ћи опште рјешење једначине:

$$e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}+(e^{2y}-e^{x+y})u_y=0$$

Рјешење:

$$\left.\begin{array}{l} a=e^{2x}\\ b=e^{x+y}\\ c=e^{2y}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = e^{2x+2y}-e^{2x+2y}=0 \Rightarrow \text{једначина је параболичког типа}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{x+y}}{e^{2x}}=\frac{e^{y}}{e^{x}}$$

$$e^{-y}dy=e^{-x}dx$$

$$-e^{-y}=-e^{-x}+c$$

$$\xi=c=e^{-x}-e^{-y}$$

Дакле, смјена је $\xi=e^{-x}-e^{-y}$, $\eta=\psi(x,y)$, гдје је ψ произвољна функција таква да је смјена регуларна. Нека је $\psi(x,y)=e^{-y}$. Провјеримо регуларност смјене.

$$\xi_x=-e^{-x},\ \xi_y=e^{-y}$$

$$\eta_x=0,\ \eta_y=-e^{-y}$$

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix} -e^{-x} & e^{-y}\\ 0 & -e^{-y}\end{vmatrix}=e^{-x-y}\neq 0 \Rightarrow \text{Смјена је регуларна.}$$

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=-e^{-x}u_\xi$$

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=e^{-y}u_\xi-e^{-y}u_\eta$$

$$u_{xx}=e^{-x}u_\xi-e^{-x}(u_{\xi\xi}\xi_x+u_{\xi\eta}\eta_x)=e^{-2x}u_{\xi\xi}+e^{-x}u_\xi$$

$$u_{xy}=-e^{-x}(u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\eta_y)=-e^{-x-y}u_{\xi\xi}+e^{-x-y}u_{\xi\eta}$$

$$u_{yy}=-e^{-y}u_\xi+e^{-y}(u_{\xi\xi}\xi_y+u_{\xi\eta}\eta_y)+e^{-y}u_\eta-e^{-y}(u_{\eta\xi}\xi_y+u_{\eta\eta}\eta_y)=$$

$$=e^{-2y}u_{\xi\xi}-2e^{-2y}u_{\xi\eta}+e^{-2y}u_{\eta\eta}-e^{-y}u_\xi+e^{-y}u_\eta$$

Уврштавањем у почетну једначину добијамо

$$u_{\xi\xi}+e^x u_\xi-2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}-e^y u_\xi+e^y u_\eta+e^y u_\xi-e^y u_\eta-e^x u_\xi+e^x u_\eta=0$$

$$u_{\eta\eta}+e^x u_\eta=0$$

Ријешимо добијену једначину.

$$\left.\begin{aligned}\xi&=e^{-x}-e^{-y}\\ \eta&=e^{-y}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi+\eta=e^{-x} \Rightarrow e^x=\frac{1}{\xi+\eta}$$

Нека је $u(\xi,\eta)=\vartheta(\eta)$. Једначина постаје

$$\vartheta'+\frac{\vartheta}{\xi+\eta}=0$$

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta}=-\frac{d\eta}{\xi+\eta}$$

$$\vartheta=c(\xi+\eta)^{-1}$$

$$u_\eta(\xi,\eta)=c(\xi)(\xi+\eta)^{-1}$$

$$u(\xi,\eta)=-c(\xi)(\xi+\eta)^{-2}+c_1(\xi)$$

$$u(x,y)=-c\left(e^{-x}-y^{-y}\right)\left(e^{-x}-e^{-y}+e^{-y}\right)^{-2}+c_1\left(e^{-x}-e^{-y}\right)$$

$$u(x,y)=-e^{2x}c\left(e^{-x}-e^{-y}\right)+c_1\left(e^{-x}-e^{-y}\right)$$

гдје су $c, c_1 \in C^2(\mathbb{R})$.

3. Свести на канонски облик једначину:

$$u_{xx} - 2\sin x\, u_{xy} - \cos^2 x\, u_{yy} - \cos x\, u_y = 0$$

Решење:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -\sin x \\ c = -\cos^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta = b^2 - ac = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$$ Једначина је хиперболичког типа.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x \pm 1}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x - 1 \quad \wedge \quad \frac{dy}{dx} = -\sin x + 1$$

$$dy = -(\sin x + 1)\,dx \qquad dy = (1 - \sin x)\,dx$$

$$y = \cos x - x + c \qquad y = x + \cos x + c$$

$$\xi = y + x - \cos x \qquad \eta = y - x - \cos x$$

Проверимо регуларност смене.

$$\xi_x = 1 + \sin x, \quad \xi_y = 1$$

$$\eta_x = -1 + \sin x, \quad \eta_y = 1$$

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1+\sin x & 1 \\ -1+\sin x & 1 \end{vmatrix} = 1 + \sin x + 1 - \sin x = 2 \neq 0 \Rightarrow$$ Смена је регуларна.

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = (1+\sin x)u_\xi + (-1+\sin x)u_\eta$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta$$

$$u_{xx} = \cos x\, u_\xi + (1+\sin x)(u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) + \cos x\, u_\eta + (-1+\sin x)(u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x) =$$

$$= (1+\sin x)^2 u_{\xi\xi} + 2(-1+\sin x)(1+\sin x)u_{\xi\eta} + (-1+\sin x)^2 u_{\eta\eta} + \cos x\, u_\xi + \cos x\, u_\eta$$

$$u_{xy} = (1+\sin x)(u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y) + (-1+\sin x)(u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) =$$

$$= (1+\sin x)u_{\xi\xi} + 2\sin x\, u_{\xi\eta} + (-1+\sin x)u_{\eta\eta}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y + u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$$

Уврштавањем у једначину добијамо:

$$(1+\sin x)^2 u_{\xi\xi} + 2(\sin^2 x - 1)u_{\xi\eta} + (-1+\sin x)^2 u_{\eta\eta} + \cancel{\cos x\, u_\xi} + \cancel{\cos x\, u_\eta} -$$

$$- 2\sin x(1+\sin x)u_{\xi\xi} - 4\sin^2 x\, u_{\xi\eta} - 2\sin x(-1+\sin x)u_{\eta\eta} - \cos^2 x\, u_{\xi\xi} - 2\cos^2 x\, u_{\xi\eta} - \cos^2 x\, u_{\eta\eta}$$

$$- \cancel{\cos x\, u_\xi} - \cancel{\cos x\, u_\eta} = 0$$

$$u_{\xi\xi}\left(1+\cancel{2\sin x}+\sin^2 x-\cancel{2\sin x}-2\sin^2 x-\cos^2 x\right)+u_{\xi\eta}\left(2\sin^2 x-1-4\sin^2 x-2\cos^2 x\right)+$$

$$+u_{\eta\eta}\left(1-\cancel{2\sin x}+\sin^2 x+\cancel{2\sin x}-2\sin^2 x-\cos^2 x\right)=0$$

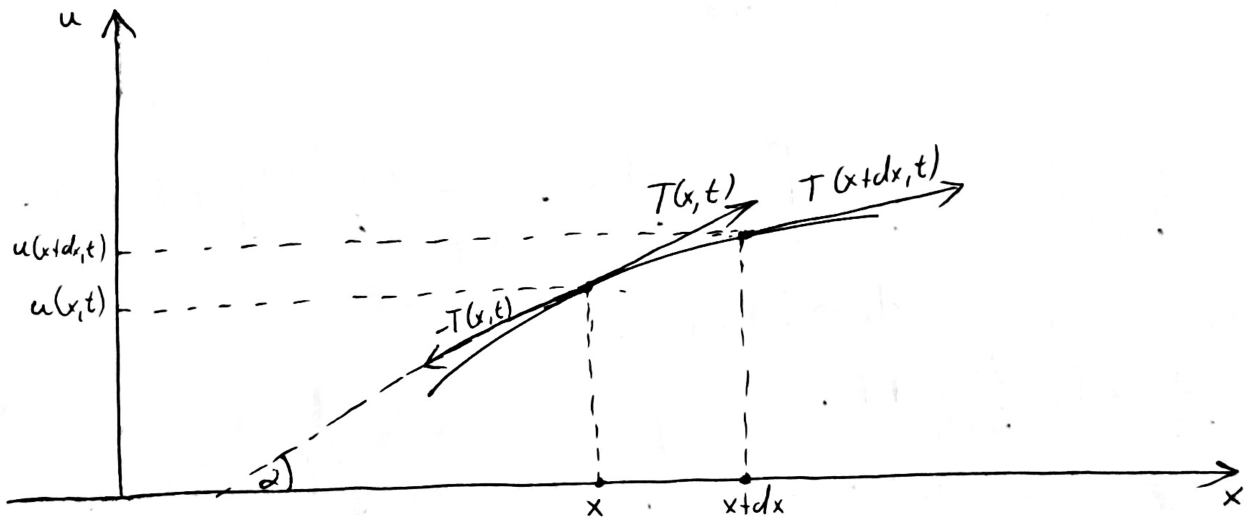
$$(1-\sin^2 x-\cos^2 x)u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}(-2-2\sin^2 x-2\cos^2 x)+u_{\eta\eta}(1-\sin^2 x-\cos^2 x)=0$$

$$-4u_{\xi\eta}=0$$

$$\underline{u_{\xi\eta}=0}$$

Једначина треперења струне

Струном називамо затегнуту нит, која се не опире извијању.
Нека у равни (x,u) струна прави мала треперења, око свог положаја равнотеже који се поклапа са осом Ox. Удаљеност струне од положаја равнотеже у тачки x и у тренутку t означимо са $u(x,t)$. Дакле, $u=u(x,t)$ ће бити једначина струне у тренутку t. Ограничићемо разматрање на мала треперења струне, па ћемо занемарити величине вишег реда од $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$



Пошто се струна не опире савијању, њена напетост $T(x,t)$ у тачки x у моменту t је усмјерена по тангенти на струну у тачки x. Како произвољни одсјечак струне (a,b) не мијења своју дужину након отклањања из положаја равнотеже (у оквиру нашег приступа), важи:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx \approx b-a$$

и, по Хуковом закону, дужина вектора напетости $|T(x,t)|$ не зависи од x и t, $|T(x,t)|=T_0$. Означимо са $F(x,t)$ спољне силе које дјелују на струну у тачки x у моменту t, нормално на осу Ox у равни (x,u). Даље, нека је $\rho(x)$ густина струне у тачки x, тј. нека је $\rho(x)dx$ маса одсјечка струне $(x, x+dx)$.

Формирајмо једначину треперења струне. На њен одсјечак $(x, x+dx)$ дјелују силе натезања $T(x+dx,t)$, $-T(x,t)$ и спољне силе. По закону Њутна, сума свих сила мора бити једнака производу масе тог одсјечка и његовог убрзања. Пројектујући ову векторску једнакост на осу Ou, из претходних разматрања добијамо

$$T_0 \sin\alpha(x+dx,t) - T_0 \sin\alpha(x,t) + F(x,t)dx = \rho(x)dx \, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Даље, будући да разматрамо мала треперења, важи

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

па је

$$\rho \, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T_0 \, \frac{1}{dx}\left[\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + F(x,t).$$

Одавде, узимајући $dx \to 0$, добијамо

$$\rho \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F.$$

Ово је једначина треперења струне. Ако је густина струне константна, тј. $\rho(x) = \rho$, једначина постаје

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

гдје је $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho}$, $a^2 = \dfrac{T_0}{\rho}$.

Хиперболичке једначине

Посматрамо једнодимензиону таласну једначину

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x,t)$$

са почетним условима

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) \quad , \varphi\in C^2(\mathbb{R}),\ \psi\in C^1(\mathbb{R})$$

на области $\Omega=\{(x,t)\mid x\in\mathbb{R},\ t\geq 0\}$.

Рјешење је

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-at+a\vartheta}^{x+at-a\vartheta}F(w,\vartheta)\,dw\,d\vartheta \quad \left(\text{Даламберова формула}\right)$$

1. Ријешити једначину

$$u_{xx}=u_{xx}+6$$

$$u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=4x,\quad x\in\mathbb{R}$$

на области $\Omega=\{(x,t)\mid x\in\mathbb{R},\ t\geq 0\}$.

Рјешење:

$$\varphi(x)=x^2,\ \psi(x)=4x,\ F(x,t)=6,\ a=1$$

$$u(x,t)=\frac{(x+t)^2+(x-t)^2}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}4s\,ds+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-at+a\vartheta}^{x+at-a\vartheta}6\,dw\,d\vartheta$$

$$u(x,t)=\frac{x^2+2xt+t^2+x^2-2xt+t^2}{2}+s^2\Big|_{x-t}^{x+t}+3\int_0^t w\Big|_{x-at+a\vartheta}^{x+at-a\vartheta}d\vartheta$$

$$u(x,t)=x^2+t^2+x^2+2xt+t^2-x^2+2xt-t^2+3\int_0^t(2t-2\vartheta)\,d\vartheta$$

$$u(x,t)=x^2+t^2+4xt+3\left(2t\vartheta-\vartheta^2\right)\Big|_0^t$$

$$u(x,t)=x^2+4xt+4t^2$$

$$u(x,t)=(x+2t)^2$$

2. Доказати да рјешење Кошијевог задатка

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$

на скупу $\Omega = \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ задовољава

а) $u(0,t) = 0$, $t \geq 0$, ако су φ и ψ непарне.

б) $u_x(0,t) = 0$, $t \geq 0$, ако су φ и ψ парне.

Рјешење:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$$

$$u_x(x,t) = \frac{\varphi'(x+at) + \varphi'(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left(\psi(x+at) - \psi(x-at)\right)$$

а) $$u(0,t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(s)ds$$

$$u(0,t) = \frac{\varphi(at) - \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(s)ds$$

$u(0,t) = 0$

б) $$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left(\psi(at) - \psi(-at)\right)$$

Како је је φ парна функција, то је

$\varphi(-x) = \varphi(x)$

Одавде је

$-\varphi'(-x) = \varphi'(x)$

$\varphi'(-x) = -\varphi'(x)$

Дакле, φ' је непарна функција.

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(at) - \varphi'(at)}{2} + \frac{1}{2a} \left(\psi(at) - \psi(at)\right)$$

$u_x(0,t) = 0$

3. Ријешити:

a) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $\Omega=\{(x,t)\mid x>0, t>0\}$

$u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, $x>0$

$u(0,t)=0$, $t>0$

Рјешење:

Рјешење датог проблема на области $\Omega=\{(x,t)\mid x\in\mathbb{R}, t>0\}$ је дато Даламберовом формулом, па ћемо продужити функције φ и ψ на $\mathbb{R}$. Како би услов $u(0,t)=0$, $t>0$ био испуњен, продужење мора бити непарно. Дакле, разматрамо проблем:

$$v_{tt}=a^2v_{xx}, \quad \Omega=\{(x,t)\mid x>0, t>0\}$$

$$v(x,0)=F(x),\ v_t(x,0)=G(x),\ x\in\mathbb{R}$$

$$F(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0\\ -\varphi(-x), & x<0\end{cases}, \quad G(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ -\psi(-x), & x<0\end{cases}$$

Рјешење овог проблема је

$$v(x,t)=\frac{F(x+at)+F(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}G(s)\,ds$$

1) $x-at\geq 0$, $\frac{x}{a}\geq t$

$$v(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)\,ds$$

2) $x-at<0$, $x+at\geq 0 \Rightarrow -t\leq\frac{x}{a}<t$

$$v(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(-x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0}-\psi(-s)\,ds+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\psi(s)\,ds$$

$$v(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(-x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(s)\,ds$$

3) $x+at<0 \Rightarrow \frac{x}{a}<-t$

$$v(x,t)=\frac{-\varphi(-x-at)-\varphi(-x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}-\psi(-s)\,ds$$

$$v(x,t)=\frac{-\varphi(-x-at)-\varphi(-x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{-x+at}^{-x-at}\psi(s)\,ds$$

Рјешење нашег почетног проблема је рестрикција ϑ на
$\Omega=\{(x,t)\mid x>0, t>0\}$, односно

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds, & \frac{x}{a}\geq t\\ \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)-\varphi(-x+at)\right)+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(s)ds, & 0\leq\frac{x}{a}<t\end{cases}$$

d) $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $\Omega=\{(x,t)\mid x>0, t>0\}$

$u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, $x>0$

$u_x(0,t)=0$, $t>0$

Рјешење:

Као у претходном задатку, морамо продужити функције φ и ψ на $\mathbb{R}$. Због услова $u_x(0,t)=0, t>0$, продужење мора бити парно.
Дакле, рјешавамо проблем

$$\vartheta_{tt}=a^2\vartheta_{xx},\quad \Omega=\{(x,t)\mid x\in\mathbb{R}, t>0\}$$

$$\vartheta(x,0)=F(x),\quad \vartheta_t(x,0)=G(x),\ x\in\mathbb{R}$$

$$F(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x>0\\ \varphi(-x), & x<0\end{cases},\quad G(x)=\begin{cases}\psi(x), & x>0\\ \psi(-x), & x<0\end{cases}$$

Рјешење овог проблема је:

$$\vartheta(x,t)=\frac{F(x+at)+F(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}G(s)ds$$

1) $x-at\geq 0$, $\frac{x}{a}\geq t$

$$\vartheta(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

2) $x-at<0$, $x+at\geq 0$, $-t\leq\frac{x}{a}<t$

$$\vartheta(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(-x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{0}\psi(-s)ds+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at}\psi(s)ds$$

$$\vartheta(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(-x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{at-x}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at}\psi(s)ds$$

3) $x+at<0$, $\frac{x}{a} < -t$

$$\vartheta(x,t) = \frac{\varphi(-x-at)+\varphi(-x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds$$

$$\vartheta(x,t) = \frac{\varphi(-x-at)+\varphi(-x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at-x}^{at-x} \psi(s)\,ds$$

Рјешење нашег почетног проблема је рестрикција ϑ на $\Omega = \{(x,t) \mid x>0, t>0\}$, односно

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)\,ds, & \frac{x}{a} \geq t \\ \frac{1}{2}\left(\varphi(x+at)+\varphi(-x+at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{0}^{at-x} \psi(s)\,ds + \frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at} \psi(s)\,ds, & 0 \leq \frac{x}{a} < t \end{cases}$$