INDUSTRIJSKA PNEUMATIKA

Studijski program Mehatronika
III SEMESTAR
Nastavni fond: 2+2

Lekcija 5:

Minimizacija logičkih funkcija

Predavač:
Prof. dr Marina Mijanović Markuš

UCG
Mašinski fakultet
Podgorica

Minimizacija logičkih funkcija

- Minimizacija je postupak transformacije složene logičke funkcije u funkciju koja ima istu istinitosnu vrednost, ali manji broj elemenata, manje operanada i operacija koje nad nad njima treba izvršiti.
- Logičke funkcije mogu se prikazati na različite načine, a mi smo u dosadašnjem izlaganju već koristili tri osnovna:
  - Šematsko prikazivanje pomoću logičkih kola,
  - Tabelarno, pomoću tablica istinitosti,
  - Analitičko, pomoću osnovnih logičkih operacija.

- Sve logičke funkcije analitički se mogu prikazati u dva oblika:
  - Disjunktivna forma, koja predstavlja logičku sumu logičkih proizvoda,
  - Konjunktivna forma, koja predstavlja logički proizvod logičkih suma.
- Ako je funkcija prikazana tabelarno, može se odrediti njen analitički oblik kao SDNF ili SKNF, kao što je prikazano na slici 1.

dec.br.	X_1	X_2	X_3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Minimizacija logičkih funkcija

Posebnu pažnju posvetiti minimizaciji funkcija datih u SDNF obliku.

- Postoji više načina na koje se jedna logička funkcija može minimizirati:
  - Algebarska metoda
  - Metoda implikantnih matrica (MakKlaski metoda), i
  - Metoda pomoću Veič-Karnoovih mapa

Minimizacija logičkih funkcija algebarskom metodom

- Kao prvo, navedimo primjenu aksioma i teorema Bulove algebre. To je algebarska minimizacija.
- Tako npr. ako se u jednoj funkciji nalazi izraz x+0, on se na osnovu aksiome A-2 (x+0=0) može zamijeniti promjenljivom x, čime se složenost funkcije smanjuje za jedan operator. I
- sto tako, ako je u funkciji dat izraz oblika x·(x+y), koristeći **teoremu o apsorpciji**, ovaj izraz se može zamijeniti sa x, pa se cjelokupna funkcija pojednostavljuje za dva operatora (konjunkciju i disjunkciju) i ima jednu promjenljivu manje.

Minimizacija logičkih funkcija algebarskom metodom

- Primjena navedenih zakona ne daje određeni algoritamski put kako da se funkcija minimizira. Ona omogućuje projektantima da se na osnovu svog iskustva i sagledavanja pojedinih elemenata funkcije snađu i smanje broj operatora u funkciji. Zato su u okviru Bulove algebre razvijene posebne metode minimizacije. Jedna od najomiljenijih se zasniva na primjeni Veič-Karnoovih mapa (Veich-Karnaugh).

Minimizacija logičkih funkcija algebarskom metodom

- *Zadatak:*

Funkciju predstavljenu tablicom istine minimizirati algebarskom metodom.

dec.br.	X_1	X_2	X_3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Metoda Quine-McCluskey

- Ova metoda s ečesto naziva i metoda McCluskey (MakKlaski).
- Predstavlja sistemsko rješenje kada su date složenije funkcije sa više decimalnih ekvivalenata.
- U principu, može se primijeniti na proizvoljno velikom broju ulaza (promjenljivih).
- Quine-McCluskey metoda se može prevesti u računarski program za obavljanje minimiziranje.

Metoda Quine-McCluskey

Dva osnovna koraka:

- Pronalaženje svih prostih implikanti date Bulove funkcije.
- Izbor minimalnog skupa prostih implikanti koje pokrivaju ovu funkciju.

Metoda Quine-McCluskey

- Implikanta fukcije je ***prosta*** ako nijedan njen dio nije takođe implikat funkcije.
- ***Esencijalna prosta*** implikanta pokriva funkciju na bar jednom decimaplnom ekvivalentu na kojem je ne pokriva nijedna druga implikanta. Drugim riječima, esencijalna implikanat je jedina implikanta dobijena sažimanjem nekog od decimalnih ekvivalenata.

Metoda Quine-McCluskey

- Metoda se zasniva na pronalaženju *prostih* i *esencijalnih prostih* implikanti funkcije.
- Esencijalne proste implikante u disjunkciji moraju da uđu u minimalnu DNF (disjunktivnu normalnu formu) funkcije.
- Postupak minimizacije se samo djelimično razlikuje za nepotpuno definisane funkcije i sisteme funkcija.

Metoda Quine-McCluskey

Primjer: MakKlaskijevom metodom pronaći sve proste implikante funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadate skupom decimalnih indeksa:

$$f^{(1)} = \{0, 2, 3, 7, 8, 12, 14\}$$

Metoda Quine-McCluskey

i	P_i	
0	0000	
2	0010	
8	1000	
3	0011	
12	1100	
7	0111	
14	1110	

Klase se međusobno razdvajaju horizontalnom linijom.

Metoda Quine-McCluskey

- Od polazne tablice formira se nova tablica udruživanjem (sažimanjem) decimalnih ekvivalenata iz susjednih klasa koji se razlikuju samo u jednom bitu. U novoj tablici binarni prikazi na bitu na kome se razlikuju imaju simbol „-", a u prethodnoj tablici se polazni binarni prikazi obilježavaju simbolom "✓".
- Postupak se iterativno nastavlja sve dok je udruživanje moguće. Najzad, svi neudruženi indeksi predstavljaju proste implikante.

Metoda Quine-McCluskey

i	P_i	
0	0000	✓
2	0010	✓
8	1000	✓
3	0011	✓
12	1100	✓
7	0111	✓
14	1110	✓

i,j	$P_{i,j}$	
0,2	00x0	*a*
0,8	x000	*b*
2,3	001x	*c*
8,12	1x00	*d*
3,7	0x11	*e*
12,14	11x0	*f*

Proste implikante

Nema daljih mogućnosti za sažimanje

Metoda Quine-McCluskey

- Za pronalaženje bitnih (esencijalnih) prostih implikanti se formira *tablica pokrivanja* ili implikantna tablica ili implikanta matrica.
- Može se koristiti postupak precrtavanja ili nalaženje funkcije pokrivanja.

Metoda Quine-McCluskey

- U prvom slučaju, u precrtanim vrstama su esencijalne proste implikante.
- Kod drugog postupka svaki od proizvoda sadrži jedan od dovoljnih skupova za sintezu.

(Radićemo samo prvi postupak.)

Metoda Quine-McCluskey

Primjer: MakKlaskijevom metodom pronaći sve esencijalne proste implikante i minimalnu disjunktivnu normalnu formu funkcije $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ zadate skupom decimalnih indeksa:

$$f^{(1)} = \{0, 2, 3, 7, 8, 12, 14\}.$$

Metoda Quine-McCluskey

	0	2	3	7	8	12	14
a	*	*					
b	*				*		
c		*	*				
d					*	*	
e			*	*			
f						*	*

... Onda i kolone sa precrtanim zvjezdicama ...

Metoda Quine-McCluskey

	0	2	8
a	*	*	
b	*		*
c		*	
d			*

Tražimo pokrivene vrste ili pokrivene kolone i precrtamo ih, vodeći računa o optimalnosti.

$$f_{\min} = a + b + e + f =$$
$$= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 \bar{x}_4$$

Metoda Quine-McCluskey

- PRIMJER sa nepotpunom funkcijom

$$F = \sum(0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12) + d(5,\ 7, 14)$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	-		1
11		-		
10		1	-	1

Grupisanje mintermova

$$F = \sum(0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12) + d(5,\ 7, 14)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	
(0)	0	0	0	0	√
(1)	0	0	0	1	√
(4)	0	1	0	0	√
(8)	1	0	0	0	√
(5)	0	1	0	1	√
(6)	0	1	1	0	√
(9)	1	0	0	1	√
(10)	1	0	1	0	√
(12)	1	1	0	0	√
(7)	0	1	1	1	√
(14)	1	1	1	0	√

	x_1	x_2	x_3	x_4	
(0,1)	0	0	0	–	√
(0,4)	0	–	0	0	√
(0,8)	–	0	0	0	√
(1,5)	0	–	0	1	√
(1,9)	–	0	0	1	√
(4,5)	0	1	0	–	√
(4,6)	0	1	–	0	√
(4,12)	–	1	0	0	√
(8,9)	1	0	0	–	√
(8,10)	1	0	–	0	√
(812)	1	–	0	0	√
(5,7)	0	1	–	1	√
(6,7)	0	1	1	–	√
(6,14)	–	1	1	0	√
(10,14)	1	–	1	0	√
(12,14)	1	1	–	0	√

	x_1	x_2	x_3	x_4
(0,1,4,5)	0	–	0	–
(0,2,4,6)	0	–	–	0
(0,4,8,12)	–	–	0	0
(4,5,6,7)	0	1	–	–
(4,6,12,14)	–	1	–	0
(8,10,12,14)	1	–	–	0

Proste implikante

$$F = \sum(0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12) + d(5,\ 7, 14)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
(0,1,4,5)	0	-	0	-
(0,1,8,9)	-	0	0	-
(0,4,8,12)	-	-	0	0
(4,5,6,7)	0	1	-	-
(4,6,12,14)	-	1	-	0
(8,10,12,14)	1	-	-	0

Ne uzimaju se u obzir

	0	1	4	6	8	9	10	12	5	7	14
(0,1,4,5)	X	X	X						X		
(0,1,8,9)	X	X			X	X					
(0,4,8,12)	X		X		X			X			
(4,5,6,7)			X	X					X	X	
(4,6,12,14)			X	X				X			X
(8,10,12,14)					X		X	X			X

Proste implikante

$$F = \sum(0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12) + d(5,\ 7, 14)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
(0,1,4,5)	0	-	0	-
(0,1,8,9)	-	0	0	-
(0,4,8,12)	-	-	0	0
(4,5,6,7)	0	1	-	-
(4,6,12,14)	-	1	-	0
(8,10,12,14)	1	-	-	0

Ne uzimaju se u obzir

	0	1	4	6	8	9	10	12	5	7	14
(0,1,4,5)	X	X	X						X		
(0,1,8,9)	X	X			X	X					
(0,4,8,12)	X		X		X			X			
(4,5,6,7)			X	X					X	X	
(4,6,12,14)			X	X				X			X
(8,10,12,14)					X		X	X			X

Proste implikante

$$F = \sum(0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12) + d(5, 7, 14)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
(0,1,4,5)	0	-	0	-
(0,1,8,9)	-	0	0	-
(0,4,8,12)	-	-	0	0
(4,5,6,7)	0	1	-	-
(4,6,12,14)	-	1	-	0
(8,10,12,14)	1	-	-	0

$\underbrace{\text{Ne uzimaju se u obzir}}$

	0	1	4	6	8	9	10	12	5	7	14
(0,1,4,5)	X	X	X						X		
(0,1,8,9)	X	X			X	X					
(0,4,8,12)	X		X		X			X			
(4,5,6,7)			X	X					X	X	
(4,6,12,14)			X	X				X			X
(8,10,12,14)					X		X	X			X

Proste implikante

$$F = \sum(0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12) + d(5, 7, 14)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
(0,1,4,5)	0	-	0	-
(0,1,8,9)	-	0	0	-
(0,4,8,12)	-	-	0	0
(4,5,6,7)	0	1	-	-
(4,6,12,14)	-	1	-	0
(8,10,12,14)	1	-	-	0

$\underbrace{\text{Ne uzimaju se u obzir}}$

	0	1	4	6	8	9	10	12	5	7	14
(0,1,4,5)	X	X	X						X		
(0,1,8,9)	X	X			X	X					
(0,4,8,12)	X		X		X			X			
(4,5,6,7)			X	X					X	X	
(4,6,12,14)			X	X				X			X
(8,10,12,14)					X		X	X			X

Proste implikante

$$F = \sum(0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12) + d(5, 7, 14)$$

	x_1	x_2	x_3	x_4
(0,1,4,5)	0	-	0	-
(0,1,8,9)	-	0	0	-
(0,4,8,12)	-	-	0	0
(4,5,6,7)	0	1	-	-
(4,6,12,14)	-	1	-	0
(8,10,12,14)	1	-	-	0

Ne uzimaju se u obzir

	0	1	4	6	8	9	10	12	5	7	14
(0,1,4,5)	X	X	X						X		
(0,1,8,9)	X	X			X	X					
(0,4,8,12)	X		X		X			X			
(4,5,6,7)			X	X					X	X	
(4,6,12,14)			X	X				X			X
(8,10,12,14)					X		X	X			X

Proste implikante

	x_1	x_2	x_3	x_4	
(0,1,4,5)	0	-	0	-	
(0,1,8,9)	-	0	0	-	Esencijalna PI
(0,4,8,12)	-	-	0	0	
(4,5,6,7)	0	1	-	-	Neesencijalna PI
(4,6,12,14)	-	1	-	0	
(8,10,12,14)	1	-	-	0	Esencijalna PI

Ne razmatrati

	0	1	4	6	8	9	10	12	5	7	14
(0,1,4,5)	X	X	X						X		
(0,1,8,9)	X	X			X	X					
(0,4,8,12)	X		X		X			X			
(4,5,6,7)			X	X					X	X	
(4,6,12,14)			X	X				X			X
(8,10,12,14)					X		X	X			X

Q-M metoda, rješenje

	x_1	x_2	x_3	x_4
(0,1,4,5)	0	-	0	-
(0,1,8,9)	-	0	0	-
(0,4,8,12)	-	-	0	0
(4,5,6,7)	0	1	-	-
(4,6,12,14)	-	1	-	0
(8,10,12,14)	1	-	-	0

$$F = \sum(0,1,4,6,8,9,10,12) + d(5,7,14)$$

$$= \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2$$

Ne razmatrati: 5, 7, 14

	0	1	4	6	8	9	10	12	5	7	14
(0,1,4,5)	X	X	X						X		
(0,1,8,9)	X	X			X	X					
(0,4,8,12)	X		X		X			X			
(4,5,6,7)			X	X					X	X	
(4,6,12,14)			X	X				X			X
(8,10,12,14)					X		X	X			X

Q-M metoda, rješenje

	x_1	x_2	x_3	x_4
(0,1,4,5)	0	-	0	-
(0,1,8,9)	-	0	0	-
(0,4,8,12)	-	-	0	0
(4,5,6,7)	0	1	-	-
(4,6,12,14)	-	1	-	0
(8,10,12,14)	1	-	-	0

$$F = \sum(0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12) + d(5,7,14)$$

$$= \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_4 + x_2\bar{x}_4$$

Ne razmatrati: 5, 7, 14

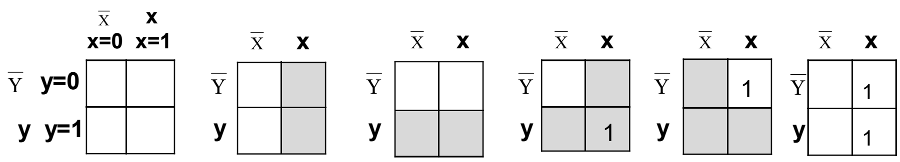
	0	1	4	6	8	9	10	12	5	7	14
(0,1,4,5)	X	X	X						X		
(0,1,8,9)	X	X			X	X					
(0,4,8,12)	X		X		X			X			
(4,5,6,7)			X	X					X	X	
(4,6,12,14)			X	X				X			X
(8,10,12,14)					X		X	X			X

Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Po ovoj metodi minimizacija se izvodi grafičkim putem.
- Ona je jednostavna i praktična, a zasniva se na upisivanju funkcije u specijalnu tabelu, Veič-Karnoovu mapu odnosno dijagram.
- U sledećem koraku vrši se minimizacija, i konačno, funkcija se može predstaviti u svom minimalnom obliku.
- Dimenzija Veič-Karnoove mape zavisi od broja promjenljivih u funkciji. Obično se ovaj metod primjenjuje za minimizaciju funkcija sa 2,3 i 4 promjenljive, a za funkcije koje imaju više promjenljivih koristi se neka od drugih poznatih metoda, na primer tablična minimizacija (metoda McCluskey).

Metoda Veič-Karnoovih mapa

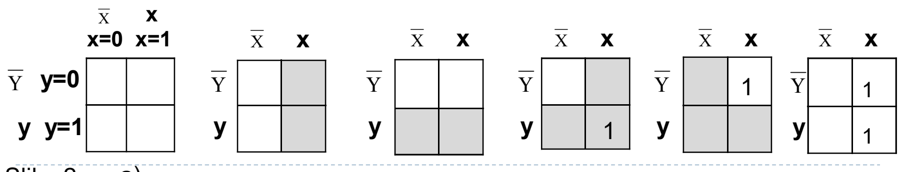
- Pogledajmo sada kako izgleda Veič-Karnoova mapa za dvije promjenljive x i y (slika 2). Ona se sastoji od 4 polja. Svako od tih polja rezervisano je za jednu moguću konjunkciju promjenljivih ili njihovih negacija.
- Ukoliko se određena konjunkcija pojavljuje u funkciji, onda se u dato polje zapisuje 1, a ako se ne pojavljuje, ne zapisuje se ništa. Na taj način se preslikava funkcija dvije promjenljive na odgovarajuću Veič-Karnoovu mapu.



Slika 2: a) b) c) d) e) f)

Metoda Veič-Karnoovih mapa

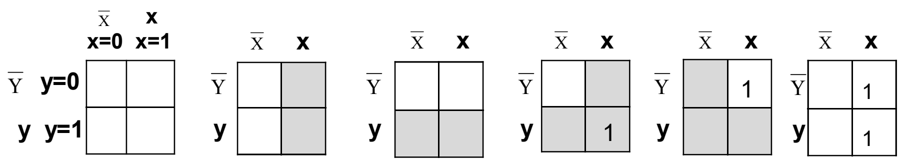
- Na primjer, ako je data funkcija $F(x,y)= (x \cdot y) + (x \cdot \bar{y})$, u njoj se pojavljuju dvije konjunkcije: $x \cdot y$ i $x \cdot \bar{y}$. Mjesto konjunkcije $x \cdot y$ u mapi određuje se na sledeći način:
  - Pošto konjunkcija *x y* sadrži promjenljivu *x* (bez negacije) onda se ona mora nalaziti u oblasti gde je $x=1$ (osjenčimo je, slika 2 b), a ako sadrži i promjenljivu *y* to mora biti i u oblasti gde je $y=1$ (osjenčena oblast na slici 2 c). Dakle, konjunkcija *x y* se nalazi na polju koje je u presjeku ove dvije oblasti, u koje upisujemo 1 (slika 2d).



Slika 2: a) b) c) d) e) f)

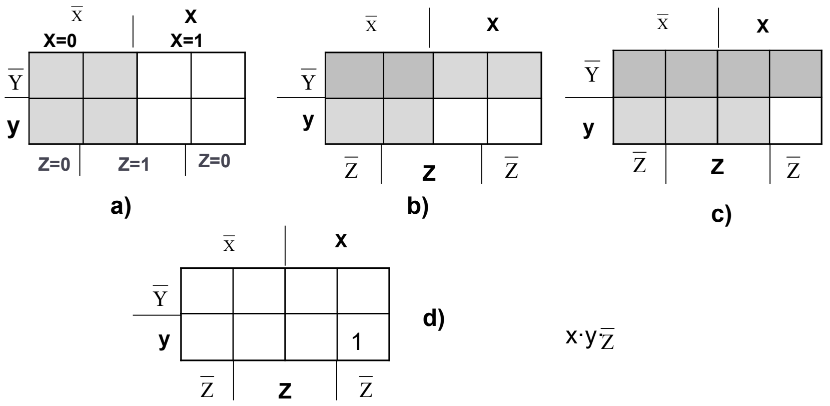
Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Na isti način se određuje polje koje sadrži konjunciju $x \cdot \bar{y}$, slika 2e, a Veič-Karnoova mapa čitave funkcije F je data na slici 2f.



Slika 2: a) b) c) d) e) f)

- Problem je nešto složeniji kod funkcija sa tri promjenljive. Neka su to promjenljive x,y i z. Odgovarajuća Veič-Karnoova mapa ima izgled prikazan na slici 3a.



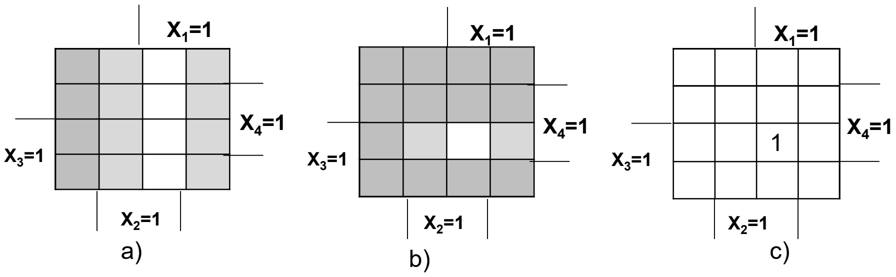
Slika 3: Karnoova mapa za tri promenljive

I u ovom slučaju svako polje mape rezervisano je za jednu tačno određenu konjunkciju promjenljivih ili njihovih negacija.

Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Kako se za zadatu konjunkciju pronalazi odgovarajuće polje?
- Pronalaženje odgovarajućeg polja ide postepeno, eleminacijom polja koja ne zadovoljavaju.
- Neka je data konjunkcija x·y·$\bar{Z}$. Pošto se u zadatom izrazu promenljiva x javlja afirmativnom obliku, u obzir dolaze 4 desna polja (slika 3b).
- Druga promjenljiva je y, pa se 4 desna polja smanjuju samo na 2, i to u donjoj vrsti (slika 3c).
- Treći element je $\bar{Z}$, pa treba osjenčiti polja u sredini u kojima je Z=1 (slika 3d). Preostalo, neosjenčeno polje određuje polje datog izraza, i u njega upisujemo 1, (slika3d). Analognim postupkom može se naći polje za bilo koju konjunkciju 3 promjenljive.

- Na kraju ćemo prikazati kako se popunjava Karnoova mapa (slika 4a) za funkcije sa 4 promenljive X_1, X_2, X_3 i X_4.
- Istim postupkom eliminacije odredićemo položaj konjunkcije: $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4$. Pošto su sve promenljive bez negacije, treba osjenčiti polja u kojima promjenljive uzimaju vrijednost 0 (slika 4 a i 4b), a preostalo neosenčeno polje je polje u koje se upisuje 1 koja odgovara ovoj konjunkciji, slika 4c.



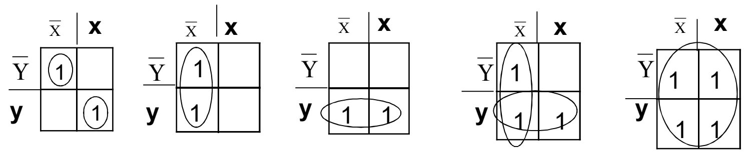
- Slika 4: Karnoova mapa za četiri promenljive

Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Do sada smo vidjeli kako se funkcija, koja je zadata disjunktivnom normalnom formom, preslikava na odgovarajuću Veič-Karnoovu mapu.
- Sledeći korak je upravo proces minimizacije. On se sastoji u grupisanju jedinica u okviru mape u veće cjeline (konture). Pri tome se nastoji da ove cjeline budu što veće, ali one ne smiju da sadrže polja koja nemaju 1.
- Može se grupisati: 1 polje samostalno, 2 polja, 4 polja, 8 polja ili 16 polja (**2^n**). Pošto svaka Veič-Karnoova mapa ima neke svoje spacifičnosti, razmotrimo mogućnost grupisanja kod svake vrste.

Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Kod mape sa 2 promjenljive mogu se grupisati:
  a) Samo jedno polje,
  b) Dva susedna polja,
  c) Sva četiri polja.
- Kada se u jednoj mapi pravi više grupa, nastoji se da te grupe budu što veće, makar i po cijenu zajedničkog polja u grupama.
- Primjeri pravilnog grupisanja su dati na slici:

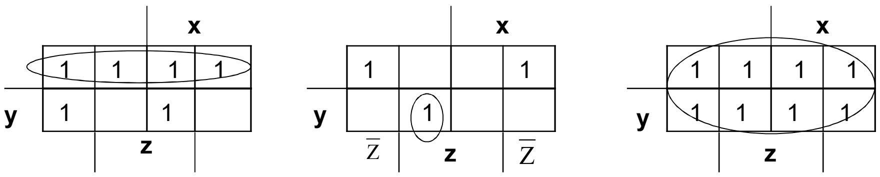


Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Kod mape sa tri promjenljive prethodnim principima grupisanja potrebno je dodati još dva: može se grupisati osam jedinica i elementi sa strane, kao što je prikazano na slici 6. Ako se pažljivije posmatra Veič-Karnoova mapa, može se uočiti da se područje nezavisno promenljive proteže direktno s lijeve na desnu stranu tabele.

Metoda Veič-Karnoovih mapa

Slika: Grupisanje jedinica u Karnoovoj mapi sa tri promjenljive xyz

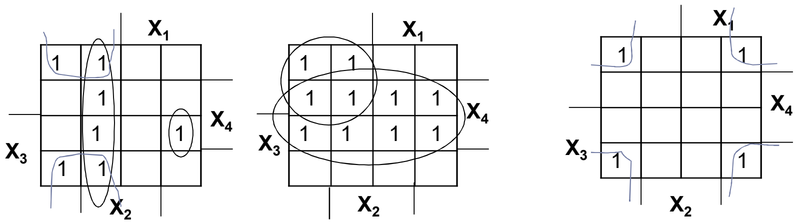


Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Kod mape sa četiri promjenljive, sva predhodna pravila važe, a mogu se grupisati i krajnje gornja sa krajnje donjim poljima, kao i polja u uglovima.
- Primjeri pravilnog grupisanja u mapama sa četiri promjenljive su dati na slici 7.
- Osnovno pravilo pri formiranju grupa je da treba formirati minimalan broj grupa tako da budu obuhvaćene sve jedinice u Karnoovoj mapi.
- Nakon prve i druge faze minimizacije, koje se sastoje od preslikavanja logičke funkcije na Karnoovu mapu i grupisanja jedinica, pristupa se poslednjoj fazi: određivanju analitičkog oblika minimalne forme logičke funkcije na osnovu formiranih grupa.

Metoda Veič-Karnoovih mapa

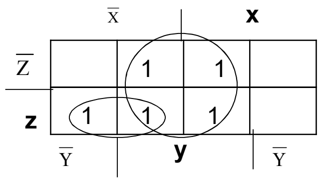
- Slika: grupisanje jedinica u Karnoovoj mapi sa četiri promenljive



- Ova faza sastoji se u sledećem: za svaku formiranu grupu definife se konjunkcija promjenljivih ili njihovih negacija, ali samo onih koje su za cijelu grupu nepromijenjene.
- Kada su formirane konjunkcije za sve grupe, konačna funkcija dobija se kao disjunkcija ovih pojedinačnih članova.

Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Razmotrimo to na sledećem primjeru mape sa tri promjenljive gdje su već formirane grupe kao na slici:



Slika: Određivanje analitičkog izraza za grupu jedinica

- Prvo definišemo odgovarajuću konjunkciju za grupu od 4 srednje jedinice. U ovom slučaju grupa ima jedinice u poljima x (x=1) i (x=0) odnosno prelazi iz afirmacije u negaciju, pa ta varijabla neće figurisati u rezultujućem izrazu.
- U datoj grupi ima polja i sa z=1 i sa z=0, pa ni ova varijabla ne utiče na rezultujuću konjunkciju.

- Grupa je definisana u svim poljima sa y=1 (oblast y), tako da varijabla z ulazi u konjunkciju. Konačno, prvi faktor minimalne logičke funkcije je z (nije vezan konjunkcijom jer je samo jedna promenljiva).
- Druga grupa sastoji se od dva polja u donjem lijevom uglu mape.
- Vrijednost varijable x (x=0) je jedinstvena u ovoj grupi, pa ulazi u konjunkciju.
- Zatim, u grupi postoji polje sa varijablom y, ali i sa , pa $\bar{Y}$ prema tome, ova varijabla ne ulazi u konačni izraz za ovu grupu.
- Kako je za ovu grupu i varijabla z jedinstvena, to i ona ulazi u izraz, pa je konačan oblik konjunkcije za ovu grupu: x ·z.
- Minimalni oblik ove funkcije dobija se povezivanjem konjunkcija za pojedine grupe operatorom disjunkcije, pa je u našem slučaju:

$$F = z + (\bar{X} \cdot z)$$

- Prilikom minimizacije logičkih funkcija moguće je poći i od tablice istinitosti, a ne samo od disjunktivne normalne forme, slika 9. b)

a)

Dek.br	X_1	X_2	X_3	Z
0	0	0	0	P_0
1	0	0	1	P_1
2	0	1	0	P_2
3	0	1	1	P_3
4	1	0	0	P_4
5	1	0	1	P_5
6	1	1	0	P_6
7	1	1	1	P_7

b)

	X_1=0		X_1=1	
X_3=0	P_0	P_2	P_6	P_4
X_3=1	P_1	P_3	P_7	P_5
	X_2=0	X_2=1		X_2=0

c)

Dek.br	X_1	X_2	X_3	Z
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

d)

	$\bar{X}$		X_1	
$\bar{X}_3$	0	0	0	0
X_3	0	1	1	0
	$\bar{X}_2$	X_2		$\bar{X}_2$

Slika: Popunjavanje Karnoove mape i minimizacija funkcije z

Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Da bi se tablica istinitosti preslikala na Veič-Karnoovu mapu, posmatraju se svi redovi gdje je funkcija jadnaka 1 i odgovarajuća kombinacija 1 i 0 promjenljivih definiše polje u mapi. Naime, kada promjenljiva ima vrijednost 1, posmatra se u Veič-Karnoovoj mapi oblast u kojoj je ta promjenljiva jednaka 1, a ako ima vrijednost 0, posmatra se njena negacija.
- Međutim, ako se promjenljive X_1,X_2,X_3 rasporede kao na slici na prethodnom slajdu, onda se Karnoova mapa može popuniti po šablonu, jer svakoj vrsti iz tabele uvek odgovara jedno te isto mjesto u Karnoovoj mapi, kao na slici (b).
- Kako je položaj konjunkcije fiksiran, to se samo umjesto P_0,P_1,...P_7 upišu jedinice ili nule (slika (d)), saglasno tabeli istinitosti, slika (c).

Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Grafički se minimizacija izvodi tako što se u tabeli zaokruže dvije susjedne jedinice, kao u tabeli na slici (d), za funkciju zadatu tabelom (c). Posmatra se koja od promjenljivih u okviru grupe jedinica ne prelazi iz afirmacije u negaciju. To su u datom primjeru x_2 i x_3. Njihov logički proizvod će predstavljati traženu minimalnu disjunktivnu formu funkcije:

$$F = x_2 \cdot X_3$$

Metoda Veič-Karnoovih mapa

Za funkciju sa četiri promjenljive, pri fiksnom rasporedu promjenljivih, redosled ređanja u Karnoovoj mapi elemenata dat je na slici 10.
Ovu tabelu treba zamisliti kao da je nacrtana na torusu, pa razvijena u ravan. Drugim riječima, njena lijeva ivica se direktno naslanja na desnu, a donja ivica na gornju. Ovo treba imati u vidu prilikom zaokruživanja susjednih članova.

	$X_1=0$		$X_1=1$		
$X_3=1$	P_0	P_4	P_{12}	P_8	$X_4=0$
	P_1	P_5	P_{13}	P_9	$X_4=1$
$X_3=0$	P_3	P_7	P_{15}	P_{11}	
	P_2	P_6	P_{14}	P_{10}	$X_4=0$
	$X_2=0$	$X_2=1$		$X_2=0$	

Slika: Karnoova mapa sa četiri promenljive

Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Poljima odgovaraju binarni zapisi koji se razlikuju samo na jednom mjestu (tj. Samo jedna binarna cifra iste težine je različita)– Grejov kod!

Metoda Veič-Karnoovih mapa

$x_1 x_2$ / $x_3 x_4$	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1	1		

$$f = \overline{x}_1 + \overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_2 x_4$$

Metoda Veič-Karnoovih mapa

- Šta sa nepotpuno definisanim funkcijama?

$x_1 x_2$ / $x_3 x_4$	00	01	11	10
00	-	1	1	-
01		-	1	
11			1	
10			1	

$$f = \overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1 x_2$$

Metoda Veič-Karnoovih mapa

U praksi može se desiti da se određene kombinacije nezavisno promjenljivih nikada ne pojavljuju. Tada se mjesto u tabeli koje odgovara toj kombinaciji promjenljivih može tretirati i kao logička nula i kao logička jedinica, zavisno od toga kako se dobija optimalnije grupisanje sa susednim jedinicama(kod MDF), odnosno nulama (kod MKF).

Metoda Veič-Karnoovih mapa

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	-		1
11		-		
10		1	-	1

$$F = \sum(0,1,4,6,8,9,10,12) + d(5,7,14)$$
$$= \overline{x_2 x_3} + x_1\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2$$

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	-		1
11		-		
10		1	-	1

$$F = \sum(0,1,4,6,8,9,10,12) + d(5,7,14)$$
$$= \overline{x_2 x_3} + x_1\overline{x_4} + x_2\overline{x_4}$$


KRAJ!