

  - savršena konjuktivna normalna forma (SKNF)

SDNF (1)

- Neka je data logička funkcija Y koja zavisi od n logičkih promjenljivih
$A_1, A_2, \ldots, A_n$.

- Označimo jednom oznakom $\tilde{A}$ obje vrijednosti promjenljive A, tj. ili originalnu vrijednost promjenljive A, ili njenu negiranu vrijednost $\bar{A}$, tj. $\tilde{A} = A$ ili $\tilde{A} = \bar{A}$.

Potpuni proizvod predstavlja logički proizvod $\tilde{A}_1\tilde{A}_2 \ldots \tilde{A}_n$.

- Potpuni proizvod (minterm) je proizvod u kome se pojavljuju <u>sve promjenljive</u> od kojih zavisi logička funkcija, s tim što neke od promjenljivih imaju svoju <u>originalnu</u>, a neke <u>negiranu</u> vrijednost.

SDNF (2)

Teorema 1: Svaka logička funkcija $Y = f(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, <u>izuzev konstante nula</u>, može se na jedinstven način napisati u obliku

$$Y = P_1 + P_2 + \ldots + P_m \qquad (m \leq 2^n)$$

gdje su $P_1, P_2, \ldots, P_n$ potpuni proizvodi koji odgovaraju kombinacijama vrijednosti promjenljivih za koje funkcija Y ima vrednost 1, **tj. kao SDNF**.

Primjer: Neka logička funkcija Y = f(A, B, C) ima vrijednost 1 samo za sledeće kombinacije vrijednosti promjenljivih A, B, C: 010, 100, 101 i 111 (za ostale kombinacije je 0). Za navedene kombinacije mogu se formirati potpuni proizvodi:

$$P_1 = \overline{A}B\overline{C} \qquad P_2 = A\overline{B}\,\overline{C} \qquad P_3 = A\overline{B}C \qquad P_4 = ABC$$

Funkcija Y može se predstaviti u vidu SDNF kao suma proizvoda:

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$$

SKNF (1)

- Neka je data logička funkcija Y koja zavisi od n logičkih promjenljivih
$A_1, A_2, \ldots, A_n$.

- Označimo sa Ã obje vrijednosti, tj. originalnu vrijednost promjenljive A, ili njenu negiranu vrednost Ā, tj. Ã = A ili Ã = A.

Potpuna suma predstavlja logički zbir $\tilde{A}_1+\tilde{A}_2+\ldots+\tilde{A}_n$.

- Potpuna suma (maksterm) je zbir u kome se pojavljuju <u>sve promjenljive</u> od kojih zavisi logička funkcija, s tim što neke od promjenljivih imaju svoju <u>originalnu</u>, a neke <u>negiranu</u> vrijednost.

SKNF (2)

Teorema 2: Svaka logička funkcija $Y = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$, izuzev konstante jedan, može se na jedinstven način napisati u obliku

$$Y = S_1 S_2 \dots S_m \quad (m \leq 2^n)$$

gdje su $S_1, S_2, \dots, S_n$ potpune sume koji odgovaraju kombinacijama vrijednosti promjenljivih za koje funkcija Y ima vrijednost 0, tj. **kao SKNF**.

Primjer: Neka logička funkcija Y = f(A, B, C) ima vrijednost 0 samo za sledeće kombinacije vrijednosti promjenljivih A, B, C: 000, 001, 011 i 110 (za ostale kombinacije je 1). Za navedene kombinacije mogu se formirati potpune sume:

$$S_1 = A + B + C \qquad S_2 = A + B + \overline{C} \qquad S_3 = A + \overline{B} + \overline{C} \qquad S_4 = \overline{A} + \overline{B} + C$$

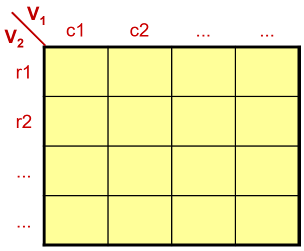
Funkcija Y može se predstaviti u vidu SKNF kao proizvod suma:

$$Y = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

Veič-Karnoove mape (1)

Karnoova karta ili mapa (kao i kombinaciona tablica) predstavlja tablicu u kojoj su date vrijednosti logičke funkcije za sve moguće kombinacije vrijednosti promjenljivih koje se u njoj pojavljuju. Razlika između navedenih tablica je u njihovoj organizaciji.

Opšti izgled Karnoove karte



V_1 U V_2 – skup promjenljivih funkcije

r1, r2, ... – binarne oznake vrsta koje predstavljaju kombinacije vrijednosti promjenljivih iz skupa V_1

c1, c2, ... – binarne oznake kolona koje predstavljaju kombinacije vrijednosti promjenljivih iz skupa V_2

Veič-Karnoove mape (2)

Osobine

- Karnoova karta sadrži 2^n polja u koja se upisuju vrijednosti logičke funkcije Y koja zavisi od n promjenljivih.
- Pošto je poželjno da Karnoova karta ima oblik što sličniji kvadratu, to se promjenljive funkcije grupišu u dva skupa (V_1 i V_2) sa istim ili približnim brojem članova.
- Oznake vrsta i kolona formiraju se kao sve moguće kombinacije vrijednosti promjenljivih koje se pojavljuju u skupovima V_1 i V_2.
- Prilikom definisanja oznaka vrsta/kolona mora se poštovati pravilo da fizički susednim vrstama/kolonama odgovaraju binarne kombinacije koje se razlikuju samo u jednoj cifri.
- Vrijednost u nekom polju karte predstavlja vrijednost funkcije za kombinaciju vrijednosti promjenjivih definisanu oznakom vrste i oznakom kolone za dato polje.

Veič-Karnoove mape (3)

Postupak formiranja Karnoove karte za logičku funkciju sa n promenljivih

1. Najprije se promjenljive funkcije svrstaju u dva skupa sa približnim brojem članova. Neka u prvom skupu V_1 ima n1 članova, a u drugom skupu V_2 n2 članova.
2. Zatim se nacrta karta sa 2^{n1} vrsta i 2^{n2} kolona. Skupovi promjenljivih se upišu na odgovarajuća mesta u gornjem lijevom uglu karte.
3. Nakon toga se formiraju sve moguće kombinacije vrijednosti promjenljivih iz skupa V_1 (poštujući navedeno pravilo) i upišu po vrstama karte. Sličan postupak se primijeni i na skup V_2, pa se dobijene kombinacije upišu po kolonama tablice.
4. Na kraju, u svako polje karte upisuje se vrijednost funkcije koja odgovara kombinaciji vrijednosti promjenljivih definisanoj konkretnom vrstom i kolonom.

Veič-Karnoove mape (4)

Primjer 4

Logičku funkciju od 4 promjenljive A, B, C i D predstaviti Karnoovom kartom. Funkcija ima vrijednost 1 samo ako su vrijednosti svih promjenljivih međusobno jednake.

1. Formiranje skupova promjenljivih

4 promjenljive/2 = 2 promjenljive (u svakom skupu)
$V_1 = \{A,B\}$ n1 = 2
$V_2 = \{C,D\}$ n2 = 2

2. Dimenzije karte

$2^{n1} = 2^2 = 4$ (vrste)
$2^{n2} = 2^2 = 4$ (kolone)

3. Kombinacije

AB: 00, 01, 11, 10
CD: 00, 01, 11, 10

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Veič-Karnoove mape (5)

4. Popunjavanje karte

U svako polje karte **upisuje se vrijednost funkcije** za kombinaciju vrijednosti promjenljivih koja odovara tom polju. Kombinacija vrijednosti promjenljivih se dobija na osnovu oznake vrste i oznake kolone za konkretno polje.

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

Veič-Karnoove mape (6)

Logička funkcija se pomoću Karnoove karte može jednostavno definisati pomoću indeksa ili decimalnih ekvivalenata. Svakom polju u karti pridružuje se indeks koji predstavlja decimalnu vrijednost binarne kombinacije vrijednosti promjenljivih za to polje.

CD \ AB	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

a)

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

b)

Veič-Karnoove mape (7)

Primjer

Logičku funkciju od 4 promjenljive A, B, C i D zadatu pomoću indeksa (tj. decimalnih ekvivalenata) predstaviti Karnoovom kartom.

$$Y(1) = \{4, 8, 10, 13, 15\}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	0	0	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Promjena načina predstavljanja funkcije (1)

Kombinaciona tablica ⟺ Suma proizvoda

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Promjena načina predstavljanja funkcije (2)

Kombinaciona tablica ⟺ Karnoova karta

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Promjena načina predstavljanja funkcije (3)

Karnoova karta ⟺ Suma proizvoda

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	0	1	1
11	1	0	0	0
10	0	0	0	0

$$Y = \overline{A}\,\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + A\overline{B}\,\overline{C}D$$

Realizacija logičkih funkcija

- realizacija logičkih funkcija se može prikazati pomoću prekidačkih mreža (one su osnovne komponente savremenih digitalnih sistema).
- Prekidačke mreže predstavljaju skup logičkih kola (I, ILI, NE,...) povezanih tako da realizuju zadatu logičku funkciju.
- Tipovi prekidačkih mreža
  - Kombinacione mreže
    - vrijednost funkcije na izlazu mreže zavisi samo od trenutnog stanja na ulazu (vrijednosti ulaznih promjenljivih)
  - Sekvencijalne mreže
    - vrijednost funkcije na izlazu mreže zavisi od trenutnog stanja na ulazu, kao i od prethodnog stanja u kome se mreža nalazila

Sinteza prekidačke mreže (1)

Neka je u algebarskom obliku zadata logička funkcija Y koja zavisi od n promjenljivih međusobno povezanih logičkim operacijama. Ona se može realizovati prekidačkom mrežom koja:

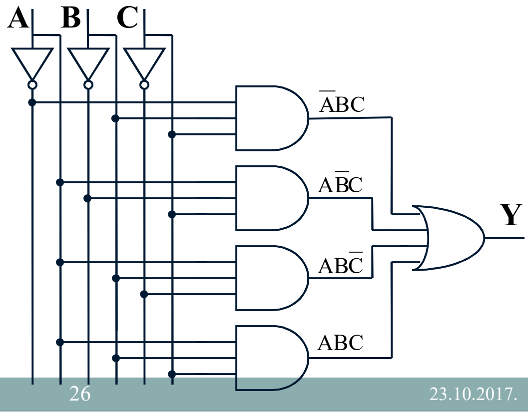
- ima n ulaza koji odgovaraju logičkim promjenljivama i jedan izlaz koji predstavlja vrijednost funkcije Y
- ima onoliko različitih vrsta logičkih kola koliko ima različitih operacija u funkciji
- ima onoliko logičkih kola jedne vrste koliko ih je potrebno za obavljanje logičkih operacija te vrste u funkciji

Sinteza prekidačke mreže (2)

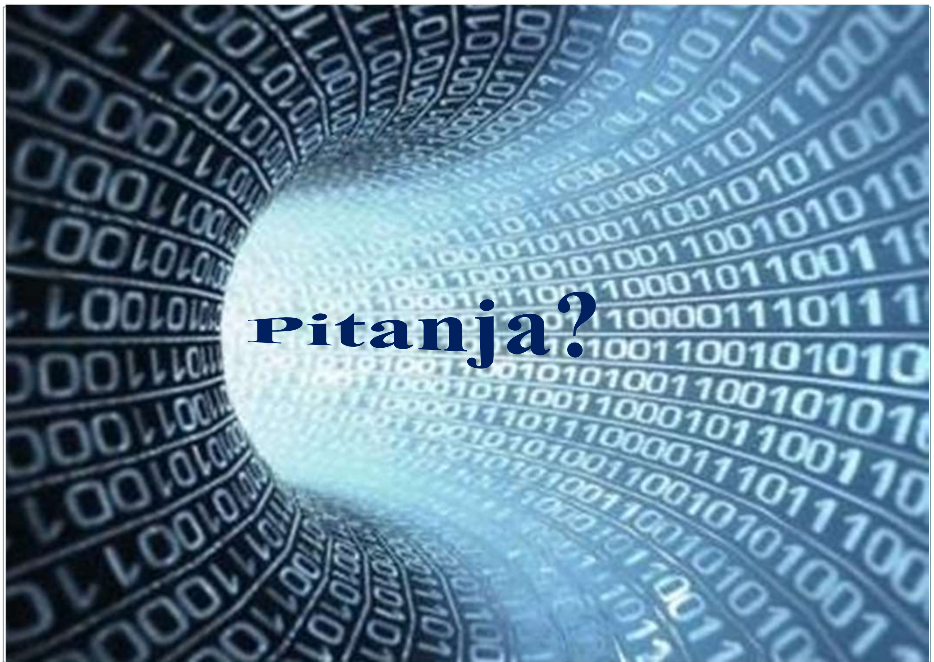
Primjer 6 Funkciju većinske logike realizovati pomoću prekidačke mreže.

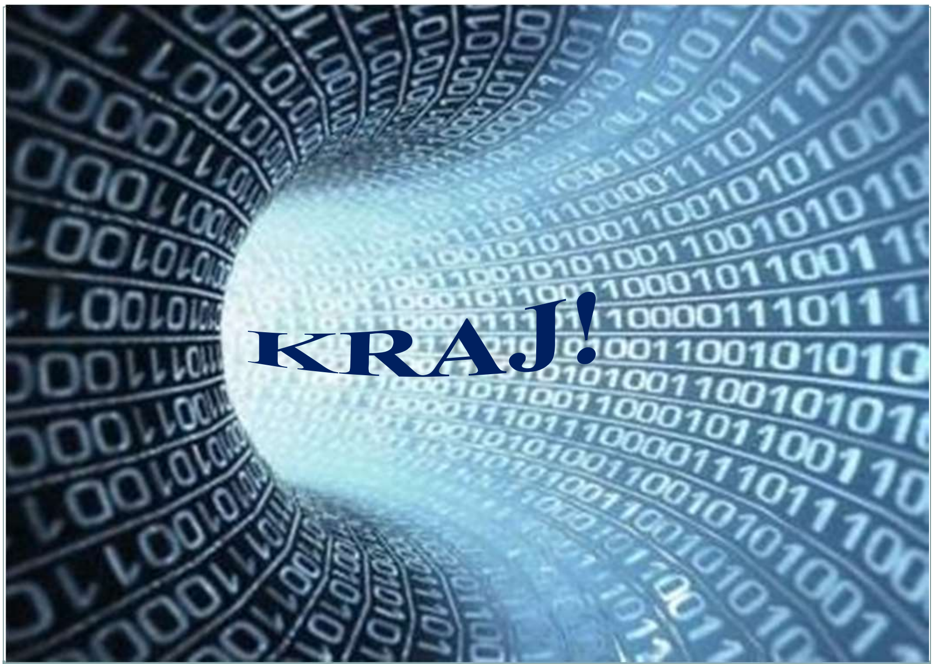
$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Ko je na slici?





KRAJ!