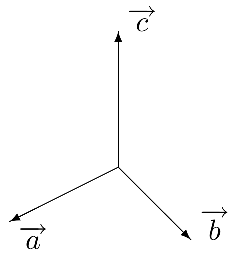
1.4 Vektorski produkt

Vektorski produkt vektora definiramo samo u vektorskom prostoru V^3. Operacijom vektorskog množenja dvaju vektora opet dobivamo vektor kojeg opisujemo pomoću njegovog *modula, smjera i orijentacije.* Da bismo definirali orijentaciju vektorskog produkta dvaju vektora, uvodimo pojam ***desno orijentirane*** (desne, pozitivno orijentirane) ***baze*** prostora V^3. Za bazu $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ od V^3 kažemo da je desno orijentirana ili desna ako promatrajući s vrha vektora $\vec{c}$ uočavamo obilazak od vektora $\vec{a}$ do vektora $\vec{b}$ kraćim putom kao obilazak u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu (pozitivan obilazak). Za baze za koje je taj obilazak u smjeru kazaljke na satu, kažemo da su ***lijevo orijentirane*** (lijeve, negativno orijentirane). Tipičan primjer desne baze $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ prikazan je na slici



Je li baza desna ili lijeva možemo odrediti i pravilom desne ruke odnosno desnog vijka. Kod ***pravila desne ruke*** ispruženi palac pokazuje prvi vektor, ispruženi kažiprst pokazuje drugi vektor, a savinuti srednji prst treći vektor. Kod ***pravila desnog vijka*** zaokruženim prstima od kažiprsta do malog prsta pokazujemo obilazak od prvog do drugog vektora, a treći vektor je određen ispruženim palcom.

Vektorsko množenje definiramo na sljedeći način:

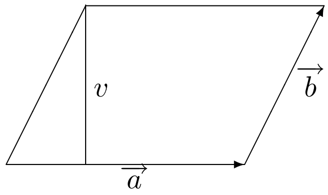
Definicija 1.4.1 ***Vektorsko množenje*** *je operacija* $\times : V^3 \times V^3 \to V^3$ *koja paru vektora* $(\vec{a}, \vec{b})$ *pridružuje vektor* $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *definiran na sljedeći način:*

1. *ako su vektori* $\vec{a}, \vec{b}$ *kolinearni, tada je* $\vec{c} = \vec{0}$*;*
2. *ako su vektori* $\vec{a}, \vec{b}$ *nekolinearni, tada je*
   (a) *modul* $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$,
   (b) *smjer od* $\vec{c}$ *je smjer okomit na smjer od* $\vec{a}$ *i na smjer od* $\vec{b}$,
   (c) *orijentacija od* $\vec{c}$ *je takva da je uređena trojka* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ *desna baza od* V^3.

Sliku $\vec{a} \times \vec{b}$ *vektora* $\vec{a}, \vec{b}$ *nazivamo* ***vektorskim umnoškom*** *ili* ***vektorskim produktom*** *vektora* $\vec{a}, \vec{b}$.

Zadatak. Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni, zašto vektori $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ čine bazu?

Modul vektorskog produkta nekolinearnih vektora ima i *geometrijsku interpretaciju*: skalar $|\vec{a} \times \vec{b}|$ jednak je površini paralelograma određenog vektorima $\vec{a}, \vec{b}$.



Zaista, $P = |\overrightarrow{a}|v = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$.

Propozicija 1.4.1 *Vrijedi $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ kolinearni.*

Dokaz. Ako su vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ kolinearni, tada je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ po definiciji. Obratno, neka je $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$. Pretpostavimo da $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ nisu kolinearni. Tada bi bilo

$$|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0,$$

odakle je $|\overrightarrow{a}| = 0$ ili $|\overrightarrow{b}| = 0$ ili $\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$. Iz prve jednakosti slijedi $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$, iz druge $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$, a iz treće $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in \{0, \pi\}$. Svaka od tih mogućnosti suprotna je pretpostavci (da su vektori $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ nekolinearni). $\square$

Korolar 1.4.2 *Za svaki $\overrightarrow{a} \in V^3$ vrijedi $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$.*

Vektorsko množenje ima sljedeća svojstva:

Teorem 1.4.3 *Za svaki $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

1. $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}$, *antikomutativnost*
2. $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})$, *kvaziasocijativnost*
3. $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$, *distributivnost prema zbrajanju.*

Dokaz.

1. Dokazujemo jednakost dvaju vektora. U tu svrhu trebamo pokazati da ti vektori imaju jednake module, smjer i orijentaciju. To se direktno provjerava primjenom definicije.

2. Provjerimo također modul, smjer i orijentaciju vektora na lijevoj i desnoj strani jednakosti. Za $\lambda = 0$ ti su vektori očito jednaki. Neka je sad $\lambda \neq 0$. Tada za modul vektora $(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}$ vrijedi

$$|(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}| = |\lambda\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\lambda||\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}).$$

Ako je $\lambda > 0$, tada su vektori $\overrightarrow{a}$ i $\lambda\overrightarrow{a}$ jednako orijentirani, pa je $\angle(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Ako je $\lambda < 0$, tada je $\angle(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi - \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, no $\sin\angle(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. U oba slučaja je

$$|(\lambda\overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b}| = |\lambda|(|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})) = |\lambda||\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\lambda(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})|,$$

čime je pokazano da su moduli vektora s lijeve i desne strane jednakosti jednaki.

Nadalje, smjer vektora $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ jednak je smjeru vektora $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, naime oba vektora imaju smjer kao vektor $\vec{a}\times\vec{b}$. Orijentacije tih vektora su također jednake: za $\lambda > 0$ vektori su jednako orijentirani kao vektor $\vec{a}\times\vec{b}$, dok su za $\lambda < 0$ oba vektora suprotno orijentirana od vektora $\vec{a}\times\vec{b}$.

3. Zadatak 13. ovog poglavlja ili zadatak 11. u poglavlju *Mješoviti produkt.*

□

Za vektorsko množenje također vrijedi:

Korolar 1.4.4 *Za sve* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *vrijedi:*

2.' $\vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ *kvaziasocijativnost*

3.' $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ *distributivnost prema zbrajanju.*

Dokaz.

2.' Koristeći antikomutativnost vektorskog množenja zaključujemo

$$\vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = -(\lambda\vec{b})\times\vec{a} = -\lambda(\vec{b}\times\vec{a}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

3.' Analogno, koristeći antikomutativnost vektorskog množenja.

□

Vektorsko množenje nije asocijativno, tj. općenito vektori $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ i $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ nisu jednaki. Pokažimo to primjerom: neka su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ komplanarni (označimo s π ravninu s kojom su paralelni) i neka $\vec{a}, \vec{c}$ nisu kolinearni. Tada su vektori $\vec{a}\times\vec{b}$ i $\vec{b}\times\vec{c}$ okomiti na π, te su vektori $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ i $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ paralelni s π. No vektor $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ okomit je na $\vec{c}$, dok je vektor $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ okomit na $\vec{a}$.

Nadalje, vektorsko množenje ne posjeduje neutralni element tj. ne postoji vektor $\vec{e}\in V^3$ za koji bi vrijedilo

$$\vec{a}\times\vec{e} = \vec{e}\times\vec{a} = \vec{a}, \quad \vec{a}\in V^3.$$

Naime, zbog antikomutativnosti ne može biti $\vec{a}\times\vec{e} = \vec{e}\times\vec{a}$, niti $\vec{a}\times\vec{e} = \vec{a}$ ne može vrijediti za svaki $\vec{a}\in V^3$ jer je $\vec{a}\times\vec{e}\perp\vec{a}$.

Zadatak. Pokažite ***Lagrangeov identitet***

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

Rješenje.

$$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = |\vec{a}\times\vec{b}|^2 = (|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b}))^2 =$$

$$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1-\cos^2\angle(\vec{a},\vec{b})) = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2.$$

Cilj nam je sada naći formulu za vektorski produkt vektora koji su zadani svojim koordinatama u nekoj (desnoj) ortonormiranoj bazi. U tu svrhu, uvedimo pojam ***determinante*** drugog i trećeg reda.

Determinanta drugog reda je funkcija koja brojevima $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ pridružuje realan broj zapisan na sljedeći način

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Determinanta trećeg reda je funkcija koja brojevima α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, $\gamma_3 \in \mathbb{R}$ pridružuje realan broj zapisan na sljedeći način

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2.$$

Izlučivanjem α_1, α_2, α_3 iz prethodnog izraza, determinantu trećeg reda možemo zapisati i drugačije

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

što nazivamo ***razvojem determinante po prvom retku***.

Formalno, u retku determinante pisat ćemo i vektore. Primjerice,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j}.$$

Lakim računom mogu se dokazati sljedeća svojstva determinante drugog i trećeg reda:

1. Ako je jedan redak (stupac) determinante jednak 0, tada je determinanta jednaka 0.
2. Zamjenom dva retka (stupca) determinanta mijenja predznak.
3. Ako su reci (stupci) determinante proporcionalni, tada je determinanta jednaka 0.

Propozicija 1.4.5 *Neka je* $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *desna ortonormirana baza vektorskog prostora* V^3 *i neka su* $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *koordinatni prikazi vektora* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *u toj bazi. Tada vrijedi*

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

Dokaz. Tablica vektorskog množenja za elemente baze izgleda ovako

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Koristeći tablicu i svojstva vektorskog množenja sada imamo

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}) \times (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}) =$$

$$(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1),$$

što možemo napisati u obliku determinante (1.7). □

Utvrdili smo da vektorsko množenje nije asocijativno. Produkte koje smo razmatrali možemo zapisati na sljedeći način:

Propozicija 1.4.6 *Za* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *vrijedi*

1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$,
2. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$.

Dokaz. Tvrdnje dokazujemo koordinatno, rastavom vektora u koordinatne prikaze u desnoj ortonormiranoj bazi i korištenjem odgovarajućih formula za skalarni i vektorski produkt. Ilustracije radi, pokažimo samo da je prva koordinata vektora $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ lijeve strane jednakosti jednaka prvoj koordinati vektora $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$ desne strane te jednakosti. Zaista, ako označimo $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, tada je tražena prva koordinata jednaka

$$\begin{aligned} \delta_2\gamma_3 - \delta_3\gamma_2 &= (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\gamma_3 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\gamma_2 = \\ &= (\alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)\beta_1 - (\beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3)\alpha_1 \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\beta_1 - (\vec{b} \cdot \vec{c})\alpha_1. \end{aligned}$$

□

Korolar 1.4.7 ***(Jacobijev identitet)*** *Za* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *vrijedi*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Dokaz. Iz propozicije 1.4.6 slijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a},$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b},$$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Zbrajanjem tih jednakosti dobivamo tvrdnju. □

Uočimo da prethodni identitet pokazuje da su vektori $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$, $(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}$ komplanarni.

Vektorski prostor V^3 uz operaciju vektorskog množenja koja zadovoljava svojstva $1, 2, 3, 2', 3'$, i Jacobijev identitet postaje primjer strukture koja se naziva ***Liejeva algebra*** nad $\mathbb{R}$.

Zadaci

1. Izračunajte determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$\Big[\ 18,\ 0,\ -16,\ -12\ \Big]$

2. Za koje vrijednosti parametra a je sljedeća determinanta jednaka nuli?

$$\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ a & 3 & -a \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$\Big[\ a = 1,\ a = 6\ \Big]$

3. Uvjerite se u ispravnost sljedećih pravila za determinante reda 3:

   (a) Ako determinanta ima dva jednaka retka, ona je jednaka nuli.
   (b) Ako je jedan redak jednak zbroju druga dva, determinanta je jednaka nuli.
   (c) Ako zamijenimo dva retka, determinanta mijenja predznak.
   (d) Ako sve elemente u nekom retku pomnožimo nekim brojem, i vrijednost determinante će biti pomnožena istim brojem.
   (e) Ako prvi redak zamijenimo sumom prvog i drugog retka, determinanta se ne mijenja.
   (f) Ako prvom retku pribrojimo drugi redak pomnožen nekim faktorom, determinanta se neće promijeniti.
   (g) Ako prvom retku pribrojimo linearnu kombinaciju ostalih redaka, determinanta se neće promijeniti.
   (h) Ako zamijenimo retke i stupce, determinanta se ne mijenja.
   (i) Ako bilo kojem retku (stupcu) pribrojimo linearnu kombinaciju ostalih redaka (stupaca), determinanta se neće promijeniti.

4. Izračunajte vektorski produkt vektora

   (a) $(5, 2, -3)$, $(-2, 1, 4)$.
   (b) $(4, -2, 1)$, $(-3, 5, 2)$.

$\Big[$ a) $(11, -14, 9)$; b) $(-9, -11, 14)$ $\Big]$

5. Neka je $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ i $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Izračunajte $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

$\Big[\ 12\ \Big]$

6. Neka je $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 9$ i $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3$. Odredite $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$\Big[\ \pm 6\sqrt{2}\ \Big]$

7. Neka je $|\vec{a}| = 10$ i $|\vec{b}| = 5$.

   (a) Ako je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$, koliko je $|\vec{a} \times \vec{b}|$?

   (b) Ako je $|\vec{a} \times \vec{b}| = 100$, koliko je $\vec{a} \cdot \vec{b}$?

$$\left[\text{ a) } 40, \text{ b) } \pm 25\sqrt{3} \right]$$

8. Neka je $\vec{a} = (1,1,1)$, $\vec{b} = (1,1,0)$ i $\vec{c} = (1,-1,0)$. Odredite vektor $\vec{x}$ tako da bude $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$ i $\vec{x} \times \vec{b} = \vec{c}$.

$$\left[\vec{x} = (1,1,1) \right]$$

9. Neka su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori koji zatvaraju kut $\frac{\pi}{4}$. Odredite površinu paralelograma s dijagonalama $\vec{e} = 2\vec{m} - \vec{n}$ i $\vec{f} = 4\vec{m} - 5\vec{n}$.

$$\left[\frac{3\sqrt{2}}{2} \right]$$

10. Dani su vektori $\vec{a} = (2,0,-1)$ i $\vec{b} = (1,-1,3)$. Odredite $m, n \in \mathbb{R}$ tako da vektor $m\vec{a}+n\vec{b}$ bude okomit na ravninu određenu vektorima $\vec{x} = (1,2,3)$ i $\vec{y} = (1,1,1)$.

$$\left[\text{ jedini takav vektor } m\vec{a} + n\vec{b} \text{ je nulvektor, dakle } m = n = 0 \right]$$

11. Dani su vektori $\vec{a} = (0, 2\lambda, \lambda)$, $\vec{b} = (2,2,1)$ i $\vec{c} = (-1,-2,-1)$.

   (a) Odredite vektor $\vec{d}$ tako da vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ i $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$.

   (b) Pokažite da su vektori $\vec{a} - \vec{d}$ i $\vec{b} - \vec{c}$ kolinearni.

   (c) Pokažite da su vektori $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ i $\vec{d}$ komplanarni.

   (d) Odredite λ tako da vrijedi $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \lambda$.

$$\left[\text{ a) } \vec{d} = (-3\lambda, -2\lambda, -\lambda); \text{ b) } \vec{a} - \vec{d} = \lambda(\vec{b} - \vec{c}); \text{ c) } \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{c}; \text{ d) } \lambda = 7 \right]$$

12. Kako glasi odgovarajuća tablica množenja, a kako formula za vektorski produkt iz propozicije 1.4.5, ako je polazna baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lijeva (a definicija vektorskog množenja nepromijenjena)?

13. Dokažite distributivnost vektorskog množenja prema zbrajanju

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

   Uputa. Dokaz provodimo u nekoliko koraka:

   (a) Pokažite da vrijedi $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp$, gdje je $\vec{b}_\perp$ ortogonalna projekcija vektora $\vec{b}$ na ravninu okomitu na vektor $\vec{a}$. Pokažite to tako da usporedite module, smjerove i orijentacije vektora lijeve i desne strane navedene jednakosti.

   (b) Uočite da je vektor $\vec{a} \times \vec{b}_\perp$ u ravnini okomitoj na $\vec{a}$ koji je okomit i na $\vec{b}_\perp$. Možemo ga interpretirati kao vektor odgovarajućeg modula u ravnini okomitoj na $\vec{a}$ dobiven rotacijom (u ravnini okomitoj na $\vec{a}$) vektora $\vec{b}_\perp$ u pozitivnom smjeru za $\frac{\pi}{2}$.

   (c) Koristeći da je (1) *projekcija zbroja vektora jednaka zbroju projekcija vektora* i da je (2) *rotacija zbroja vektora jednaka zbroju rotiranih vektora* konačno imamo

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})_\perp \overset{(1)}{=} \vec{a} \times (\vec{b}_\perp + \vec{c}_\perp) \\ &\overset{(2)}{=} \vec{a} \times \vec{b}_\perp + \vec{a} \times \vec{c}_\perp = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

1.5 Mješoviti produkt

Definicija 1.5.1 *Operaciju* $m : V^3 \times V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$ *koja trojci vektora* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *pridružuje skalar* $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ *nazivamo* ***mješovitim množenjem****.*

Rezultat $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \in \mathbb{R}$ *nazivamo* ***mješovitim umnoškom*** *ili* ***mješovitim produktom****.*

Koristimo i oznaku $m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$*.*

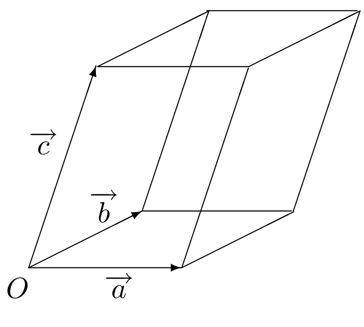
Propozicija 1.5.1 *Mješoviti produkt triju vektora jednak je 0 ako i samo ako su vektori komplanarni.*

Dokaz. Neka su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni. Pokažimo da je njihov mješoviti produkt jednak 0. Ako su, posebno, $\vec{a} \times \vec{b}$ ili $\vec{c}$ jednaki $\vec{0}$ ($\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ako i samo ako su $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni, pa su zaista $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni), tada je $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Još razmotrimo situaciju kad su $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ različiti od nulvektora. Kako je $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$, to vektori $\vec{a}, \vec{b}$ nisu kolinearni, nego su paralelni s nekom ravninom, nazovimo je π. Vektor $\vec{c}$ je po pretpostavci također paralelan s tom ravninom. No, po definiciji vektorskog produkta, vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je okomit na π, pa je $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$. Dakle, $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$.

Obratno, ako je mješoviti produkt vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jednak 0, to znači da je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ili $\vec{c} = \vec{0}$ ili $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$. U prvom slučaju su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni. U trećem slučaju vektor $\vec{c}$ je paralelan s ravninom određenom sa $\vec{a}, \vec{b}$. Dakle, u svim slučajevima vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni. □

Navedimo sada, slično kao za vektorski produkt, *geometrijsku interpretaciju* mješovitog produkta.

Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$, $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$, $\vec{c} = [\overrightarrow{OC}]$ tri nekomplanarna vektora. Oni u prostoru određuju jedan ***paralelepiped***. Kažemo da je paralelepiped razapet vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.



Propozicija 1.5.2 *Volumen paralelepipeda razapetog vektorima* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *jednak je apsolutnoj vrijednosti mješovitog produkta* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$*.*

Dokaz. Visina h paralelepipeda jednaka je duljini ortogonalne projekcije vektora $\vec{c}$ na vektor $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$h = |\vec{c}|\,|\cos\angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|.$$

Osnovka paralelepipeda je paralelogram određen vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, te je njegova površina jednaka $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$. Prema tome, volumen paralelepipeda jednak je

$$\begin{aligned} V = Bh &= |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|\, h = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\,|\cos\angle(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})| \\ &= |(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}| = |(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})|. \end{aligned}$$

□

Sljedeća svojstva mješovitog produkta posljedica su definicije i odgovarajućih svojstava skalarnog i vektorskog produkta:

Propozicija 1.5.3 *Za* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *vrijedi*

1. $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$,
2. $(\lambda\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Analogno vrijede i sljedeća svojstva:

Korolar 1.5.4 *Za* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2} \in V^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *vrijedi*

1.' $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_1} + \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{c}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{c})$

2.' $(\overrightarrow{a}, \lambda\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$

1." $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c_1} + \overrightarrow{c_2}) = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c_1}) + (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c_2})$

2." $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \lambda\overrightarrow{c}) = \lambda(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Konačno, i za mješoviti produkt možemo izvesti formulu u slučaju kada su vektori dani svojim koordinatnim prikazima u desnoj ortonormiranoj bazi. Neka je $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ desna ortonormirana baza i neka su $\overrightarrow{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overrightarrow{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\overrightarrow{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ koordinatni prikazi vektora s obzirom na tu bazu. Iz propozicija 1.3.5 i 1.4.5 slijedi

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) &= (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \cdot (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\ &= \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2. \end{aligned}$$

Dokazali smo:

Propozicija 1.5.5 *Mješoviti produkt vektora* $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ *jednak je*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Korolar 1.5.6 *Tri vektora su komplanarna ako i samo ako za njihove koordinatne prikaze u desnoj ortonormiranoj bazi vrijedi*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Iz propozicije 1.5.5 i svojstva determinante da zamjenom redaka mijenja predznak, zaključujemo

Propozicija 1.5.7 *Za* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) &= (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \\ &= -(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}) = -(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}) = -(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}). \end{aligned}$$

Dokažimo i svojstvo mješovitog produkta da *operacije mogu zamijeniti uloge*:

Korolar 1.5.8 *Za* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in V^3$ *vrijedi*

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}).$$

Dokaz.

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}) = (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}).$$

□

Zadaci

1. Jesu li baze $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, i $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k})$, jednako orijentirane?

   [Da]

2. Izraz $\Big[(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} - \vec{a})\Big] \cdot (\vec{a} + \vec{c})$ pojednostavnite, a zatim izračunajte njegovu vrijednost ako je $\vec{a} = (-4, 2, 7)$, $\vec{b} = (3, -2, 0)$, $\vec{c} = (0, -4, 1)$.

   [492]

3. Provjerite da je $((\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})) \cdot (4\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}) = 0$.
4. Dokažite da su vektori $\beta\vec{a} - \alpha\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \beta\vec{c}$ i $\alpha\vec{c} - \gamma\vec{a}$ uvijek komplanarni.
5. Nađite vektor $\vec{x}$ u ovisnosti od vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je: $\vec{a} \perp \vec{x}$, $\vec{b} \perp \vec{x}$ i $|\vec{x}|$=3.

   $\left[\ \vec{x} = \pm 3 \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}\ \right]$

6. Dani su vektori $\vec{a} = (1, -1, 3)$, $\vec{b} = (2, 0, -1)$ i $\vec{c} = (-4, 2, 1)$.