# INDUSTRIJSKA PNEUMATIKA

**Studijski program Mehatronika**
**III SEMESTAR**
**Nastavni fond: 2+2**

**Lekcija 5:**

# Minimizacija logičkih funkcija
# - zadaci -


*Predavač:*

Prof. dr Marina Mijanović Markuš

UCG
Mašinski fakultet
Podgorica

# Zadatak 1

Funkcija *y* je data preko tablice istine. Minimizirati je pomoću sva tri metoda minimizacije:
(a) algebarskom metodom
(b) metodom implikantnih matrica (Kvin-MekKlaski metoda), i
(c) Grafičkom metodom pomoću Veič-Karnoovih mapa.

| dec.br. | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | y |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## Zadatak 1: (a) algebarska metoda

$$f^{(1)} = y = \{3, 4, 6, 7\}$$

$$y = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3$$

$$y = x_2 x_3 (\bar{x}_1 + x_1) + x_1 \bar{x}_3 (\bar{x}_2 + x_2) + x_1 x_2 (\bar{x}_3 + x_3)$$

$$y = x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_3 + x_1 x_2$$

# Zadatak 1: (b) metoda implikantnih matrica

$$f^{(1)} = y = \{3, 4, 6, 7\}$$

T.1.

| *Br.jedinica* | *i* | *Bin. prikaz* | Saž. |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 100 | + |
| 2 | 3 | 011 | + |
| | 6 | 110 | + |
| 3 | 7 | 111 | + |

T.2.

| *i* | *Bin. prikaz* | Saž. |
|---|---|---|
| 4,6 | 1-0 | a |
| 3,7 | -11 | b |
| 6,7 | 11- | c |

# Zadatak 1: (b) metoda implikantnih matrica

$$f^{(1)} = y = \{3, 4, 6, 7\}$$

Implikantna matrica:

| | 3 | 4 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| **a** | | + | + | |
| **b** | + | | | + |
| c | | | + | + |
| | √ | √ | √ | √ |

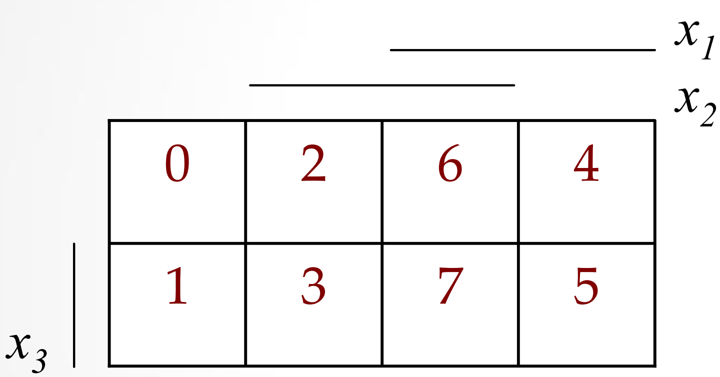
Esencijalne implikante a i b pokrivaju sve decimalne ekvivalente. Zato je:

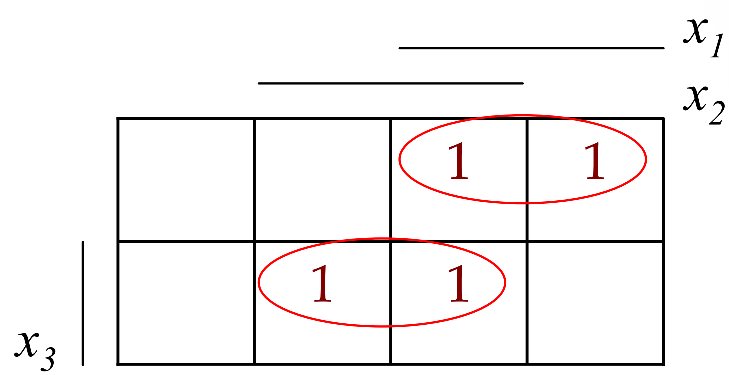
$$y_{min} = a + b$$

$$y_{min} = x_1\overline{x}_3 + x_2x_3$$

# Zadatak 1: (c) grafička metoda (Veič-Karno)

$$f^{(1)} = y = \{3, 4, 6, 7\}$$




$$y_{min} = x_1\bar{x}_3 + x_2x_3$$

## Zadatak 2

Data je funkcija $y(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$y^{(1)} = \{0, 2, 3, 7, 8, 12, 14\}$$

Minimizirati je:

(a) metodom implikantnih matrica (Kvin-MekKlaski metoda), i

(b) Grafičkom metodom (Veič-Karnoove mape).

# Zadatak 2: (a) metoda implikantnih matrica

$$y^{(1)} = \{0, 2, 3, 7, 8, 12, 14\}$$

T.1.

| *Br. jed.* | *i* | *Bin. prikaz* | Saž. |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0000 | + |
| 1 | 2 | 0010 | + |
| | 8 | 1000 | + |
| 2 | 3 | 0011 | + |
| | 12 | 1100 | + |
| 3 | 7 | 0111 | + |
| | 14 | 1110 | + |

T.2.

| *i,j* | *bin.prikaz* | Saž |
|---|---|---|
| 0,2 | 00-0 | *a* |
| 0,8 | -000 | *b* |
| 2,3 | 001- | *c* |
| 8,12 | 1-00 | *d* |
| 3,7 | 0-11 | *e* |
| 12,14 | 11-0 | *f* |

## Zadatak 2: (a) metoda implikantnih matrica

$$y^{(1)} = \{0, 2, 3, 7, 8, 12, 14\}$$

| | 0 | 2 | 3 | 7 | 8 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | * | * | | | | | |
| $b$ | * | | | | * | | |
| $c$ | | * | * | | | | |
| $d$ | | | | | * | * | |
| ***e*** | | | * | * | | | |
| ***f*** | | | | | | * | * |
| | | | √ | √ | | √ | √ |

Implikante $e$ i $f$ su esencijalne. Pokrivaju decimalne ekvivalente 3, 7, 12 i 14. Njih ćemo izostaviti u implikantnoj matrici drugog reda (na sledećem slajdu).

## Zadatak 2: (a) metoda implikantnih matrica

$$y^{(1)} = \{0, 2, 3, 7, 8, 12, 14\}$$

| | 0 | 2 | 8 |
|---|---|---|---|
| $a$ | * | * | |
| $b$ | * | | * |
| ~~$c$~~ | | * | |
| ~~$d$~~ | | | * |

Postupak bi se nastavio iterativno, ali sada nije moguće naći kolonu sa jednom zvjezdicom.

Tražimo pokrivene vrste ili pokrivene kolone i precrtamo ih, vodeći računa o optimalnosti.

To znači sledeće:
Implikanta $a$ (pokriva 0 i 2) je dominantna nad $c$ (pokriva samo 2). Zato ćemo isključiti implikantu $c$.

Implikanta $b$ (pokriva 0 i 8) je dominantna nad $d$ (pokriva samo 8). Zato ćemo isključiti implikantu $d$.

Dakle, minimalni oblik funkcije je:

$$y_{\min} = a + b + e + f =$$

$$= \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 + \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 \overline{x}_4$$

# Zadatak 2: (b) metoda Veič-Karno

$$y^{(1)} = \{0, 2, 3, 7, 8, 12, 14\}$$

| $x_3x_4$ \ $x_1x_2$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | | 1 | 1 |
| 01 | | | | |
| 11 | 1 | 1 | | |
| 10 | 1 | | 1 | |

$$y_{\min} = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 + \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1x_3x_4 + x_1x_2\overline{x}_4$$

## Zadatak 3: primjer sa nepotpunom funkcijom

Data je funkcija $y(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$y = \sum(0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10) + d(5, 11, 13)$$

Minimizirati je:

(a) metodom implikantnih matrica (Kvin-MekKlaski metoda), i

(b) Grafičkom metodom (Veič-Karnoove mape).

## Zadatak 3: primjer sa nepotpunom funkcijom (b) Metoda implikantnih matrica

$$y = \sum(0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10) + d(5, 11, 13)$$

| Br. jed. | Dec. ekv. | Bin. prikaz | Saž. |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0000 | √ |
| 1 | 1 | 0001 | √ |
| | 2 | 0010 | √ |
| | 4 | 0100 | √ |
| 2 | 3 | 0011 | √ |
| | 5 | 0101 | √ |
| | 6 | 0110 | √ |
| | 9 | 1001 | √ |
| | 10 | 1010 | √ |
| 3 | 11 | 1011 | √ |
| | 13 | 1101 | √ |

| Dec. ekv. | Bin. Pr. | Saž. |
|---|---|---|
| 0, 1 | 000- | |
| 0, 2 | 00-0 | |
| 0, 4 | 0-00 | |
| 1, 3 | 00-1 | |
| 1, 5 | 0-01 | |
| 1, 9 | -001 | |
| 2, 3 | 001- | |
| 2, 6 | 0-10 | |
| 2, 10 | -010 | |
| 4, 5 | 010- | |
| 4, 6 | 01-0 | |
| 3, 11 | -011 | |
| 5, 13 | -101 | |
| 9, 11 | 10-1 | |
| 9, 13 | 1-01 | |
| 10, 11 | 101- | |

Sva neodređena stanja smo uključili u tabelu T.1.

## Zadatak 3: primjer sa nepotpunom funkcijom (b) Metoda implikantnih matrica

$$y = \sum (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10) + d(5, 11, 13)$$

| *Dec. ekv.* | *Bin. Pr.* | Saž. |
|---|---|---|
| 0, 1 | 000- | √ |
| 0, 2 | 00-0 | √ |
| 0, 4 | 0-00 | √ |
| 1, 3 | 00-1 | √ |
| 1, 5 | 0-01 | √ |
| 1, 9 | -001 | √ |
| 2, 3 | 001- | √ |
| 2, 6 | 0-10 | √ |
| 2, 10 | -010 | √ |
| 4, 5 | 010- | √ |
| 4, 6 | 01-0 | √ |
| 3, 11 | -011 | √ |
| 5, 13 | -101 | √ |
| 9, 11 | 10-1 | √ |
| 9, 13 | 1-01 | √ |
| 10, 11 | 101- | √ |

| *Dec. ekv.* | *Bin. Pr.* | Saž. |
|---|---|---|
| 0,1,2,3 | 00-- | |
| 0,1,4,5 | 0-0- | |
| ~~0,2,1,3~~ | ~~00--~~ | |
| 0,2,4,6 | 0--0 | |
| ~~0,4,1,5~~ | ~~0-0-~~ | |
| ~~0,4,2,6~~ | ~~0--0~~ | |
| 1,3,9,11 | -0-1 | |
| 1,5,9,13 | --01 | |
| ~~1,9,3,11~~ | ~~-0-1~~ | |
| 2,3,10,11 | -01- | |
| ~~1,9,5,13~~ | ~~--01~~ | |
| ~~2,10,3,11~~ | ~~-01-~~ | |

## Zadatak 3: primjer sa nepotpunom funkcijom (b) Metoda implikantnih matrica

$$y = \sum (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10) + d(5, 11, 13)$$

| *Dec. ekv.* | *Bin. Pr.* | Saž. |
|---|---|---|
| 0,1,2,3 | 00-- | a |
| 0,1,4,5 | 0-0- | b |
| 0,2,4,6 | 0--0 | c |
| 1,3,9,11 | -0-1 | d |
| 1,5,9,13 | --01 | e |
| 2,3,10,11 | -01- | f |

Sažimanje nije više moguće.

## Zadatak 3: primjer sa nepotpunom funkcijom
## (b) Metoda implikantnih matrica

$$y = \sum (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10) + d(5, 11, 13)$$

| *Dec. ekv.* | *Bin. Pr.* | Saž. |
|---|---|---|
| 0,1,2,3 | 00-- | a |
| 0,1,4,5 | 0-0- | b |
| 0,2,4,6 | 0--0 | c |
| 1,3,9,11 | -0-1 | d |
| 1,5,9,13 | --01 | e |
| 2,3,10,11 | -01- | f |

Ne uzimaju se u obzir

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 10 | 5 | 11 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | + | + | + | + | | | | | | | |
| b | + | + | | | + | | | | | | |
| c | + | | + | | + | + | | | | | |
| d | | + | | + | | | + | | | | |
| e | | + | | | | | + | | | | |
| f | | | + | + | | | | + | | | |
| | √ | | √ | √ | √ | √ | | √ | | | |

# Zadatak 3: primjer sa nepotpunom funkcijom
# (b) Metoda implikantnih matrica

$$y = \sum (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10) + d(5, 11, 13)$$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | + | + | + | + | | | | |
| b | + | + | | | + | | | |
| c | + | | + | | + | + | | |
| d | | + | | + | | | + | |
| e | | + | | | | | + | |
| f | | | + | + | | | | + |
| | √ | | √ | √ | √ | √ | | √ |

Esencijalne implikante su *c* i *f*.

| | 1 | 9 |
|---|---|---|
| a | + | |
| b | + | |
| d | + | + |
| e | + | + |
| | | |

U implikantnoj matrici drugog reda nema esencijalnih implikanti. Ali implikante *d* i *e* su dominantne nad *a* i *b*, jer pokrivaju iste decimalne ekvivalnte kao *a* i *b,* ali i više od njih. Zato ćemo vrste *a* i *b* izbrisati.

## Zadatak 3: primjer sa nepotpunom funkcijom
## (b) Metoda implikantnih matrica

$$y = \sum (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10) + d(5, 11, 13)$$

| | 1 | 9 |
|---|---|---|
| d | + | + |
| e | + | + |
| | | |

Implikante d i e su istog reda (imaju isti broj promjenljivih). Zato imamo dva rešenja.

$$y_{\min)1} = c + f + e = \bar{x}_1\bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_3 x_4$$

$$y_{\min)2} = c + f + d = \bar{x}_1\bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_2 x_4$$

# Zadatak 3: primjer sa nepotpunom funkcijom (b) Veič-Karno metoda

$$y = \sum (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10) + d(5, 11, 13)$$

| $x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | |
| 01 | 1 | - | - | 1 |
| 11 | 1 | | | - |
| 10 | 1 | 1 | | 1 |

$$y_{min)1} = \bar{x}_1\bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_3 x_4$$

# Zadatak 3: primjer sa nepotpunom funkcijom (b) Veič-Karno metoda

$$y = \sum (0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10) + d(5, 11, 13)$$

| $x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | |
| 01 | 1 | - | - | 1 |
| 11 | 1 | | | - |
| 10 | 1 | 1 | | 1 |

$$y_{\min)2} = \bar{x}_1\bar{x}_4 + \bar{x}_2 x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_4$$

## Zadatak 4: Veič-Karnoova metoda minimizacije

| $x_3 x_4 \backslash x_1 x_2$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | 1 |
| 01 | 1 | 1 | | 1 |
| 11 | 1 | 1 | | 1 |
| 10 | 1 | 1 | | |

$$f = \overline{x}_1 + \overline{x}_2\overline{x}_3 + \overline{x}_2 x_4$$

# Zadatak 5: Veič-Karnoova metoda minimizacije

## Nepotpuno definisane funkcije

| $x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | - | 1 | 1 | - |
| 01 | | - | 1 | |
| 11 | | | 1 | |
| 10 | | | 1 | |

$$f = \overline{x}_3\overline{x}_4 + x_1x_2$$

# Zadatak 6: Veič-Karnoova metoda minimizacije

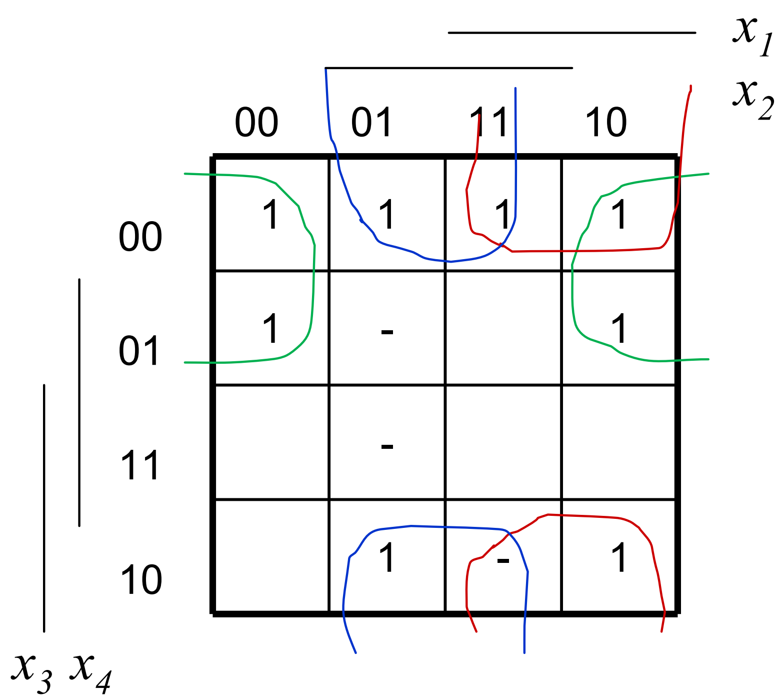
## Nepotpuno definisane funkcije

| $x_3 x_4$ \ $x_1 x_2$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | - | | 1 |
| 11 | | - | | |
| 10 | | 1 | - | 1 |

$$F = \sum(0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12) + d(5,7,14) = \overline{x_2}\,\overline{x_3} + x_1\overline{x_4} + x_2\overline{x_4}$$

## Zadatak 7: Veič-Karnoova metoda minimizacije

### Nepotpuno definisane funkcije




$$F=\sum(0, 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12)+d(5,7,14) = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2$$