Naizmjenične struje

Osnovni pojmovi

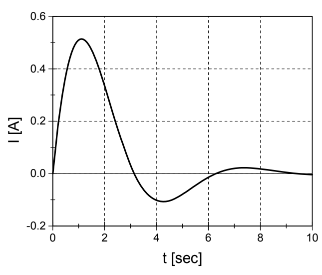
Pojam i klasifikacija naizmjeničnih struja

Naizmjenične struje su električne struje koje tokom vremena menjaju smjer

Klasifikacija naizmenicnih struja prema vremenskoj zavisnosti jacine struje

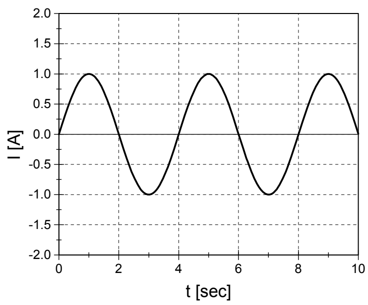
- Naizmenicne struje
  - Aperiodicne
  - Periodicne
    - Slozenoperiodicne
    - Prostoperiodicne

Pojam i klasifikacija naizmjeničnih struja



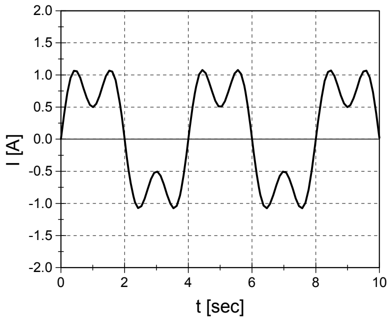
aperiodična naizmjenična struja

Pojam i klasifikacija naizmeničnih struja



prostoperiodična naizmjenična struja

Pojam i klasifikacija naizmeničnih struja



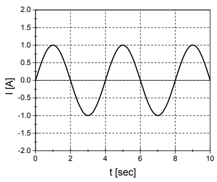
složenoperiodična naizmjenična struja

Prostoperiodične naizjmenične struje

Prostoperiodične naizmjenične struje su električne struje kod kojih jačina struje harmonijski osciluje

$$\boxed{i = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = I_0 \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)}$$

$$\boxed{i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(2\pi f \cdot t + \varphi)}$$

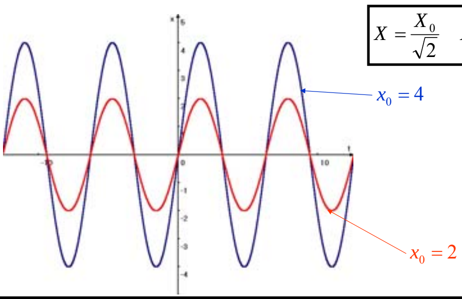


- I_0 – amplituda
- I – efektivna vrednost
- ω – kružna frekvencija (kružna učestanost)
- f – frekvencija (učestanost)
- φ – početna faza

Prostoperiodične veličine

- Amplituda i efektivna vrednost
  - mjera ekstremnih vrednosti veličine

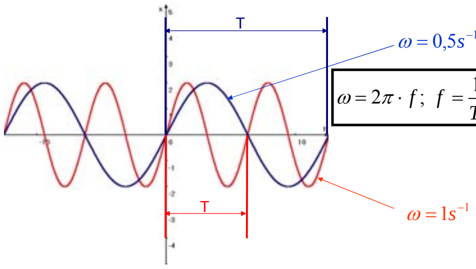
$$\boxed{X = \frac{X_0}{\sqrt{2}} \quad X_0 = X\sqrt{2}}$$



Prostoperiodične veličine

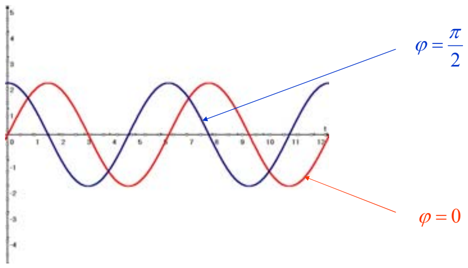
- Učestanost i kružna učestanost
  - mjera perioda ponavljanja promena

$$\boxed{\omega = 2\pi \cdot f;\ f = \frac{1}{T};\ \omega = \frac{2\pi}{T}}$$



Prostoperiodične veličine

- Početna faza
  - pokazuje položaj sinusoide duž vremenske



4. Naizmjenične struje

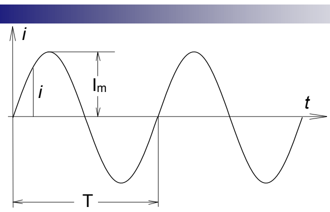
4.1 Prostoperiodične harmonijske veličine i njihove osnovne karakteristike

$$\boxed{i(t) = i(t+T) \quad ; \quad \mathrm{e(t) = e(t+T) \;\; i \;\; u(t) = u(t+T)}}$$

Veličina **T** naziva se ***perioda*** periodične funkcije – to je vremenski interval poslije koga se funkcija ponavlja.

Naizmjenična struja (napon, ems) karakteriše se :

- trenutnom vrijednošću i (u, e),
- maksimalnom vrijednošću (amplitudom) Im, Em, Um,
- trajanjem punog ciklusa (periodom) T ili brojem perioda u jedinici vremena (učestanošću, frekvencijom) f.

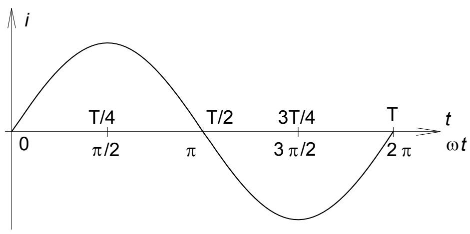


$$f = \frac{1}{T}$$

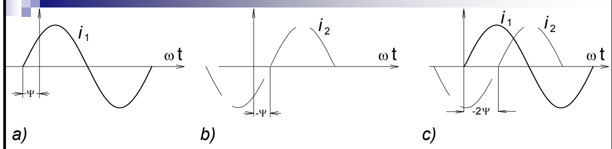
Očigledno je da je jedinica za učestanost 1/sec. Ova jedinica ima poseban naziv ***–jedan herc (1Hz; 1Hz (=) 1/s).***

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \; \left[\mathrm{s}^{-1}\right]$$ kružna učestanost

$$\boxed{\mathrm{i} = \mathrm{I_m} \sin \omega t}$$



Naizmjenična struja u funkciji ugla i vremena



Dvije struje fazno pomjerene predstavljene u:
a) i b) Različitim koordinantnim sistemima;
c) Istom koordinantnom sistemu.

$$\mathrm{i} = \mathrm{I_m} \sin(\omega t + \varphi)$$

4.2 Srednja i efektivna vrijednost naizmjenične veličine

$$\frac{1}{T}\int_0^T i\,dt = 0$$

$$I_{sr} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} i\,dt = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_m \sin(\omega t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} I_m \sin(\omega t)\,d(\omega t) =$$

$$= -\frac{1}{\pi} I_m \left|\cos(\omega t)\right|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} I_m \left|\cos(\omega t)\right|_{\pi}^{0} = \frac{2}{\pi} I_m$$

$$\boxed{\mathrm{I_{sr}} = \frac{2}{\pi}\mathrm{I_m} \qquad \mathrm{U_{sr}} = \frac{2}{\pi}\mathrm{U_m} \qquad \mathrm{E_{sr}} = \frac{2}{\pi}\mathrm{E_m}}$$

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \int_0^T \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right] dt} = \sqrt{\frac{1}{T} I_m^2 \frac{1}{2} T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\mathrm{I} = \frac{\mathrm{I_m}}{\sqrt{2}} \qquad \mathrm{U} = \frac{\mathrm{U_m}}{\sqrt{2}} \qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{E_m}}{\sqrt{2}}}$$

$\boxed{P = RI^2}$ $\boxed{P = U^2/R}$

Naizmjenične struje

Opisivanje prostoperiodičnih veličina

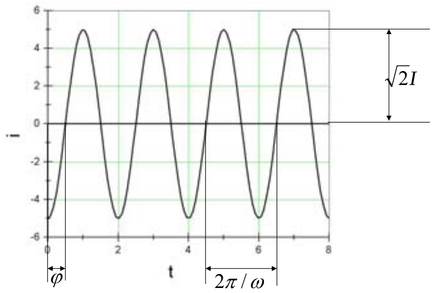
Metodi opisivanja

- Zadatak:
  - omogućiti efikasno rešavanje električnih kola
  - omogućiti efikasno proučavanje oscilatornih sistema
- Prostoperiodična veličina
  - amplituda (efektivna vrijednost)
  - učestanost (kružna učestanost)
  - početna faza
- U kolima prostoperiodične struje sve veličine imaju istu frekvenciju
  - amplituda (efektivna vrijednost)
  - početna faza
- Metodi opisivanja
  - vremenski (trigonometrijski)
  - fazorski (geometrijski)
  - kompleksni (aritmetički)

Vremensko opisivanje

- Analitički prikaz trigonometrijskim funkcijama

$$\boxed{i(t) = \sqrt{2}\cdot I\cdot \sin(\omega\cdot t - \varphi)}$$



Vremensko opisivanje

- Primjer: sabiranje dvije prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$i_1(t) = \sqrt{2}\cdot I_1\cdot \sin(\omega\cdot t + \varphi_1)$$
$$i_2(t) = \sqrt{2}\cdot I_2\cdot \sin(\omega\cdot t + \varphi_2)$$
$$\longrightarrow$$
$$i = i_1 + i_2(t)$$
$$i = \sqrt{2}\cdot I\cdot \sin(\omega\cdot t + \varphi)$$

$$i_2(t) + i_2(t) = \sqrt{2}\cdot (I_1\cdot \sin(\omega\cdot t + \varphi_1) + I_2\cdot \sin(\omega\cdot t + \varphi_2)) =$$
$$= \sqrt{2}\cdot (I_1\cdot [\sin(\omega\cdot t)\cos(\varphi_1) + \cos(\omega\cdot t)\sin(\varphi_1)] +$$
$$+ I_2\cdot [\sin(\omega\cdot t)\cos(\varphi_2) + \cos(\omega\cdot t)\sin(\varphi_2)]) =$$
$$= \sqrt{2}\cdot \{[I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2)]\sin(\omega\cdot t) + [I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2)]\cos(\omega\cdot t)\}$$
$$= \sqrt{2}\cdot \{[I\cdot \cos(\varphi)]\cdot \sin(\omega\cdot t) + [I\cdot \sin(\varphi)]\cos(\omega\cdot t)]\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I\cos(\varphi) &= I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2) \\ I\sin(\varphi) &= I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2) \end{aligned}}$$

Vremensko opisivanje

- Primer: sabiranje dvije prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$\boxed{\begin{aligned} I\cos(\varphi) &= I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2) \\ I\sin(\varphi) &= I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2) \end{aligned}}$$

$$I^2 = [I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2)]^2 + [I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2)]^2$$

$$I = \sqrt{[I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2)]^2 + [I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2)]^2}$$

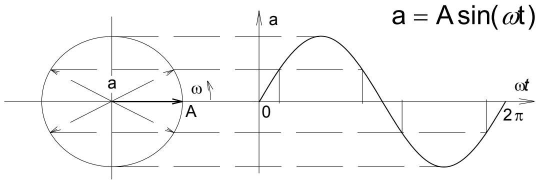
$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2)}{I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2)}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2)}{I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2)}\right)$$

Vremensko opisivanje

- Prednosti
  - jasan fizički smisao dobijenih rezultata
- Nedostaci
  - sporo
  - podložno greškama

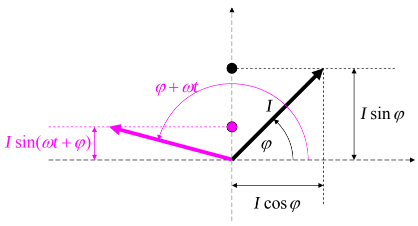
4.3 Predstavljanje naizmjeničnih veličina obrtnim vektorima-fazorima

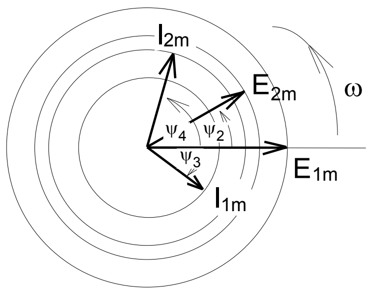


Predstavljanje harmonijske oscilacije obrtnim vektorom.

Fazorsko opisivanje

- Grafički prikaz vektorima
- Fazor je vektor koji:
  - ima napadnu tačku u koordinatnom početku
  - se okreće konstantnom ugaonom brzinom ω oko koordinatnog početka





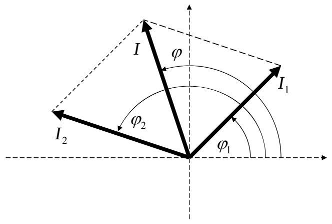
$$e_1 = E_{1m}\sin(\omega t + 0);\quad e_2 = E_{2m}\sin(\omega t + \psi_2);$$
$$i_1 = I_{1m}\sin(\omega t - \psi_3);\quad i_2 = I_{2m}\sin(\omega t + \psi_4).$$

Fazorsko opisivanje

- Primjer: sabiranje dve prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1)$$
$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2) \longrightarrow$$

$$i = i_1 + i_2(t)$$
$$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= I_{1x} + I_{2x} \\ I_y &= I_{1y} + I_{2y} \end{aligned}}$$

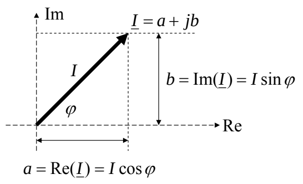
$$\boxed{\begin{aligned} I\cos(\varphi) &= I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2) \\ I\sin(\varphi) &= I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2) \end{aligned}}$$

Fazorsko opisivanje

- Prednosti
  - brzo
- Nedostaci
  - ne uočava se fizička veza sa veličinama koje se proučavaju
  - crtež može da bude prenatrpan
  - problematično je precizno crtanje kada se crtane veličine mnogo razlikuju po redu veličine
  - ne uočava se lako međusobna zavisnost veličina

Kompleksno opisivanje

- Prikaz fazora kompleksnim brojevima



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{I} &= a + jb \\ a &= I \cdot \cos\varphi \\ b &= I \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$$

$$\boxed{\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \mathrm{tg}\,\varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned}}$$

4.4 Predstavljanje naizmjeničnih veličina kompleksnim veličinama

Da bi se objasnio ovaj metod, valja se prvo podsjetiti da je opšti oblik ***kompleksnog broja***

$$\underline{Z} = R + jX \qquad \boxed{j = \sqrt{-1}}$$

gdje je:
R – realna komponenta kompleksnog broja (realna osa)
X – imaginarna komponenta kompleksnog broja (imaginarna osa)

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi}$$ eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Veza između ova dva oblika je Ojlerov obrazac

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \qquad \underline{Z} = Z \cdot \cos\varphi + jZ \cdot \sin\varphi$$

$$R = \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = Z \cdot \cos\varphi \ \text{ i } \ X = \mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = Z \cdot \sin\varphi$$

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$ ***moduo kompleksnog broja***

$$\varphi = arctg\left(\frac{X}{R}\right)$$ ***argument kompleksnog broja***

$$\Theta = (\omega t + \varphi) \qquad \underline{z}(t) = |\underline{Z}| e^{j(\omega t+\varphi)} = Z e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi) \qquad \underline{e}(t) = E_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = j\omega E_m e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega \underline{e}$$

$$\int \underline{e}dt = \frac{1}{j\omega} E_m e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{1}{j\omega}\underline{e}$$

Kompleksno opisivanje

- Primer: sabiranje dvije prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$i_1(t) = \sqrt{2}\cdot I_1 \cdot \sin(\omega\cdot t + \varphi_1)$$
$$i_2(t) = \sqrt{2}\cdot I_2 \cdot \sin(\omega\cdot t + \varphi_2) \longrightarrow \quad i = i_1 + i_2(t), \quad i = \sqrt{2}\cdot I \cdot \sin(\omega\cdot t + \varphi)$$

$$\underline{I_1} = a_1 + jb_1 = I_1\cos\varphi_1 + j\cdot I_1\sin\varphi_1$$

$$\underline{I_2} = a_2 + jb_2 = I_2\cos\varphi_2 + j\cdot I_2\sin\varphi_2$$

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a + jb$$

$$I = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathrm{Re}(I) &= \mathrm{Re}(I_1) + \mathrm{Re}(I_2)\\ \mathrm{Im}(I) &= \mathrm{Im}(I_1) + \mathrm{Im}(I_2)\end{aligned}}$$

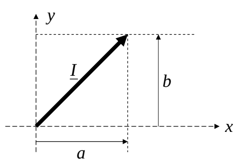
$$\boxed{\begin{aligned}I\cos(\varphi) &= I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2)\\ I\sin(\varphi) &= I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2)\end{aligned}}$$

Kompleksno opisivanje

- Prednosti
  - brzo
  - matematički jednostavno
  - lako se uočavaju zavisnosti među veličinama
- Nedostaci
  - kompleksni broj u algebarskom obliku nema direktno fizičko objašnjenje

Transformacije opisa

- Transformacija kompleksnog oblika u fazorski oblik $\underline{I} = a + jb$
  - realni dio kompleksnog broja je x projekcija fazora
  - imaginarni dio kompleksnog broja je y projekcija fazora



Transformacije opisa

- Transformacija kompleksnog u vremenski

$$\underline{I} = a + jb$$

$$I = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.\sin(\omega t + \mathrm{arctg}\frac{b}{a})$$

Transformacije opisa

- Transformacija vremenskog u kompleksni

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = I \cdot \cos\varphi \quad b = I \cdot \sin\varphi$$

Ako se pođe od toga da je uvijek moguće odabrati toliko mali interval vremena posmatranja naizmjeničnih veličina i odnosa među njima, u kojem se te veličine mogu smatrati konstantnim (stalnim), tada nije neophodno dokazivati da svi algoritmi za rješavanje kola jednosmjerne struje važe i za kola za naizmjeničnu struju, ako se računa sa odgovarajućim trenutnim vrijednostima naizmjeničnih veličina, tj. važi i:

$$u = Ri; \quad \sum_{k=1}^{m} i_k = 0;$$

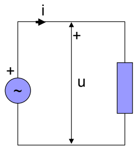
$$\sum_{i=1}^{m} u_i = 0; \quad p = ui.$$

Naizmjenične struje

Električna kola naizmjenične električne struje

Prosta kola naizmjenične struje

- Prosto kolo naizmjenične električne struje sastoji se od izvora naizmjenične električne struje i jednog potrošača



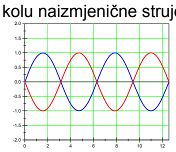
$u = U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta)$ $\quad i = I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\psi)$

- Odrediti vezu između napona na potrošaču i struje koja protiče kroz granu sa potrošačem
- Odrediti veze efektivnih vrednosti (U,I)
- Odrediti veze početnih faza (θ,ψ)

- Smisao referentnog smjera struje i napona u kolu naizmjenične struje

$i = I_0\cdot\sin(\omega t)$

$-i = -I_0\cdot\sin(\omega t) = I_0\cdot\sin(\omega t+\pi)$

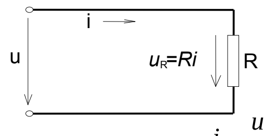


4.5.1 Otpornik u kolu naizmjenične struje

$u = U_m\sin(\omega t)$ $\qquad u_R = Ri$

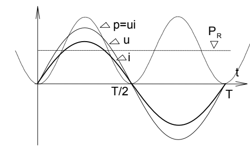
$u - u_R = 0$

$u = u_R = Ri$

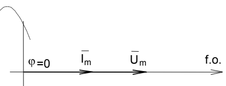


a)

$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R}\sin(\omega t) = I_m\sin(\omega t)$



b)



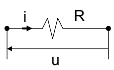
c)

$$p = ui = U_m\sin(\omega t)I_m\sin(\omega t) = \sqrt{2}U\sin(\omega t)\sqrt{2}I\sin(\omega t) =$$
$$= 2\mathrm{UI}\sin^2(\omega t) = UI2\sin^2(\omega t) = UI[(1-\cos(2\omega t)] =$$
$$= \mathrm{UI} - \mathrm{UI}\cos(2\omega t).$$

Prvi član u konačnom izrazu za trenutnu snagu predstavlja srednju, ili aktivnu, snagu , dok drugi član predstavlja periodičnu komponentu trenutne snage koja osciluje oko srednje vrijednosti dvostrukom učestanošću napajanja, pa je srednja vrijednost te komponente, za vrijeme T, jednaka nuli.

Prosto kolo sa otpornikom

- Vremensko opisivanje - analitički prikaz



$i_R = \frac{u_R}{R}$ $\qquad u_R = U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta)$

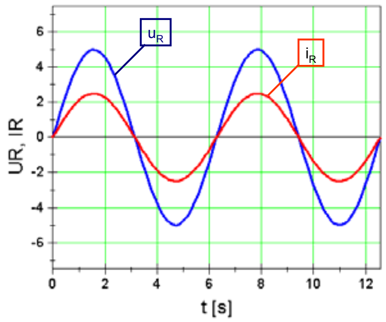
$i_R = \frac{1}{R}\left[U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta)\right] = \frac{U}{R}\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta)$

$i_R = I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\psi)$

$$\boxed{I = \frac{U}{R} \quad \psi = \theta}$$

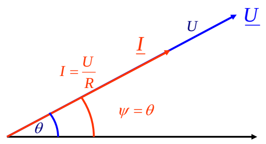
Prosto kolo sa otpornikom

- Vremensko opisivanje - grafički prikaz



Prosto kolo sa otpornikom

- Fazorsko opisivanje



Prosto kolo sa otpornikom

- Kompleksno opisivanje

$$u_C = U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta) \mapsto \underline{U} = u_1 + ju_2 = U\cos\theta + jU\sin\theta$$

$$i_C = I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\psi) \mapsto \underline{I} = i_1 + ji_2 = I\cos\psi + jI\sin\psi$$

$$\underline{I} = I\cos\psi + jI\sin\psi = \frac{U}{R}\cos\theta + j\frac{U}{R}\sin\theta$$

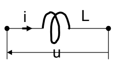
$$\underline{I} = \frac{1}{R}(U\cos\theta + jU\sin\theta)$$

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}}$$

$$\boxed{\underline{U} = R\underline{I}}$$

Prosto kolo sa kalemom

- Vremensko opisivanje – analitički prikaz



$$u_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad i_L = I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\psi)$$

$$u_L = L\frac{d}{dt}\left[I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\psi)\right] = LI\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t+\psi)\cdot\omega$$

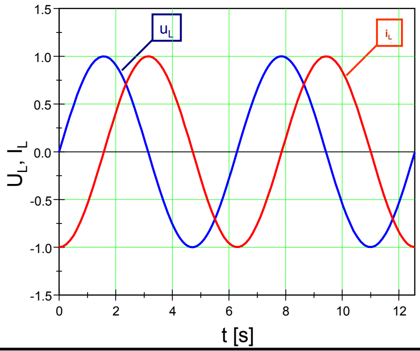
$$u_L = U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta)$$

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) \longrightarrow u_L = \omega LI\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\psi+\frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{\begin{array}{c} U = \omega LI \\ \theta = \psi + \frac{\pi}{2} \end{array}}$$

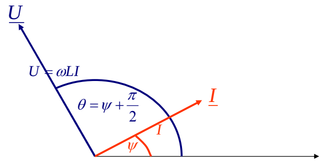
Prosto kolo sa kalemom

- Vremensko opisivanje - grafički prikaz



Prosto kolo sa kalemom

- Fazorsko opisivanje



Prosto kolo sa kalemom

- Kompleksno opisivanje

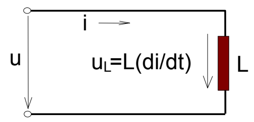
$$i_C = I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\psi)\mapsto \underline{I} = i_1 + ji_2 = I\cos\psi + jI\sin\psi$$
$$u_C = U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta)\mapsto \underline{U} = u_1 + ju_2 = U\cos\theta + jU\sin\theta$$

$$\underline{U} = U\cos\theta + jU\sin\theta = \omega LI\cos(\psi+\frac{\pi}{2}) + j\omega LI\sin(\psi+\frac{\pi}{2})$$
$$\underline{U} = -\omega LI\sin\psi + j\omega LI\cos\psi = j\omega L(I\cos\psi + jI\sin\psi)$$

$$\boxed{\underline{U} = j\omega L\underline{I}}$$

$$\boxed{\underline{I} = \frac{1}{j\omega L}\underline{U}}$$

4.5.2 Kalem u kolu naizmjenične struje



$$u = U_m\sin(\omega t)$$
$$u - u_L = 0$$
$$u_L = -e_L = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

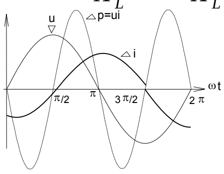
$$\boxed{U_m\sin(\omega t) = L\frac{di}{dt}} \qquad \boxed{di = \frac{1}{L}U_m\sin(\omega t)dt}$$

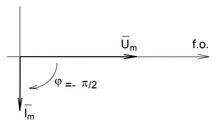
$$i = -\frac{1}{\omega L}U_m\cos(\omega t) = \frac{1}{\omega L}U_m\sin(\omega t - \pi/2) = I_m\sin(\omega t - \pi/2)$$

Proizvod ωL označava se sa X_L

i naziva se ***induktivnom otpornošću ili reaktansom***.

$$I_m = \frac{U_m}{X_L};\quad I = \frac{U}{X_L}\quad i\quad U = X_L I = -E_L$$

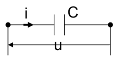




$$p_L = u_L i = U_m \sin(\omega t)\cdot\left[-I_m \cos(\omega t)\right] =$$
$$= -2UI \sin(\omega t)\cos(\omega t) = -UI \sin(2\omega t)$$

Prosto kolo sa kondenzatorom

- Vremensko opisivanje - analitički prikaz



$$i_C = C\frac{du_C}{dt}\qquad u_C = U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta)$$

$$i_C = C\frac{d}{dt}\left[U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta)\right] = CU\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t+\theta)\cdot\omega$$

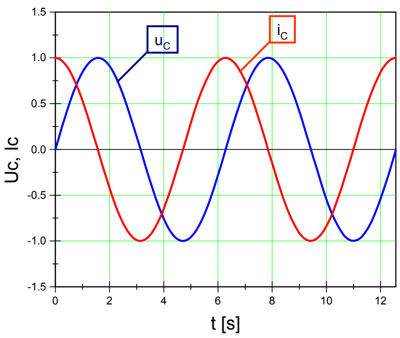
$$i_C = I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\psi)$$

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha+\frac{\pi}{2}) \longrightarrow i_C = \omega CU\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \omega CU \\ \psi &= \theta + \frac{\pi}{2}\end{aligned}}$$

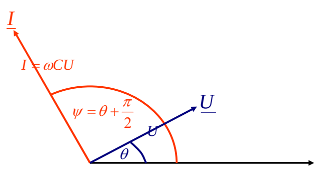
Prosto kolo sa kondenzatorom

- Vremensko opisivanje - grafički prikaz



Prosto kolo sa kondenzatorom

- Fazorski opisivanje



Prosto kolo sa kondenzatorom

- Kompleksno opisivanje

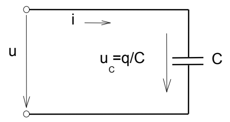
$$u_C = U\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\theta)\mapsto \underline{U} = u_1 + ju_2 = U\cos\theta + jU\sin\theta$$
$$i_C = I\sqrt{2}\cdot\sin(\omega t+\psi)\mapsto \underline{I} = i_1 + ji_2 = I\cos\psi + jI\sin\psi$$

$$\underline{I} = I\cos\psi + jI\sin\psi = \omega CU\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) + j\omega CU\sin(\theta+\frac{\pi}{2})$$
$$\underline{I} = -\omega CU\sin\theta + j\omega CU\cos\theta = j\omega C(U\cos\theta + jU\sin\theta)$$

$$\boxed{\underline{I} = j\omega C\underline{U}}$$

$$\boxed{\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}}$$

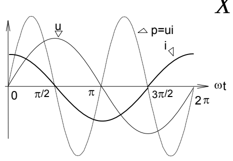
4.5.3 Kondenzator u kolu naizmjenične struje

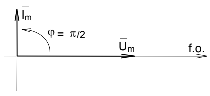


$$u = U_m\sin(\omega t)$$
$$u - u_c = 0$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{1}{C}i$$
$$i = C\frac{du}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[U_m\sin(\omega t)\right] = \omega CU_m\cos(\omega t)$$
$$i = I_m\sin(\omega t + \pi/2)$$
$$I_m = \omega CU_m = \frac{U_m}{1/\omega C} \quad i \quad I = \frac{U}{1/\omega C}$$

$$\frac{1}{\omega C} = X_C$$ ***kapacitivna otpornost ili kapacitivna reaktansa***

$$I_m = \frac{U_m}{X_c};\quad I = \frac{U}{X_c} \quad i \quad U = X_c I$$





$$p = ui = u_c i = UI\sin(2\omega t)$$

Prosta električna kola naizmjenične struje

- Veze između napona i struje potrošača

	Vremenski	Efektivne vrednosti	Fazni stav	Kompleksno
R	$u = Ri$	$U = RI$	$\theta = \psi$	$\underline{U} = R\underline{I}$
L	$u = L\frac{di}{dt}$	$U = \omega LI$	$\theta + \frac{\pi}{2} = \psi$	$\underline{U} = j\omega L\underline{I}$
C	$i = C\frac{du}{dt}$	$U = \frac{1}{\omega C}I$	$\theta = \psi + \frac{\pi}{2}$	$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}$

Impedansa

- Efektivne vrijednosti napona proporcionalne su efektivnim vrijednostima struje
- Slično propocionalnosti napona i struje kod jednosmjerne struje
- Odnos napona i struje ima ulogu otpornosti kod jednosmjerne struje

$$U = ZI$$

$$\boxed{Z = \frac{U}{I}} \qquad [Z] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{V}{A} = \Omega$$

Impedansa električnog elementa je odnos efektivnih vrijednosti napona i struje

$$\boxed{Z_R = \frac{U}{I} = R} \qquad \boxed{Z_C = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}} \qquad \boxed{Z_L = \frac{U}{I} = \omega L}$$

Impedansa električnog elementa zavisi od frekvencije naizmenične struje

Kompleksna impedansa

- Kompleksne vrijednosti napona proporcionalne su kompleksnim vrijednostima struje

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}} \qquad [\underline{Z}] = \frac{[\underline{U}]}{[\underline{I}]} = \frac{V}{A} = \Omega$$

Kompleksna impedansa električnog elementa je odnos kompleksnih vrijednosti napona i struje

$$\boxed{\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R} \quad \boxed{\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}} \quad \boxed{\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L}$$

Složena električna kola naizmjenične struje

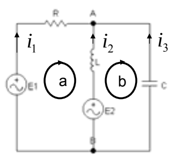
- Osnova za rješavanje električnih kola su Kirhofovi zakoni

Kirhofovi zakoni važe u svakom pojedinom trenutku
↓
Kirhofovi zakoni važe za trenutne vrijednosti
↓
Kirhofovi zakoni važe za početni trenutak
↓
Kirhofovi zakoni važe za fazore
↓
Kirhofovi zakoni važe za kompleksno prikazivanje

Kirhofovi zakoni ne važe za efektivne vrijednosti

Složena električna kola naizmjenične struje

- Primjer

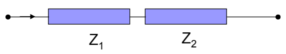


$$A:\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$
$$a:\ \underline{E}_1 - \underline{Z}_R\underline{I}_1 + \underline{Z}_L\underline{I}_2 - \underline{E}_2 = 0$$
$$b:\ \underline{E}_2 - \underline{Z}_L\underline{I}_2 + \underline{Z}_C\underline{I}_3 = 0$$

$$A:\ \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$
$$a:\ \underline{E}_1 - R\underline{I}_1 + j\omega L\underline{I}_2 - \underline{E}_2 = 0$$
$$b:\ \underline{E}_2 - j\omega L\underline{I}_2 - \frac{j}{\omega C}\underline{I}_3 = 0$$

Složena električna kola naizmjenične struje

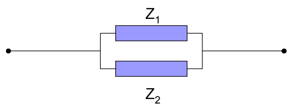
- Vezivanje impedansi
  - redno vezivanje



$$\underline{U}=\underline{U}_1+\underline{U}_2 \longrightarrow \boxed{\underline{Z}=\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}$$

$$\cancel{U=U_1+U_2} \longrightarrow \cancel{Z_1=Z_1+Z_2}$$

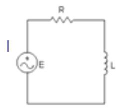
  - paralelno vezivanje



$$\underline{I}=\underline{I}_1+\underline{I}_2 \longrightarrow \boxed{\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}}$$

$$\cancel{I=I_1+I_2} \longrightarrow \cancel{\frac{1}{Z}=\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}}$$

Složena električna kola

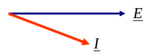


$E=220V \quad f=50\,Hz \quad \omega=314\,s^{-1} \quad R=100\Omega \quad L=100\,mH$

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \qquad \underline{Z}=\underline{Z}_R+\underline{Z}_L=R+j\omega L=(100+j31{,}4)\Omega$$

$$\underline{I}=\frac{\underline{U}}{\underline{Z}}=\frac{220\,V}{(100+j31{,}4)\Omega}=\frac{220}{100+j31{,}4}A\cdot\frac{100-j31{,}4}{100-j31{,}4}=\frac{22000-j6908}{100^2+(31{,}4)^2}A=\frac{22000-j6908}{10986}A$$

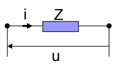
$$\underline{I}=(2-j0{,}63)A$$



$$I=\sqrt{2^2+0{,}63^2}\,A=2{,}1\,A \qquad Z=\frac{U}{I}=\frac{220V}{2{,}1\,A}=105\Omega$$

$$tg\psi=\frac{-0{,}63}{2}\Rightarrow\varphi=-17{,}5^0$$

Kompleksna impedansa potrošača

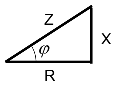


$$\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=z_1+jz_2=R+jX \longleftarrow \text{reaktansa}$$

$$\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=\frac{U(\cos\theta+j\sin\theta)}{I(\cos\psi+j\sin\psi)}=\frac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}}=\frac{U}{I}e^{j(\theta-\psi)}$$

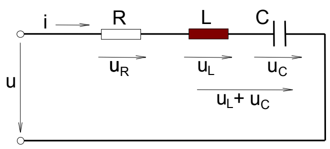
$$\underline{Z}=\frac{U}{I}e^{j(\theta-\psi)}=Ze^{j\varphi}=Z(\cos\varphi+j\sin\varphi)=R+jX$$

$$\boxed{\varphi=\theta-\psi} \quad \boxed{R=Z\cdot\cos\varphi} \quad \boxed{X=Z\cdot\sin\varphi}$$



Trougao impedanse $\quad \varphi_R=0 \quad \varphi_C=-\frac{\pi}{2} \quad \varphi_L=+\frac{\pi}{2}$

4.6 Potpuno prosto kolo naizmjenične struje



$$u-u_R-u_L-u_C=0$$

$$u=U_m\cos\omega t \qquad U_m\cos\omega t-Ri-L\frac{di}{dt}-u_C=0$$

$u_C=q/C$ i $i=dq/dt$

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=U_m\cos\omega t$$

$$q = q_m \sin(\omega t - \varphi)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega q_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 q_m \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\left[\frac{1}{C} - \omega^2 L\right] \sin(\omega t - \varphi) + \omega R \cos(\omega t - \varphi) = \frac{U_m}{q_m} \cos \omega t$$

$$\left\{\left[\frac{1}{C} - \omega^2 L\right] \cos\varphi + \omega R \sin\varphi\right\} \sin \omega t + \left\{\left[\omega^2 L - \frac{1}{C}\right] \sin\varphi + \omega R \cos\varphi\right\} \cos \omega t \equiv \frac{U_m}{q_m} \cos \omega t$$

$$\left[\frac{1}{C} - \omega^2 L\right] \cos\varphi + \omega R \sin\varphi = 0 \qquad \left[\omega^2 L - \frac{1}{C}\right] \sin\varphi + \omega R \cos\varphi = \frac{U_m}{q_m}$$

$$\varphi = arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = arctg \frac{X_L - X_C}{R} = arctg \frac{X}{R}$$

$$q_m = \frac{1}{\omega} \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\omega} \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X^2}}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \omega q_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$i = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

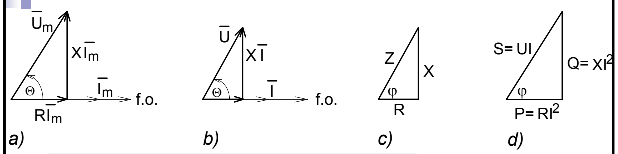
$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

gdje je Z impedansa kola.

Prema tome, impedansa ili prividna otpornost kola sastoji se od

- R – termogene ili aktivne otpornosti Ω,
- $X_L = \omega L$ – induktivna otpornost Ω,
- $X_C = 1/\omega C$ – kapacitivna otpornost Ω,
- $X = X_L - X_C$ – reaktivna otpornost ili kraće reaktansa kola

Zadržimo našu pažnju još malo na posmatranom prostom kolu. Kolo može biti realizovano sa različitim vrijednostima parametara R, L i C (moguće je da kolo ne sadrži L i/ili C). Ako je induktivni otpor veći od kapacitivnog, kolo nazivamo ***pretežno induktivno*** kolo, tada je ugao faznog stava φ pozitivan, pa ***struja kasni*** za naponom za ugao φ. Obrnuto, ako je kapacitivni otpor veći od induktivnog, kolo nazivamo ***pretežno kapacitivno*** kolo, ugao φ je negativan i ***struja prednjači*** naponu za ugao φ.



$U_m^2 = R^2 I_m^2 + X^2 I_m^2 \quad i \quad U^2 = R^2 I^2 + X^2 I^2$

$I_m = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \quad i \quad I = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}$

$\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{XI}{RI} = \dfrac{X}{R} = \dfrac{X_L - X_C}{R}$

$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

$R = Z\cos\varphi \quad i \quad X = X_L - X_C = Z\sin\varphi$

Bilans snaga u RLC kolu jasno se da sagledati iz trougla sa slike d, dobijenog kada su stranice trougla sa slike b pomnožene sa I.

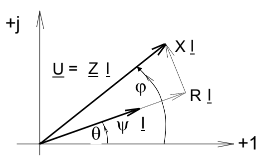
Shodno Džulovom zakonu, komponenta RI2 predstavlja srednju (aktivnu) snagu kola i obično se označava sa P, a izražava u W. Analogno ovome, definisana je komponenta XI2 kao reaktivna snaga kola, i ona se označava sa Q, a izražava u VAr (volt-amper reaktivni).

Proizvod UI=U2(R2+X2)1/2 naziva se ukupna, ili prividna, snaga i obično se označava sa S i izražava u VA (volt-amper).

$$P = RI^2; \quad Q = XI^2 \quad i \quad S = UI$$

$$P = S\cos\varphi = UI\cos\varphi \quad i \quad Q = S\sin\varphi = UI\sin\varphi$$

4.7 Osnovni zakoni kola u kompleksnom obliku



$\underline{U} = Ue^{j\theta}$

$\underline{I} = Ie^{j\psi}$

$\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{Ue^{j\theta}}{Ie^{j\psi}} = \dfrac{U}{I}e^{j(\theta-\psi)} = \dfrac{U}{I}e^{j\varphi}$

Ovdje Z=U/I predstavlja moduo impedanse, a $\varphi = \theta - \psi$ njen argument.

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = R + jX$$

$$\sum \underline{I}_k = 0$$

$$\sum e_k = \sum\left(R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k}\int i_k dt\right)$$

$$\sum \underline{E}_k = \sum\left[R_k + j(X_L - X_C)\right]\underline{I}_k$$

$$\sum \underline{E}_k = \sum \underline{Z}_k \underline{I}_k$$

4.7.1 Kompleksni oblik snage u kolu naizmjenične struje

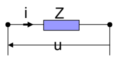
$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{\underline{I}}$$

$$\underline{S} = Ue^{j\theta} Ie^{-j\psi} = UIe^{j(\theta-\psi)} UIe^{j\varphi} = \mathrm{S}\cos\varphi + \mathrm{jS}\sin\varphi = \mathrm{P} + \mathrm{jQ}$$

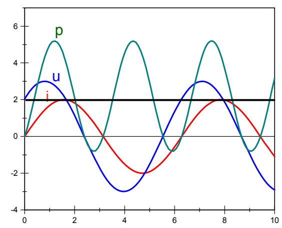
$$P = S\ cos\varphi = UI\ cos\varphi$$
$$Q = S\ sin\varphi = UI\ sin\varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}\ \ i\ \ \varphi = arctg\left(\frac{Q}{P}\right)$$

Snaga potrošača naizmjenične struje



$$p = ui = 2 \cdot UI \cdot \sin(\omega t)\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$
$$p = ui = UI\cos\varphi - UI\cos(2\omega t + \varphi)$$

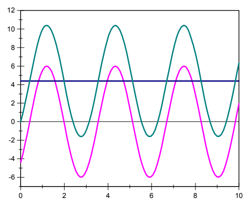


$\boxed{P = UI\cos\varphi}$ $[P] = W$

Srednja ili **aktivna** snaga

Snaga naizmenične struje

- Reaktivna snaga



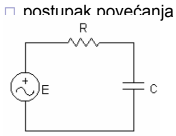
Amplituda reaktivne snage

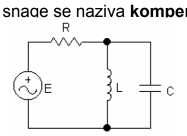
- Snaga osciluje sa srednjom vrednošću UIcos(φ) i amplitudom UI
- Električni element nekad radi kao potrošač, a nekada kao generator
- Električni element u delu perioda prima energiju od izvora, a u delu perioda vraća energiju izvoru
- Deo energije koji se vraća izvoru je reaktivna energija
- Srednja vrednost reaktivne energije je nula $[Q] = VAr$

$\boxed{Q = UI\sin\varphi}$

Snaga naizmenične struje

- Reaktivna snaga
  - nepovoljna pojava u kolima naizmjenične struje
  - prenos reaktivne snage u oba smera je rasipanje energije
  - mjera energetskog kvaliteta elementa je **faktor snage** $\cos\varphi$
  - naplaćuje se samo aktivna snaga
  - distributeri električne energije uslovljavaju snabdijevanje visokom vrijednošću faktora snage
  - postupak povećanja faktora snage se naziva **kompenzacija**



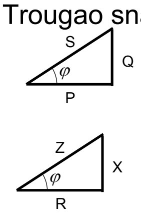


Snaga naizmjenične struje

$\boxed{P = UI\cos\varphi}$ $\boxed{Q = UI\sin\varphi}$ $\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI}$

prividna snaga

- Trougao snage



Trougao snage i trougao impedanse su slični

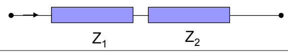
$$S = UI = ZI^2$$
$$P = UI\cos\varphi = ZI^2\cos\varphi = RI^2$$
$$Q = UI\sin\varphi = ZI^2\sin\varphi = XI^2$$

Snaga naizmjenične struje

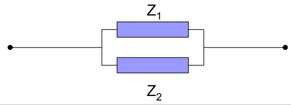
- Kompleksna snaga

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*}$$

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{Z}\,\underline{I}\,\underline{I}^* = \underline{Z}I^2 = RI^2 + jXI^2 = P + jQ$$



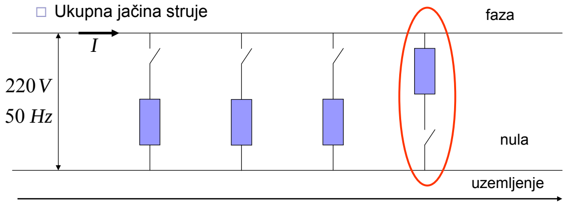
$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = (\underline{U}_1 + \underline{U}_2)\underline{I}^* = \underline{U}_1\underline{I}^* + \underline{U}_2\underline{I}^* = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$$



$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{U}(\underline{I}_1^* + \underline{I}_2^*) = \underline{U}\,\underline{I}_1^* + \underline{U}\,\underline{I}_2^* = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$$

Snaga naizmjenične struje

- Proračun električne instalacije
  - Ukupna potrošnja električne energije
  - Ukupna jačina struje



$$\underline{S} = (\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + ... + \underline{S}_n) = (P_1 + P_2 + ... + P_n) + j\cdot(Q_1 + Q_2 + ... + Q_n)$$
$$S = \sqrt{(P_1 + P_2 + ... + P_n)^2 + (Q_1 + Q_2 + ... + Q_n)^2}$$
$$S = UI \Rightarrow I = \frac{S}{U}$$

Snaga naizmjenične struje

- Aktivna snaga se pretvara u toplotu i mehanički rad i plaćamo je
- Reaktivnu snagu vraćamo izvorima električne energije i ne plaćamo je
- Prividna snaga se koristi za dimenzionisanje električnih instalacija