

**OSNOVE ZA PROUČAVANJE  
KRETANJA TEČNOSTI  
KINEMATIKA FLUIDA**

Hidrostatika, deo Hidraulike koji izučava mirovanje fluida, predstavlja skoro potpuno egzaktnu (tačnu) nauku.

Za sve probleme koje smo razmatrali u okviru Hidrostatike rešenja su dobijana isključivo na osnovu teorijske analize problema.

Jedina veličina koju je bilo neophodno utvrditi eksperimentalnim putem je specifična težina (ili gustina fluida).

Problemi kretanja tečnosti, kojima se bavi hidrodinamika su izuzetno složeni.

Osnovne zakone koji opisuju kretanje tečnosti nije ni malo lako definisati i matematički izraziti.

Kretanje vode u prirodnim vodotocima (rekama) toliko je složeno (zbog promenljivosti u prostoru poprečnih preseka i rapavosti rečnog korita) da se ne može matematički formulisati na bazi teorijske analize.

U takvim slučajevima teorijske analize problema moraju biti dopunjene rezultatima eksperimentalnih istraživanja u cilju potpunog definisanja problema.

Uvođenje empirijskih rezultata dovodi do relativnih nepreciznosti konačnih rešenja koja se odnose na probleme kretanja tečnosti.

*Struja (tok)* je izduženo strujno polje sa određenim pravcem prenošenja tečnosti.



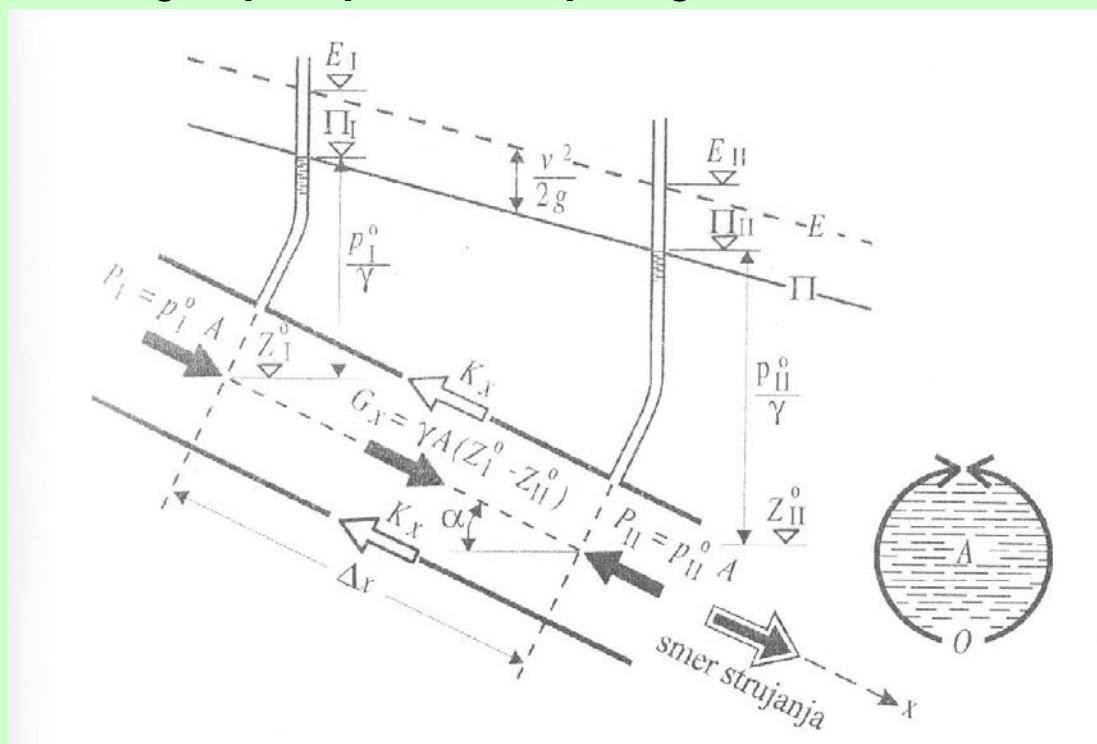
Primeri za struje su tečenja u cevima, kanalima, rekama, itd.



U pogledu načina strujanja u hidraulici se mogu izdvojiti dve odvojene grupe strujanja:

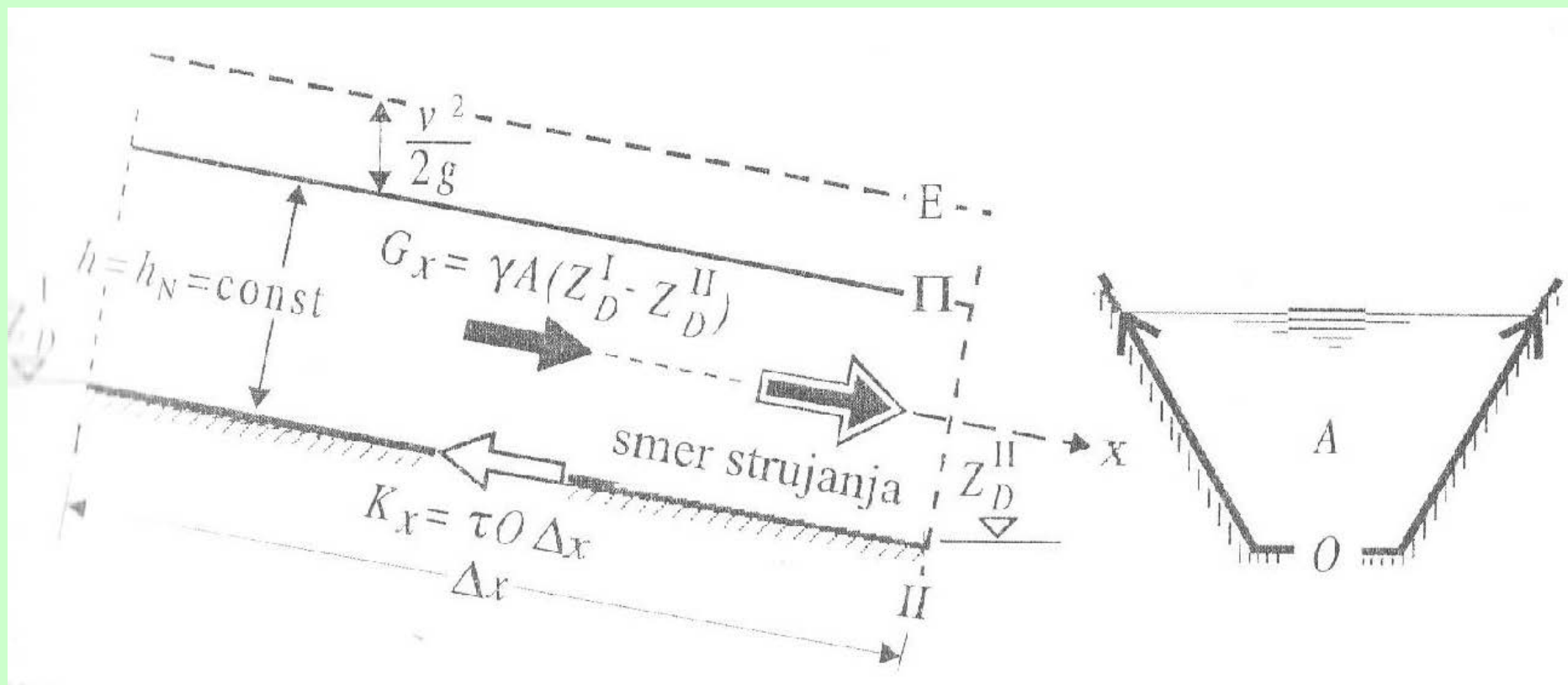
### 1) Strujanje pod pritiskom

ako je apsolutni pritisak tečnosti u gornjem delu provodnika kroz koji tečnost struji veći od atmosferskog pritiska. Pijezometarska linija se nalazi iznad provodnika, a provodnik je potpuno ispunjen tečnošću.



## 2) Strujanje sa slobodnom površinom

ako je gornji sloj tečnosti u nekom provodniku izložen dejstvu atmosferskog pritiska. Pijezometarska linija se poklapa sa linijom slobodne površine tečnosti. Primer takvih strujanja su strujanja u kanalima i rekama.



## **Karakteristike fluida:**

- Realni fluidi i idealni fluidi
- Stišljiv i nestišljiv fluid
- Homogen i nehomogen fluid

## **Vrste strujanja:**

- Ustaljeno i neustaljeno
- Jednoliko i nejednoliko
- Laminarno i turbulentno

## **-Ustaljeno i neustaljeno strujanje**

- Ukoliko se posmatrane veličine ne menjaju u određenom, konačnom vremenskom intervalu strujanje je ustaljeno. Uslov za ustaljeno strujanje:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \text{ u intervalu } (t_1, t_2)$$

$$Q = \text{const.}$$

## **-Jednoliko i nejednoliko strujanje**

- Pod jednolikim tečenjem podrazumeva se tečenje kog koga su veličine kojima se opisuje kretanje istovetne u svim poprečnim presecima u jednom vremenskom trenutku. Uslov za jednoliko tečenje:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, 3 \text{ za trenutak } t = t_j$$

- Ustaljenost je vezana za promene po vremenu u jednom preseku fluidne struje, a jednolikost je vezana za promenu duž fluidne struje u jednom vremenskom trenutku.

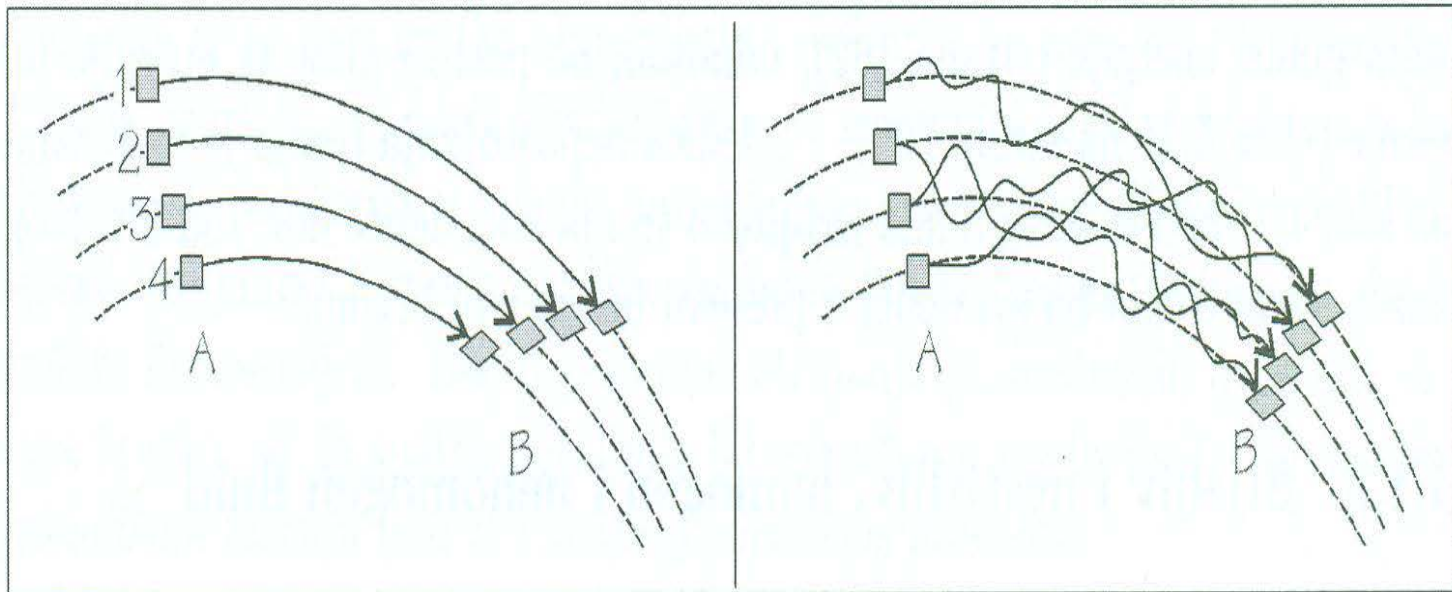
## **• Laminarno i turbulentno**

Laminarno: tečenje u slojevima, koji se međusobno ne mešaju; trajektorija pravolinijska; javlja se samo pri vrlo malim brzinama toka

Turbulentno: vrlo intenzivno mešanje između slojeva; trajektorija vrlo složena i nepravilna; kretanje trodimenzionalno i neustaljeno (promene i u prostoru i u vremenu); javlja se kod većih brzina



# Prikaz trajektorije delića kod laminarnog i kod turbulentnog kretanja

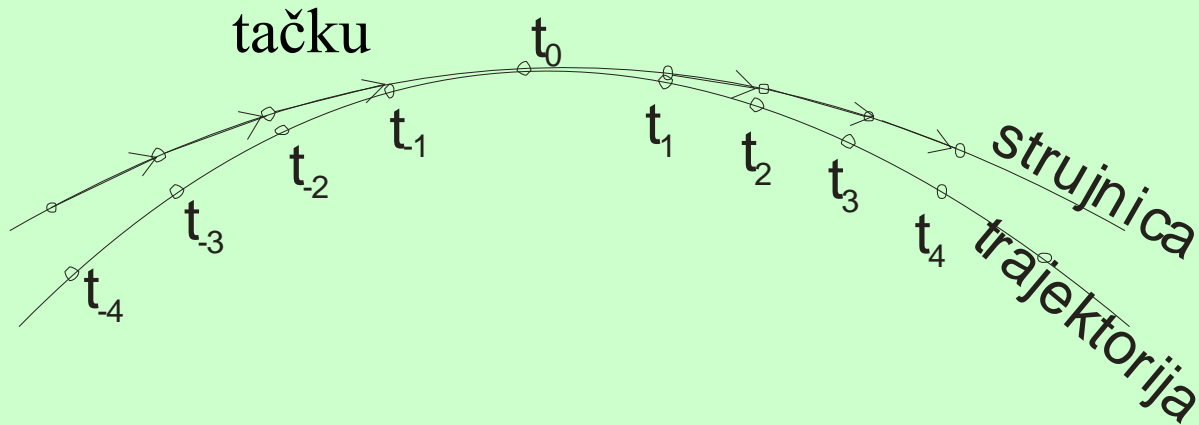


# Pojam trajektorije, strujnice i emisione linije

**Trajektorija**-linija koja opisuje putanju jednog delića kroz vreme

**Strujnica**-linija koja povezuje položaje različitih delića u istom vremenskom trenutku.

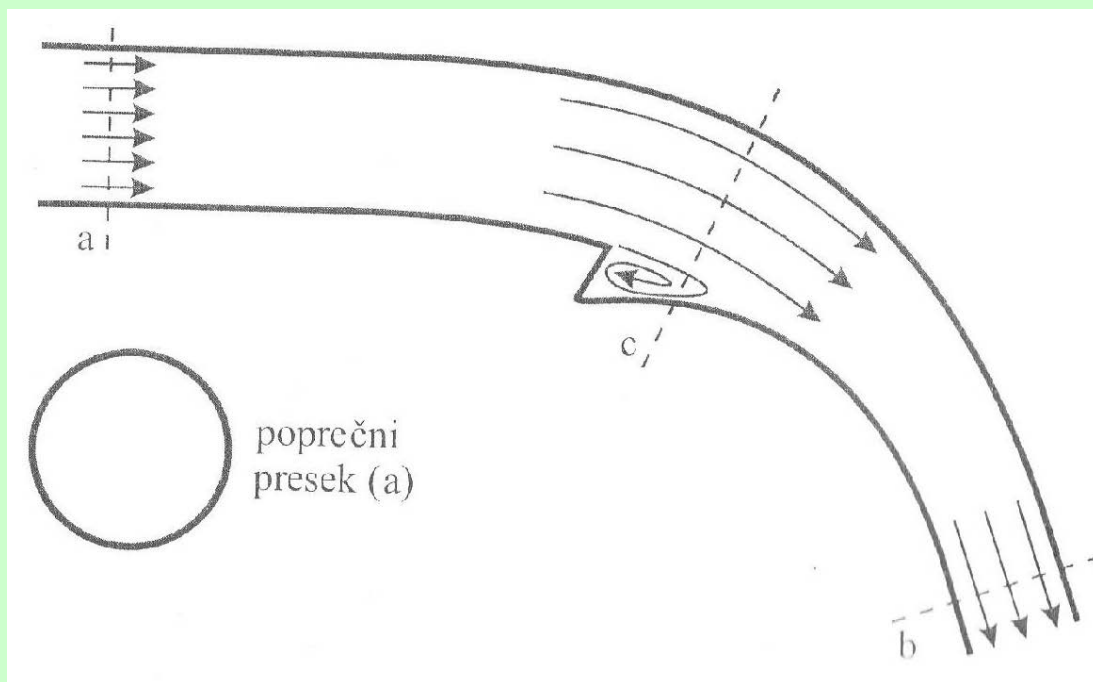
**Emisiona linija** – linija koja za jedan vremenski trenutak opisuje položaje svih delića koji su prošli kroz jednu



Kod proučavanja struja najčešće upoređujemo stanje u dva poprečna preseka, a za opisivanje struja u presjeku koriste se veličine koje važe za ceo presek .

Za proučavanje se uvek bira onaj presjek kod koga je strujanje *pravolinijsko, paralelno i upravno* na presjek.

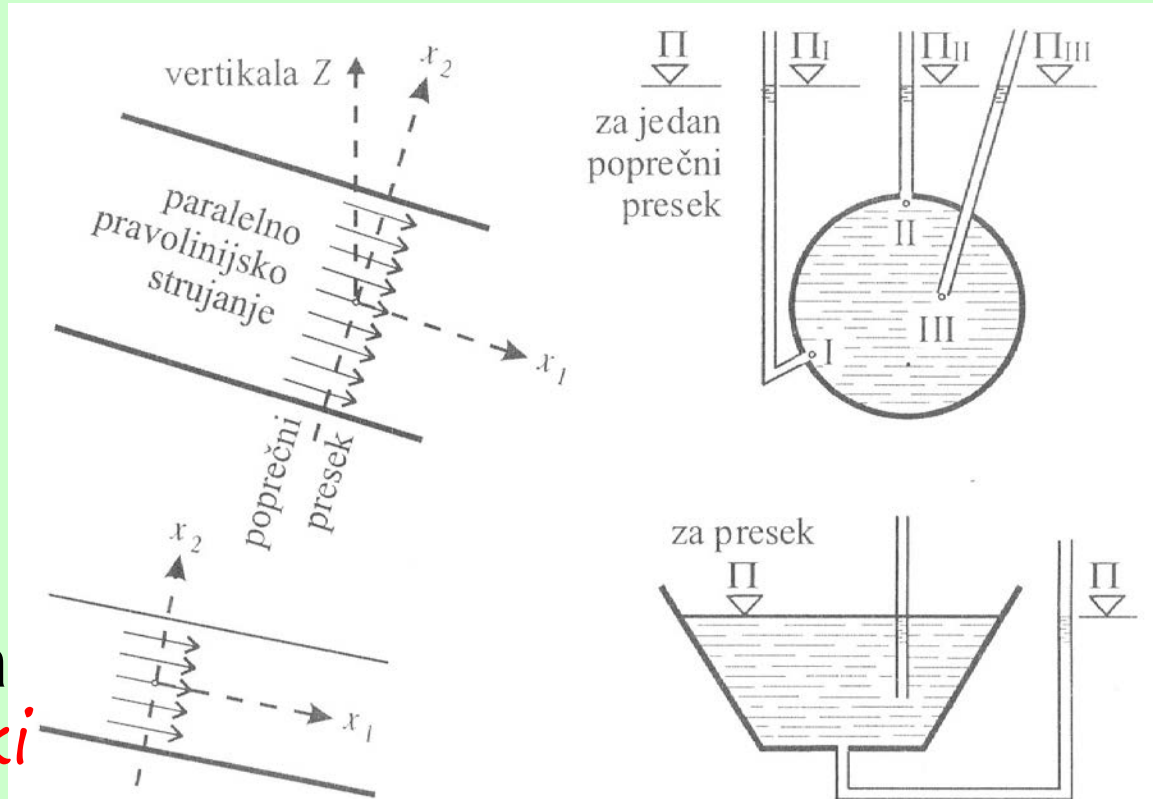
Veličine koje opisuju struje u poprečnom preseku najčešće su pijezometarska kota i prosečna brzina strujanja.



# Osnovne predpostavke i uslovi za izučavanje ustaljenih strujanja nestišljivih fluida

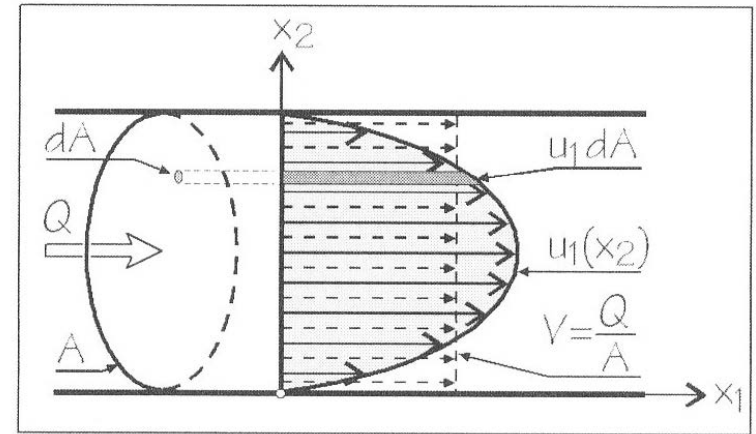
I Za dati presjek struje  $\Pi$  mora biti ista za ceo presjek.

Za bilo koji presjek predpostavlja se da vlada *hidrostatički raspored pritiska*.



Pijezometarska kota za ceo jedan poprečni presjek struje je ista; gornji crtež odnosi se na struju pod pritiskom (cev), a donji na struju sa slobodnom površinom (kanal)

II Brzina strujanja u datom preseku izražava se preko **srednje** (prosečne) **brzine** za presek ( $V$ )



Stvarni raspored brzina u preseku  $u(x_2)$  i srednja brzina  $V$

Označimo sa  $Q$  **proticaj tečnosti**, odnosno proteklu zapreminu tečnosti u jedinici vremena kroz presek struje  $A$  ili **produkt iz površine proticanja i brzine** (tačnije rečeno iz komponente brzine u pravcu normalnom na površinu), koji ima pozitivnu vrednost ako fluid ističe.

$dQ$  – elementarni proticaj kroz površinu  $dA$

$$dQ = u \cdot dA$$

$$\left[ \frac{L}{T} \cdot L^2 \right] = \left[ \frac{L^3}{T} \right]$$



Proticaj kroz poprečni presek struje:

$$Q = \int_A u \cdot dA = \sum_{i=1}^n u_i \cdot dA_i$$

Srednju odnosno prosečnu brzinu u preseku,  $v$ , definisaćemo kao odnos proticaja  $Q$  i površine  $A$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{1}{A} \cdot \int_A u \cdot dA = \frac{\sum_{i=1}^n u_i \cdot dA}{A}$$

III Proučavaju se samo *nestišljive tečnosti*, odnosno tečnosti kod kojih je gustina  $\rho = \text{const}$ . Fluid je nestišljiv, gustina se ne menja ni po vremenu ni od tačke do tačke. Ista masa uvek i svuda zauzima istu zapreminu, koja se ne menja bez obzira na vladajući pritisak, jer je fluid, kako sam naziv kaže, nestišljiv.

- IV Proučavaju se isključivo *ustaljena strujanja*. Strujanje je *ustaljeno (permanentno)* ako je istovetno u svim vremenskim trenucima (kakvo je u jednom trenutku, takvo je stalno).
- V Pri proučavanju kretanja tečnosti predpostavlja se da od zapreminskih sila (sile proporcionalne masi) deluje samo težina tečnosti.
- VI Pri proučavanju kretanja tečnosti predpostavlja se da od površinskih sila deluju sile usled dejstva pritiska (sile pritiska) i sile usled napona trenja između fluidnih delića (sile trenja).
- VII Između dva poprečna preseka struje, struja je ograničena *omotačem*.
- Ako je omotač čvrsta nepokretna granična površina, onda između njega i struje nema izmene energije (nema rada jer se on ne kreće).

Uvođenjem prethodno navedenih pretpostavki omogućeno je da se problem formulisanja kretanja tečnosti pojednostavi.

Većina praktičnih problema u hidraulici se može rešiti primenom tri osnovne jednačine:

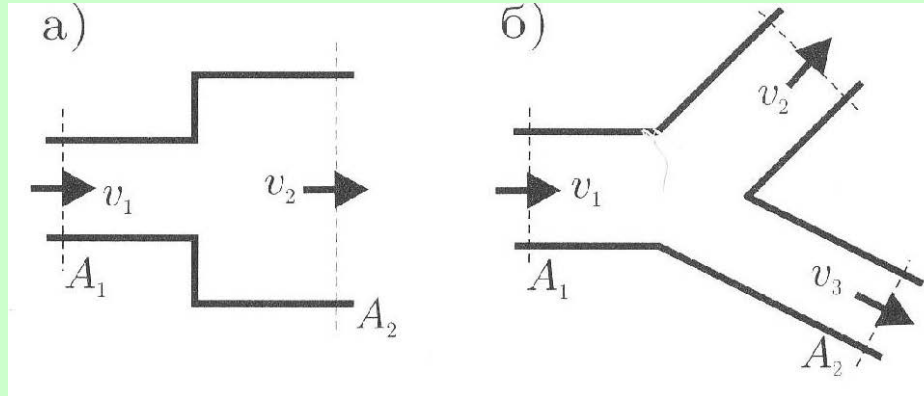
*1. jednačina kontinuiteta*

*2. energetska jednačina*

*3. jednačina količine kretanja (dinamička jednačina)*

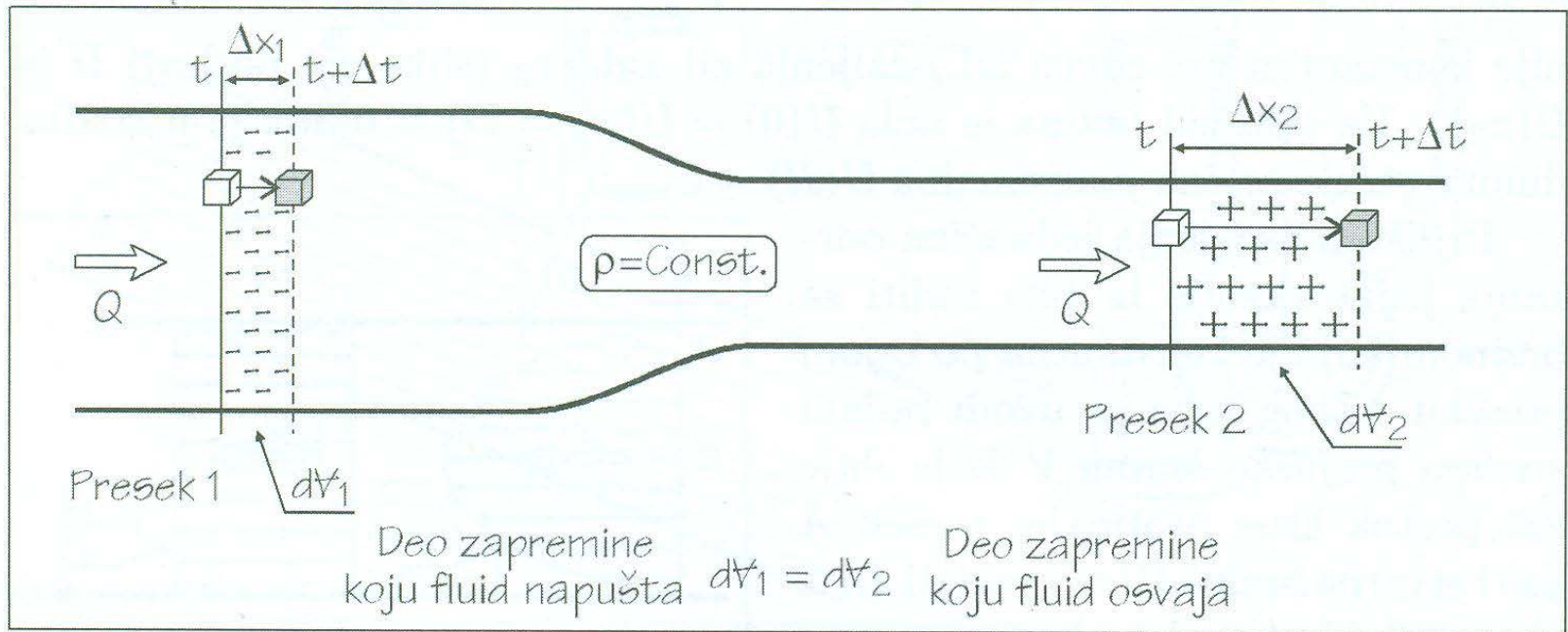
Sva tri ova zakona poštuju načelo održanja ili nepromenljivosti. Tako je masa nepromenljiva, jer se ne može ni uništiti ni stvoriti. Količina kretanja se održava sve dok je sila ne promeni. Zakon održanja energije dozvoljava samo prelazak iz jedne vrste energije u drugu, a kao i masa energija se ne može ni uništiti ni stvoriti.

# Jednačina kontinuiteta (jednačina održanja mase)



Jedan od osnovnih principa koji mora biti zadovoljen kod svih strujanja je kontinuitet strujanja.

Jednačina kontinuiteta proizilazi iz nepromenljivosti mase tečnosti, odnosno iz neprekidnosti tečnosti što znači tečnost ispunjava u potpunosti prostor u kome se nalazi.



Masa fluida koja u određenom trenutku zauzima zapreminu između poprečnih preseka 1 i 2 struje, ostaje nepromenjena i uvek će potpuno ispunjavati prostor koji zauzima (ne prekida se). Stoga su jednake zapremine koju posmatrana masa za vreme  $dt$  napusti, odnosno osvoji (fluid je konstantne gustine pa jednakost masa znači i jednakost zapremina a ustaljenost ne dopušta promenu zapremine između preseka).



$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V$$

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

masa u jedinici  
vremena

$$\frac{\Delta m}{dt} = \rho \cdot \frac{\Delta V}{dt} = \rho \cdot Q = \rho \cdot v \cdot A$$

masa u jedinici vremena  
koja ulazi u cev

=

masa u jedinici vremena  
koja izlazi kroz cev

$$\rho_1 v_1 \cdot A_1 = \rho_2 v_2 \cdot A_2$$

$$\rho_1 \cdot Q_1 = \rho_2 \cdot Q_2$$

Kako je tečnost nestišljiva,

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{const}$$

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

$$Q_1 = Q_2$$

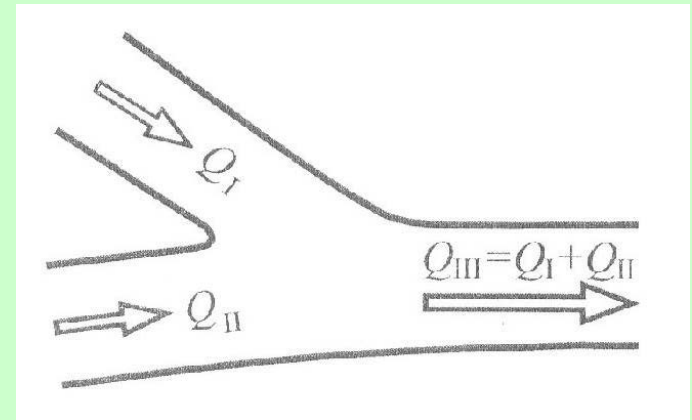
Za nestišljive fluide kao što su tečnosti *jednačina nepromenljivosti mase* odnosno *jednačina kontinuiteta* (*neprekidnosti*) se može izraziti i u sledećem obliku:  $v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = v_n \cdot A_n = Q = const$

gde je:  $v$  - srednja brzina u preseku struje

$A$  - površina poprečnog preseka

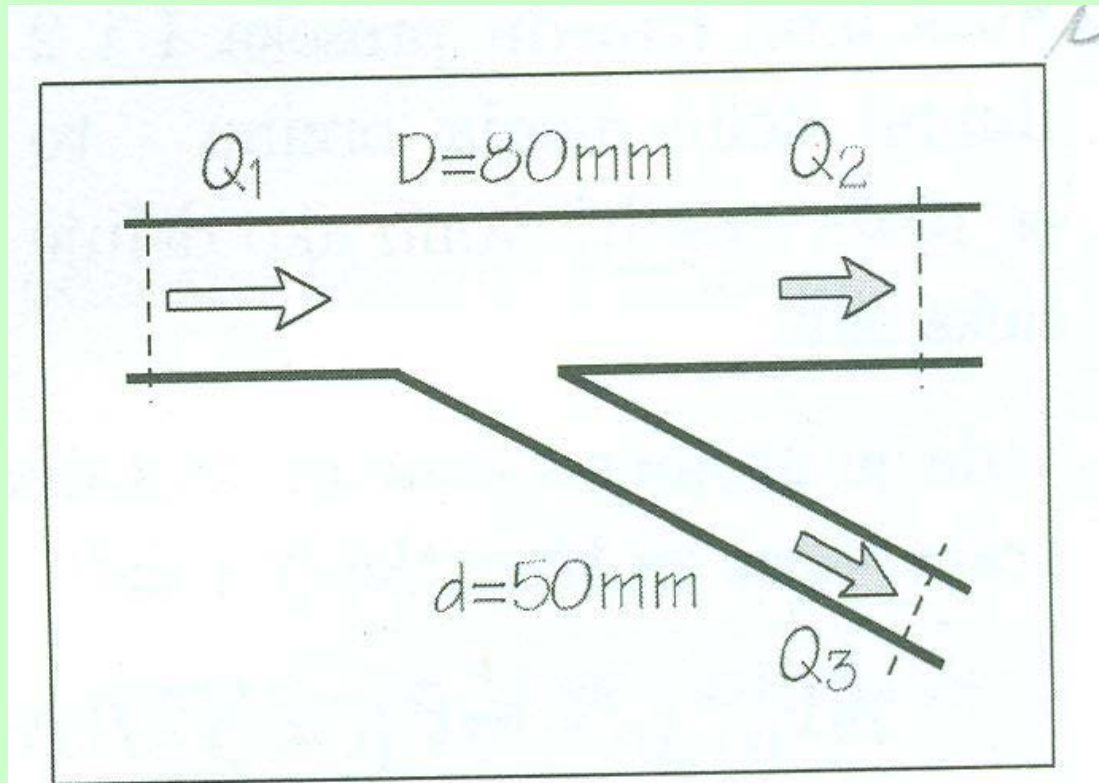
Ako se struja račva:

$$Q_m = Q_I + Q_{II}$$



## Primer:

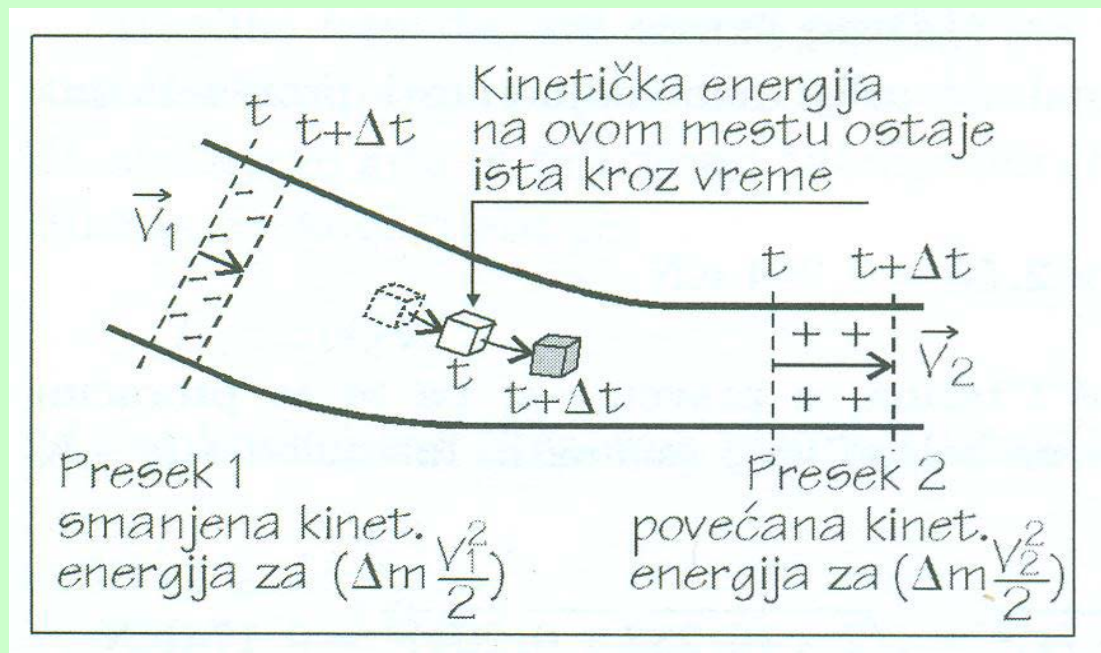
- Za račvu prikazanu na skici, dolazni protok je  $Q_1=10 \text{ l/s}$ . A protok kroz donju cev je  $Q_3=4 \text{ l/s}$ . Kolike su brzine vode u cevima?



# Energetska (Bernulijeva) jednačina

Bernulijeva jednačina izražava zakon o održanju energije, jer ona pokazuje da je zbir potencijalne i kinetičke energije na jedinicu težine tečnosti konstantan duž strujnice idealne tečnosti.

Prema zakonu o održanju energije, energija u jednom zatvorenom sistemu se ne može ni uništiti ni stvoriti. Energija koja je ušla u sistem mora biti jednaka energiji koja je napustila sistem.

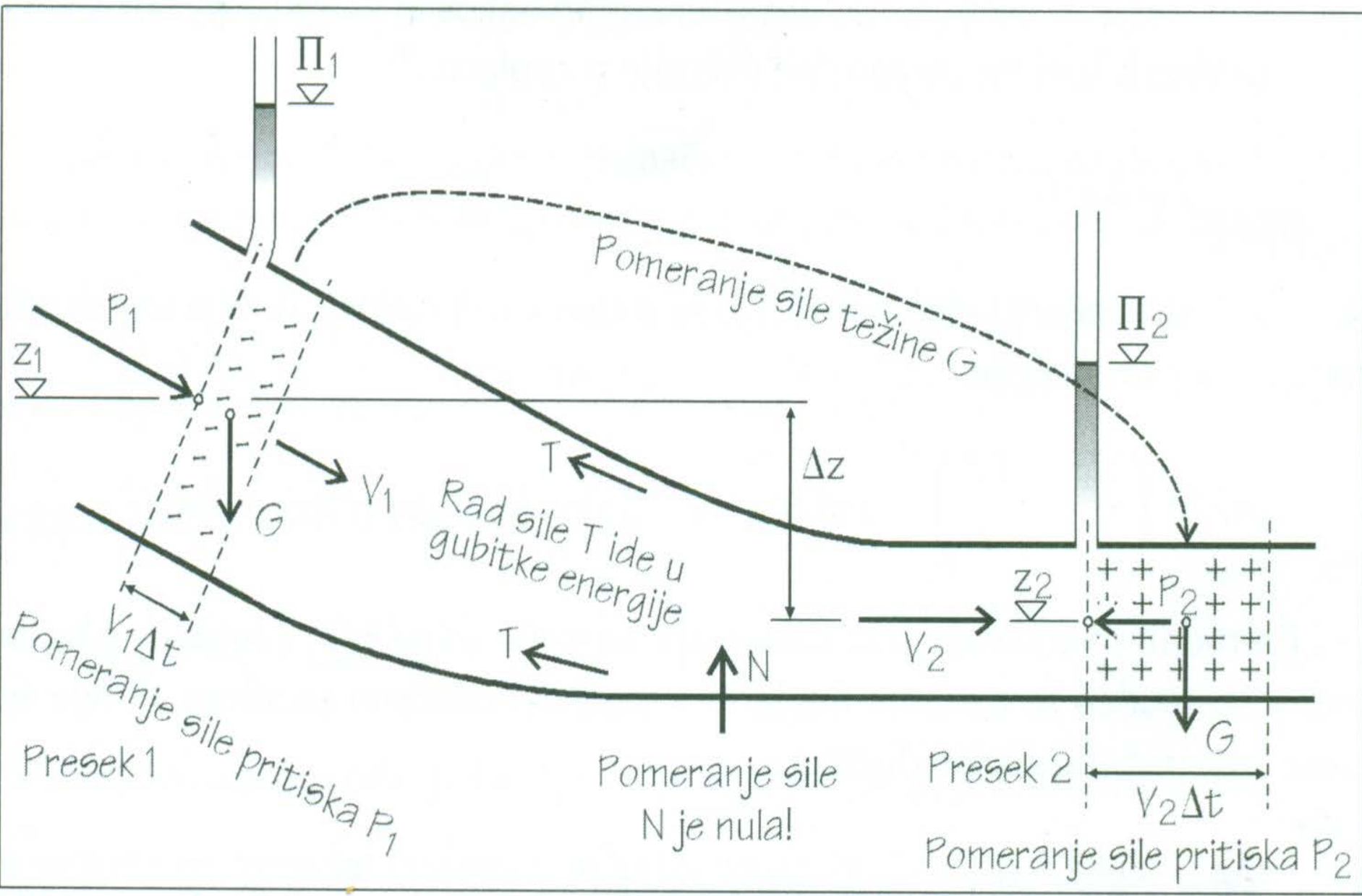


- Rad je skalarni proizvod sile i pomeranja pod uticajem te sile.
- **Polazi se od stava da je priraštaj kinetičke energije posmatrane mase u vremenskom intervalu  $\Delta t$  jednak radu svih realnih sila na toj masi umanjen za energiju koja iz mehaničke pređe u toplotnu.**
- Kinetička energija posmatrane mase je:  $mv^2/2$
- Priraštaj kinetičke energije za trenutke  $(t+\Delta t)$  i  $(t)$ :

$$m \frac{v^2}{2} \Big|_{(t+\Delta t)} - m \frac{v^2}{2} \Big|_{(t)} = \sum F_i x_i - \Delta E \quad (*)$$

- $F_i$ - sve realne sile koje deluju na masu





**U preseku 1 se gubi kinetička energija:**

$$E_1 = -\frac{\Delta m v_1^2}{2} = -\frac{\rho A_1 v_1 \Delta t v_1^2}{2} = -\rho Q \Delta t \frac{v_1^2}{2}$$

**a u preseku 2 se dobija :**

$$E_2 = +\frac{\Delta m v_2^2}{2} = +\frac{\rho A_2 v_2 \Delta t v_2^2}{2} = +\rho Q \Delta t \frac{v_2^2}{2}$$

- Ukupni priraštaj kinetičke energije za celokupnu masu fluida je:

$$\rho Q \Delta t \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) \quad (*)$$

Za posmatranu masu fluida između preseka 1 i 2, radovi pojedinih sila su:

- **Rad sile težine:** rad potreban da se premesti " napuštena " u " osvojenju " zapreminu, pri čemu se rad vrši samo u z pravcu:

$$G(z_1 - z_2) = \rho g Q \Delta t (z_1 - z_2)$$

- **Rad sile pritiska** na presecima 1 i 2 je proizvod sile pritiska  $P_1 = p_1 A_1$  i  $P_2 = p_2 A_2$  na pomeranjima usled dejstva tih sila:

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t = Q \Delta t (p_1 - p_2)$$

- **Rad konturne sile se razdvaja na deo usled normalne sile N i sile tangencijalnih napona (trenja) T.** Radom sile trenja nastaje gubitak, odnosno energija koja se " troši " na prelazak korisne mehaničke energije u toplotnu:

$$\Delta E_{izg} G$$

Izjednačavanjem jednačine (\*) sa sumom svih radova, dobija se jednačina mehaničke energije:

$$\rho Q \Delta t \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = \rho g Q \Delta t (z_1 - z_2) + Q \Delta t (p_1 - p_2) - \Delta E_{izg}$$

Ako se jednačina podeli sa težinom fluida, odnosno sa silom, dobija se izraz koji ima dimenziju dužine:

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = (z_1 - z_2) + \left( \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} \right) - \Delta E_{1-2}$$

$$\frac{v_2^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} - \text{priraštaj kinetičke energije po jedinici težine}$$

$$(z_1 - z_2) - \text{rad sile težine po jedinici težine}$$

$$\frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} - \text{rad sile pritiska po jedinici težine}$$

$$\Delta E_{1-2} - \text{izgubljena energija po jedinici težine}$$

Daljim sređivanjem izraza, mogu se članovi rada sile težine i sile pritiska grupisati po presecima:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \Pi_1$$

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = \Pi_2$$

- Pijezometarska kota predstavlja potencijalnu energiju fluida po jedinici težine, odnosno sposobnost fluida da obavi rad. Potencijalnu energiju čini:
  - energija usled visinskog položaja delića z
  - energija usled delovanja pritiska  $p/\rho g$

$$\Pi_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \Pi_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta E_{1-2}$$

$$E_1 = E_2 + \Delta E_{1-2}$$

Bernulijeva jednačina se može pisati i obliku:

$$\underbrace{\underbrace{E}_{\left[ \begin{array}{c} \text{ukupna} \\ \text{energija} \end{array} \right]}} = \underbrace{\underbrace{\Pi}_{\left[ \begin{array}{c} \text{potencijalna} \\ \text{energija} \end{array} \right]}} + \underbrace{\underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\left[ \begin{array}{c} \text{kinetička} \\ \text{energija} \end{array} \right]}}$$

po jedinici težine

$$\underbrace{\underbrace{\left( \Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_I}_{E_I} - \underbrace{\left( \Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_{II}}_{E_{II}}}_{\left[ \text{smanjenje mehaničke energije} \right]} = \underbrace{E_{\text{izg}}^{I-II}}_{\left[ \text{prešlo iz mehaničke u drugu vrstu energije} \right]}$$

po jedinici težine

Ukupna energija (po jedinici težine) u uzvodnom preseku jednaka je ukupnoj energiji u nizvodnom preseku uvećanoj za izgubljenu energiju.

$\Pi$  - piježometarska kota se može shvatiti kao združena potencijalna energija usled težine i pritiska, izražena u odnosu na nultu kotu i nulti pritisak.

$\frac{v^2}{2g}$  -je takozvana brzinska visina, odnosno kinetička energija po jedinici težine

$E = \Pi + \frac{v^2}{g} = const$  -je energetska kota, odnosno ukupna kota (potencijalna + kinetička), sve po jedinici težine.

Zanemarenjem ili izostavljanjem  $E_{izg}$  došlo bi se do zaključka da se ukupna energija duž struje ne menja, što je zapravo pretpostavka IDEALNOG FLUIDA.

$$\left( \Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_I = \left( \Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_{II} \quad \text{tj.} \quad E_I = E_{II}$$





## Bernulijeva jednačina za strujnicu idealanog fluida

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{V^2}{2g} = \text{const.} \quad (\text{I} - 70)$$

U jednačini I-70,  $z$  – predstavlja kotu posmatrane tačke iznad referentne ravni,  $\frac{p}{\rho \cdot g}$  – pritisak izražen visinom vodenog stuba,  $\frac{V^2}{2g}$  – brzinsku visinu. Svi članovi imaju linearnu dimenziju ( $m$ ), tj. jednačina je dimenzionalno homogena.

Bernulijeva jednačina izražava zakon održanja energije, jer ona pokazuje da je zbir potencijalne  $\left(z + \frac{p}{\rho \cdot g}\right)$  i kinetičke energije  $\left(\frac{V^2}{2g}\right)$ , na jedinicu težine tečnosti, konstantan duž strujnice idealne tečnosti. Uopštavanje Bernulijeve jednačine za realnu tečnost vrši se uvođenjem korektivnog faktora – gubitka energije (na jedinicu težine tečnosti)  $\Delta E$ .

$\Pi$  - piježometarska kota se može shvatiti kao združena potencijalna energija usled težine i pritiska, izražena u odnosu na nultu kotu i nulti pritisak.

$\frac{v^2}{2g}$  -je takozvana brzinska visina, odnosno kinetička energija po jedinici težine

$E = \Pi + \frac{v^2}{g} = const$  -je energetska kota, odnosno ukupna kota (potencijalna + kinetička), sve po jedinici težine.

Zanemarenjem ili izostavljanjem  $E_{izg}$  došlo bi se do zaključka da se ukupna energija duž struje ne menja, što je zapravo pretpostavka IDEALNOG FLUIDA.

$$\left( \Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_I = \left( \Pi + \frac{v^2}{2g} \right)_{II} \quad \text{tj.} \quad E_I = E_{II}$$

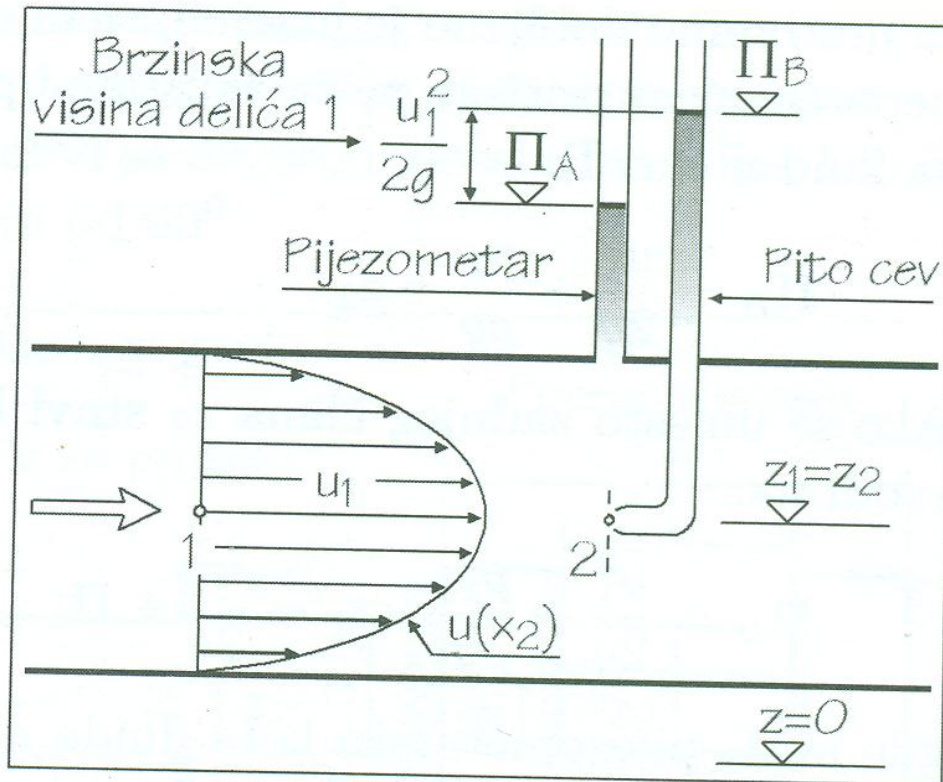
Prikazivanje pritiska i brzine  
odgovarajućim visinama  
(brzinska visina, visina pritiska)  
položajna, piježometarska i  
energetska kota.  
Piježometarska linija i linija energije

U fluidnu struju je u isti presek postavljena piježometarska cev i tzv. Pitoova cev. Pitot je svoju cev upotrebio 1732. god u reci Seni. Konstrukciju koja spaja te dve cevi u celinu napravio je Prantl (Prandtl) 200 godina kasnije.

Pitova cev je savijena cevčica uronjena u struju tako da se njen krak sa suženim delom postavi u pravcu brzine pa je brzina upravljena normalno na otvor na početku kraka.

# Pito i Pito-Prantlova cev

- Na slici je prikazan fluidni delić koji ima brzinu  $u_1$ . Na njegovom putu, neposredno nizvodno, nalazi se otvor savijene cevi A u kojoj svi fluidni delići stoje. Kada delić 1 dođe do tačke 2, njegova brzina naglo pada sa  $u_1$  na nulu.



Prema Bernulijevoj jednačini povećanje brzine delića je moguće samo na račun smanjenja potencijalne energije i obrnuto.

U preseku (1) su neporemećene vrednosti brzine  $u$  i piježometarske kote  $\Pi$ , dok je u preseku (2) brzina  $u_2=0$  (zaustavljeno je strujanje) a piježometarska kota je  $\Pi_B$ .

Sada će se napisati energetska jednačina za tačke 1 i 2, koje se nalaze na istoj strujnoj liniji koja se poklapa sa osovinom cevi

$$\Pi_1 + \frac{u_1^2}{2g} = \Pi_2 + \frac{u_2^2}{2g} + E_{izg} \quad E_{izg} \cong 0$$

jer su tačke 1 i 2 blizu pa se gubitak energije može zanemariti

$$\Pi_1 = \Pi_{stat} = \Pi \quad \Pi_B = \Pi_{din} \quad u_2 = 0 \quad u_1 = u$$

$$\Pi - \Pi_{din} = \frac{u^2}{2g} = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g} \quad \Pi = \Pi_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g}$$

$$\Delta p = p_u = \frac{\rho u^2}{2} - \text{zaustavni pritisak} \quad \Pi_{din} = \Pi_B = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

Iz jednačine se vidi da je brzinska visina za strujnu liniju za kotu otvora Pitove cevi, jednaka razlici kota koju pokazuju Pito i Pijezo cevi. To je ujedno i fizičko opravdanje za naziv brzinska visina.

Dinamička kota  $\Pi_{din}$ , koju pokazuje Pitova cev odnosi se na jednu strujnu liniju, tj. na jednu strujnu tačku u preseku. U našim zadacima međutim radi se o veličinama koje važe za ceo presek, kao što su  $\Pi$  ili  $v$ . Za ceo presek:

$$E = \Pi + \frac{v^2}{2g}$$



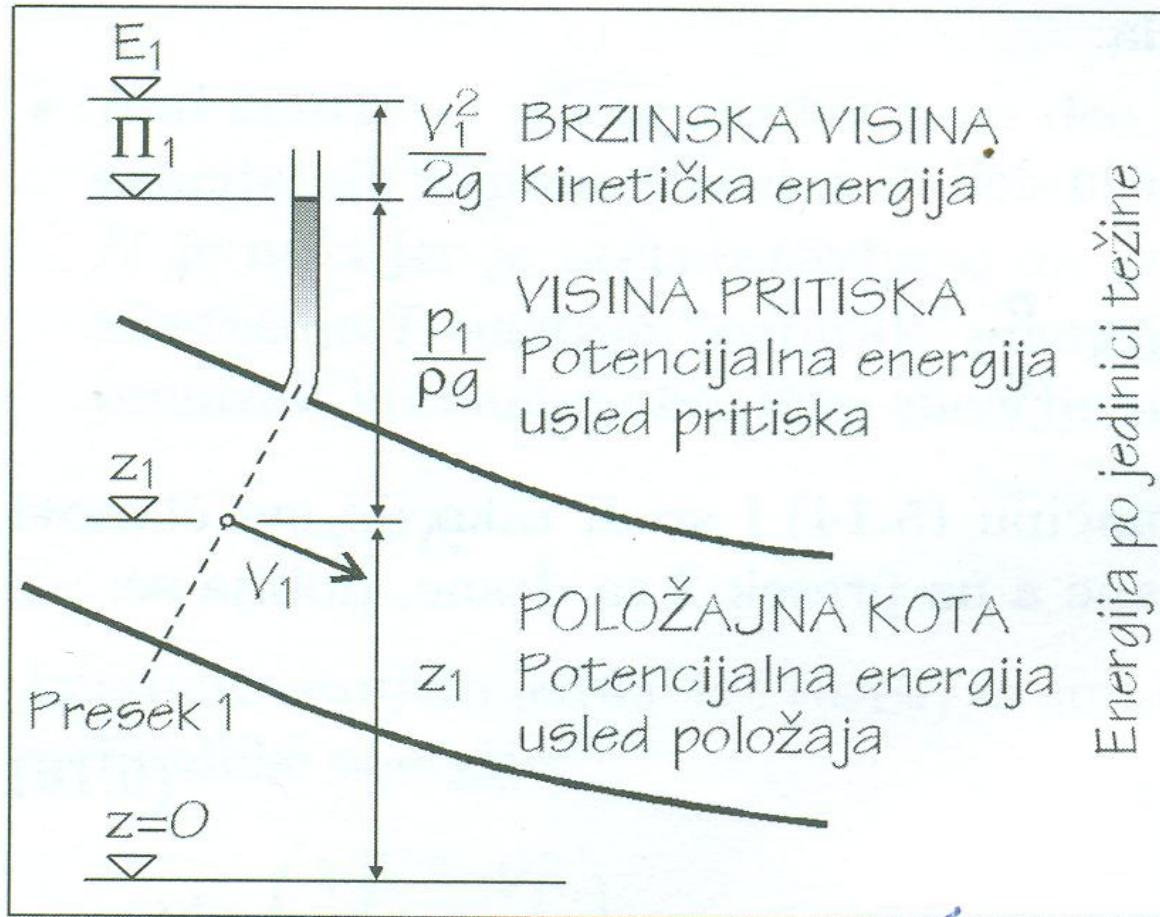
$$\frac{v^2}{2g} = E - \Pi$$

=brzinska visina izražena preko srednje brzine  $v$  i važi za ceo presek

Može se izmeriti nadvišenje u Pito cevi i sa time je izmerena brzina. Ovo je jedan od načina merenja brzine.



Ukupna energija u jednom preseku je zbir potencijalne i kinetičke energije





**Pijezometarska linija** spaja pijezometarske kote za različite preseke duž struje.

**Linija energije** spaja energetske kote za različite preseke duž struje.

Energetska linija niz struju stalno opada, a pijezometarska linija može i da raste ako brzina opada.

Ako je pijezometarska kota ispod preseka, pritisak je u tom preseku manji od atmosferskog.

Pijezometarska kota se poklapa sa položajnom kotom, kada je pritisak jednak nuli.

Pijezometarska i energetska kota se poklapaju ako je brzina jednaka nuli.

# PIJEZOMETARSKA I ENERGETSKA LINIJA ZA IDEALAN FLUID PRI NAGLOM SUŽENJU I PROŠIRENJU CEVI

