Poglavlje 2

Pravci i ravnine u koordinatnom sustavu

2.1 Koordinatni sustav u E^1, E^2, E^3

U vektorskim prostorima V^1, V^2, V^3 izborom baze bili smo u mogućnosti definirati koordinate prozvoljnog vektora (koordinatizacija). Sada nam je cilj odrediti *koordinate proizvoljne točke* na pravcu E^1, u ravnini E^2 ili u prostoru E^3.

U tu svrhu zadajmo najprije točku O u E^1, E^2 ili E^3. Svakoj točki T pravca E^1, ravnine E^2 ili prostora E^3 možemo pridružiti jedinstvenu usmjerenu (orijentiranu) dužinu $\overrightarrow{OT}$ s početkom u O, a krajem u T, koju nazivamo ***radijvektorom*** (vektorom položaja) točke T. I obratno, točka T je jednoznačno određena zadavanjem radijvektora s obzirom na neku točku O. Time je zadano bijektivno preslikavanje između točaka iz E^1, E^2 ili E^3 i pripadnog skupa radijvektora kojeg označavamo s $V^1(O)$, $V^2(O)$ ili $V^3(O)$ redom.

Nadalje, skupove $V^1(O)$, $V^2(O)$, $V^3(O)$ možemo organizirati u vektorske prostore, uz definirane operacije zbrajanja radijvektora (pravilom paralelograma) i množenjem radijvektora skalarom (kao i za vektore). Osim toga, u njima možemo definirati i skalarno množenje (kao za vektore). U vektorskom prostoru $V^3(O)$ možemo definirati također vektorsko i mješovito množenje vektora.

Neka su sad u vektorskim prostorima $V^1(O)$, $V^2(O)$, $V^3(O)$ izabrane baze. ***Koordinate točke*** T definiramo kao koordinate radijvektora $\overrightarrow{OT}$ s obzirom na odabrane baze.

Za $T \in E^1$ i odabranu bazu $\overrightarrow{OI}$ prostora $V^1(O)$, pripadni radijvektor $\overrightarrow{OT}$ možemo rastaviti na jedinstven način

$$\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{OI}, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Kažemo da je x koordinata točke T, pišemo $T = (x)$ ili $T(x)$.

Ako je $\left\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right\}$ baza za $V^2(O)$ primjerice, tada postoji jedinstveni rastav

$$\overrightarrow{OT} = x\,\overrightarrow{OI} + y\,\overrightarrow{OJ}, \;\; x, y, \in \mathbb{R}.$$

Uređen par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ su koordinate točke T, pišemo $T = (x, y)$ ili $T(x, y)$. Ako je izabrana baza ortonormirana, koordinate točke T zovemo ***ortogonalnim*** ili ***pravokutnima***. Skup $\{O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ nazivamo ***pravokutnim*** ili ***Kartezijevim koordinatnim sustavom*** u

E^2. Točku O nazivamo ***ishodištem***, a pravce određene točkama OI, OJ ***koordinatnim pravcima***. Pravac OI je os apscisa ili x-os, a pravac OJ os ordinata ili y-os.

Ako je točka $T \in E^3$, tada su njene koordinate dane kao uređena trojka $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s obzirom na bazu $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\}$ vektorskog prostora $V^3(O)$. Pišemo $T = (x, y, z)$ ili $T(x, y, z)$. U tom slučaju još definiramo koordinatnu os OK kao os aplikatu ili z-os i ***koordinatne ravnine*** xy, xz, yz kao ravnine određene točkama O, I, J, točkama O, I, K, odnosno, točkama O, J, K.

2.2 Pravac u E^2

U ovom ćemo poglavlju izvesti razne oblike jednadžbe pravca u ravnini E^2.

Propozicija 2.2.1 *Neka su $A, B \in E^2$, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ točke dane svojim koordinatama (s obzirom na neku bazu koja ne mora biti ortonormirana). Tada vektor $[\overrightarrow{AB}]$ ima koordinate*

$$[\overrightarrow{AB}] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Dokaz. Za vektore u V^2 vrijedi

$$[\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{OB}],$$

pa je $[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{OB}] - [\overrightarrow{OA}]$. Nadalje, neka je $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ baza za $V^2(O)$, te neka je

$$\overrightarrow{OA} = a_1\overrightarrow{OI} + a_2\overrightarrow{OJ}, \qquad \overrightarrow{OB} = b_1\overrightarrow{OI} + b_2\overrightarrow{OJ}.$$

Oduzimanjem navedenih vektora, slijedi tvrdnja. □

Odredimo sada jednadžbu pravca u **pravokutnom** koordinatnom sustavu $\left\{O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right\}$ u ravnini E^2.

Neka su zadani točka $T_0 \in E^2$ i vektor $\overrightarrow{s} \in V^2$, $\overrightarrow{s} \neq \overrightarrow{0}$. Tada postoji jedinstveni pravac p kroz točku T_0 paralelan vektoru $\overrightarrow{s}$ (Euklidov 5. aksiom). Kažemo da je vektor $\overrightarrow{s}$ ***vektor smjera*** pravca p.

Neka su koordinate točke T_0, vektora $\overrightarrow{s}$ i po volji odabrane točke T pravca p redom $T_0 = (x_0, y_0)$, $\overrightarrow{s} = a\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$, $T = (x, y)$. Kako je vektor $[\overrightarrow{T_0T}]$ kolinearan s vektorom $\overrightarrow{s}$, to postoji (jedinstveni) skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$[\overrightarrow{T_0T}] = \lambda\overrightarrow{s}.$$

Odavde je $[\overrightarrow{OT}] - [\overrightarrow{OT_0}] = \lambda\overrightarrow{s}$, tj.

$$[\overrightarrow{OT}] = [\overrightarrow{OT_0}] + \lambda\overrightarrow{s}.$$

Često pišemo

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda\overrightarrow{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

pri čemu je $\overrightarrow{r} = [\overrightarrow{OT}]$, $\overrightarrow{r_0} = [\overrightarrow{OT_0}]$.

Uočite da je za svaku izabranu točku T pravca p skalar λ jedinstveno određen, te da je za razne točke skalar λ različit, tj. pridruživanje točaka T pravca p i brojeva $\lambda \in \mathbb{R}$ je bijekcija. Jednadžbu (2.1) nazivamo ***parametarskim vektorskim oblikom jednadžbe pravca*** p.

Raspisujući jednadžbu (2.1) po koordinatama, dobivamo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

što nazivamo ***parametarskim koordinatnim oblikom jednadžbe pravca*** p.

Ako je $a \neq 0$, tada iz prve jednadžbe od (2.2) slijedi $\lambda = \frac{1}{a}(x - x_0)$, što uvršteno u drugu jednadžbu daje

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0). \tag{2.3}$$

Prethodnu jednadžbu možemo pisati i u obliku

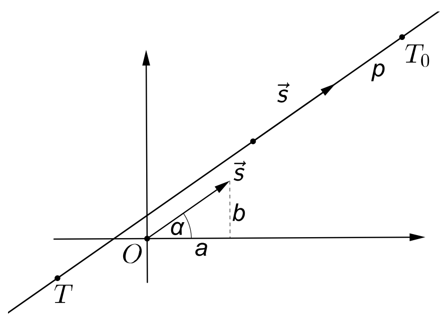
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \tag{2.4}$$

što nazivamo ***kanonskim oblikom jednadžbe pravca*** p.

Koeficijent $\frac{b}{a}$ iz jednadžbe (2.3) ima i geometrijsko značenje – jednak je tangensu kuta što ga pravac p određuje s pozitivnim dijelom x-osi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Sjetimo se da mjera kuta između pravca i polupravca (pozitivnog dijela x-osi) pripada $[0, \pi]$.



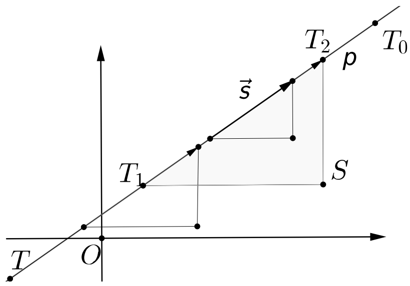
Uočimo da za različite vektore smjera $\vec{s}$ pravca p, omjer koordinata iz njihovih koordinatnih prikaza je uvijek isti, jer su pripadni pravokutni trokuti (kojima su katete paralelne koordinatnim osima) slični.

Broj $\frac{b}{a}$ naziva se ***koeficijent smjera*** (**nagib**) pravca p i označava s k. Već smo rekli da je on konstantan za zadani pravac p. Jednadžba (2.3) prelazi u ***jednadžbu pravca zadanog koeficijentom smjera*** k ***i točkom*** (x_0, y_0)

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.5}$$

Uočimo, ako je $a = 0$, tada koeficijent smjera k nije definiran. Tada je $\vec{s} = (0, b)$, a mjera kuta $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Dakle, takav je pravac paralelan s y-osi, a njegova jednadžba glasi

$$x = x_0.$$



Ako je $b = 0$, tada je $\alpha = 0$, a koeficijent smjera $k = 0$. Takav je pravac paralelan s x-osi, a njegova jednadžba glasi

$$y = y_0.$$

Pravac možemo zadati i dvjema točkama $T_1 = (x_1, y_1)$, $T_2 = (x_2, y_2)$. Ako za vektor smjera uzmemo vektor

$$[\overrightarrow{T_1T_2}] = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

dobivamo sljedeće jednadžbe pravca:

parametarski vektorski oblik

$$[\overrightarrow{OT}] = [\overrightarrow{OT_1}] + \lambda([\overrightarrow{OT_2}] - [\overrightarrow{OT_1}]), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

odnosno

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}), \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

te ***parametarski koordinatni oblik***

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ako je $x_1 \neq x_2$, tada je koeficijent smjera pravca jednak

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

što često pišemo i kao $k = \dfrac{\triangle y}{\triangle x}$. Uočimo da je broj $k \in \mathbb{R}$ neovisan o izboru točaka pravca T_1, T_2, što je posljedica sličnosti odgovarajućih trokuta[1] (vidi sliku). Primijetimo da ako uzmemo $\triangle x = x_2 - x_1 = 1$, tada dobivamo jednostavnu interpretaciju koeficijenta smjera k kao razlike y-koordinata točaka, $k = y_2 - y_1$.[2]

Sada je

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

jednadžba pravca određenog točkama T_1, T_2.

[1] Trokute $\triangle T_1ST_2$ nazivamo ***trokuti nagiba*** (*trokuti uspona ili pada*).

[2] To svojstvo možemo koristiti kod crtanja pravca zadanog jednadžbom (2.5).

Posebno, ako pravac presjeca x odnosno y-os u točkama $M = (m, 0)$ i $N = (0, n)$, pri čemu su $m, n \neq 0$, tada dobivamo ***segmentni oblik*** jednadžbe pravca (takav pravac ne prolazi ishodištem)

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

Brojevi m, n nazivaju se odsječci (odresci, segmenti) na osima x i y.

Ako pravac presjeca y-os u točki $L = (0, l)$ i ima koeficijent smjera k, tada (2.5) prelazi u

$$y = kx + l \tag{2.6}$$

što se naziva ***eksplicitnim oblikom*** jednadžbe pravca. Broj l zove se odsječak (odrezak) na osi y.

Pravcu umjesto vektora smjera možemo zadati i ***vektor normale*** $\overrightarrow{n} = (A, B)$ koji je okomit na vektor smjera.

Neka je $T_0 = (x_0, y_0)$ zadana točka pravca, a $T = (x, y)$ po volji odabrana točka pravca. Tada je vektor $[\overrightarrow{T_0T}] = (x - x_0, y - y_0)$ okomit na $\overrightarrow{n}$, te je njihov skalarni produkt jednak 0.

Prema tome vrijedi

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Iz prethodnog možemo uočiti da se jednadžba pravca u E^2 može napisati u obliku

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.7}$$

gdje je $C = -(Ax_0 + By_0)$. Jednadžbu (2.7) nazivamo ***implicitnim*** ili ***općim oblikom*** jednadžbe pravca. Za razliku od eksplicitne jednadžbe pravca (2.6) njome su obuhvaćeni i pravci paralelni s y-osi.

Zadaci

1. Navedite tri različite točke koje leže na pravcu

   (a) s eksplicitnom jednadžbom $y = 3x - 2$

   (b) s implicitnom jednadžbom $2x - 5y - 7 = 0$

   (c) s parametarskom jednadžbom $\begin{cases} x &= 3t - 1 \\ y &= t + 2 \end{cases}$

   (d) s kanonskom jednadžbom $\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{0}$.

   $\Big[$ Npr: a) $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$; b) $(1, -1)$, $(0, -\frac{7}{5})$, $(\frac{7}{2}, 0)$; c) $(-1, 2)$, $(2, 3)$, $(5, 4)$; d) $(3, -1)$, $(0, -1)$, $(1, -1)$ $\Big]$

2. Napišite u eksplicitnom, implicitnom, kanonskom i parametarskom obliku jednadžbu pravca kroz točke

   (a) $A(1, -2)$ i $B(-4, -3)$

   (b) $A(0, 0)$ i $B(-1, 3)$

(c) $A(1,-1)$ i $B(-2,-1)$

(d) $A(3,-2)$ i $B(3,5)$

$\Big[$ a) $y=\frac{1}{5}x-\frac{11}{5}$, $-x+5y+11=0$, $\frac{x-1}{-5}=\frac{y+2}{-1}$, $x=1-5t$, $y=-2-t$;
b) $y=-3x$, $3x+y=0$, $\frac{x}{-1}=\frac{y}{3}$, $x=-t$, $y=3t$;
c) $y=-1$, $y+1=0$, $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+1}{0}$, $x=t$, $y=-1$;
d) ne postoji, $x-3=0$, $\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{-7}$, $x=3$, $y=t$ $\Big]$

3. Napišite u eksplicitnom obliku jednadžbu pravca

   (a) $x+7y+8=0$

   (b) $\begin{cases} x &= 4t-1 \\ y &= 3t+2 \end{cases}$

   (c) $\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-2}{3}$

$\Big[$ a) $y=-\frac{1}{7}x-\frac{8}{7}$; b) $y=\frac{3}{4}x+\frac{11}{4}$, c) $y=\frac{3}{2}x+\frac{19}{2}$ $\Big]$

4. Pokažite da svi pravci $(a+2)x-(a+1)y-2a-3=0$, $a\in\mathbb{R}$ prolaze istom točkom. Kojom?

$\Big[$ $(1,-1)$ $\Big]$

5. Odredite presjek pravaca p_1 i p_2 zadanih parametarskim jednadžbama:

$$p_1 \quad \ldots \quad \begin{cases} x=3+2t \\ y=-1+4t \end{cases} \qquad\qquad p_2 \quad \ldots \quad \begin{cases} x=4+s \\ y=5-2s \end{cases}$$

$\Big[$ $(5,3)$ $\Big]$

6. Kako se zadaje polupravac u koordinatnom sustavu? A dužina?

7. Skicirajte u ravnini skup točaka (x,y) koje zadovoljavaju sustav nejednadžbi

$$\begin{cases} x-2y+2>0 \\ 2x+y-6<0 \end{cases}$$

8. Odredite položaj dužine $\overline{AB}$ u odnosu na pravac $2x-y+5=0$, ako je

   (a) $A=(2,3)$, $B=(0,-1)$;

   (b) $A=(1,1)$, $B=(-3,0)$;

   (c) $A=(0,5)$, $B=(2,0)$.

$\Big[$ a) dužina ne siječe pravac, b) dužina siječe pravac, c) točka A leži na pravcu $\Big]$

2.3 Udaljenost dviju točaka, udaljenost točke od pravca i kut dvaju pravaca u E^2

Propozicija 2.3.1 *Neka su $A, B \in E^2$, $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ točke dane svojim* **pravokutnim** *koordinatama. Tada je udaljenost od A do B dana sa*

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Dokaz. Kako je $d(A, B) = |AB| = |[\overrightarrow{AB}]|$, tvrdnja slijedi iz propozicije 2.2.1. □

Općenito, ako su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ skupovi točaka na pravcu, u ravnini ili u prostoru, tada se udaljenost između tih skupova definira kao

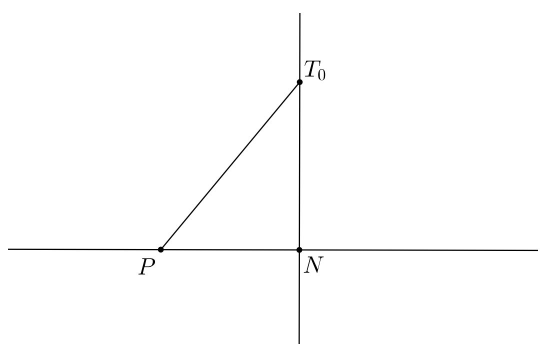
$$\inf \{d(A, B) : A \in \mathcal{A}, \;\; B \in \mathcal{B}\}.$$

Naš je cilj odrediti formulu za udaljenost $d(T_0, p)$ točke T_0 od pravca p. Sljedeća propozicija nam kaže da je tu udaljenost moguće odrediti kao udaljenost dviju točaka, točke T_0 i točke N koja je nožište normale iz T_0 na p. Normala je pravac okomit na pravac p.

Propozicija 2.3.2 *Neka je T_0 točka, a p pravac u E^2. Neka je N nožište normale kroz T_0 na pravac p i neka je P po volji odabrana točka pravca p. Tada vrijedi*

$$d(T_0, N) \le d(T_0, P), \;\; P \in p.$$

Dokaz. U pravokutnom trokutu $\triangle T_0NP$, $|T_0N|$ je duljina katete, a $|T_0P|$ hipotenuze, te tvrdnja slijedi. □



Točku N nazivamo i ortogonalnom projekcijom točke T_0 na pravac p.

Izvedimo sada formulu za $d(T_0, p)$. Neka je $T_0 = (x_0, y_0)$, a pravac p dan jednadžbom $Ax + By + C = 0$. Tada je $\overrightarrow{n} = (A, B)$ vektor normale pravca p. Vrijedi

$$d(T_0, p) = d(T_0, N) = |T_0N| = |[\overrightarrow{T_0N}] \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}| = \frac{|([\overrightarrow{ON}] - [\overrightarrow{OT_0}]) \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$$

$$= \frac{|[\overrightarrow{ON}] \cdot \overrightarrow{n} - [\overrightarrow{OT_0}] \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Koristili smo da za točku N na pravcu p vrijedi $[\overrightarrow{ON}] \cdot \overrightarrow{n} = -C$, te činjenicu

$$[\overrightarrow{OT_0}] \cdot \overrightarrow{n} = (x_0, y_0) \cdot (A, B) = Ax_0 + By_0.$$

Dakle, dokazali smo:

Propozicija 2.3.3 *Udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0)$ od pravca p zadanog jednadžbom $Ax+By+C=0$ iznosi*

$$d(T_0, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.8}$$

Odredimo nadalje mjeru kuta između pravaca p_1, p_2 koji su zadani jednadžbama

$$y = k_1 x + l_1, \quad y = k_2 x + l_2. \tag{2.9}$$

Mjera kuta dvaju pravaca je mjera manjeg od dvaju kutova koje ti pravci zatvaraju. Dakle, (radijanska) mjera kuta dvaju pravaca ima vrijednost u $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Poznato je da su koeficijenti smjera pravaca p_1, p_2 tangensi kuteva φ_1, φ_2 koje pravci zatvaraju s pozitivnim dijelom x-osi

$$k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Označemo traženu mjeru kuta između pravaca p_1, p_2 s φ, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ta je mjera jednaka $|\varphi_2 - \varphi_1|$ ili mjeri suplementarnog kuta te razlike. Kako je tangens kuta iz $[0, \frac{\pi}{2}]$ nenegativan broj, to primjenom adicijskih formula za tangens dobivamo sljedeću formulu

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \tag{2.10}$$

Uočimo da su pravci paralelni (usporedni) ako i samo ako je mjera kuta između njih jednaka 0, a to je ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Pravci su okomiti ako i samo ako je mjera kuta između njih jednaka $\frac{\pi}{2}$, a to je ako i samo ako je

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Tada $\operatorname{tg} \varphi$ nije definiran, odnosno, nazivnik izraza (2.10) jednak je 0.

Uočimo da smo do istog zaključka mogli doći i ako kut određujemo kao kut vektora smjera $\overrightarrow{s_1}$, $\overrightarrow{s_2}$ pravaca p_1, p_2. Mjera kuta dvaju pravaca jednaka je mjeri kuta što ga zatvaraju njihovi vektori smjera ili mjeri suplementarnog kuta, pa je

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}|}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|}. \tag{2.11}$$

Ako su pravci p_1, p_2, jednadžbama (2.28), tada su njihovi vektori smjera $\overrightarrow{s_1} = (1, k_1)$, $\overrightarrow{s_2} = (1, k_2)$. Sada je

$$\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 1 + k_1 k_2, \quad |\overrightarrow{s_1}| = \sqrt{1 + k_1^2}, \quad |\overrightarrow{s_2}| = \sqrt{1 + k_2^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{|1 + k_1 k_2|}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}},$$

odakle također slijedi formula (2.10).

Zadaci

1. Odredite vrijednost parametra a tako da pravac $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$
   (a) bude paralelan s osi x,
   (b) bude paralelan s osi y,
   (c) sadrži ishodište.

$\left[\ \text{a) } -2;\ \text{b) } 3,\ -3;\ \text{c) } 1,\ \frac{5}{3}\ \right]$

2. Vrhovi trokuta su $A=(1,4)$, $B=(1,1)$, $C=(3,6)$. Odredite jednadžbe njegovih stranica i njegovih visina, te odredite njegov ortocentar.

$\left[\ (-4,6)\ \right]$

3. Odredite vrhove trokuta ABC ako mu je ortocentar točka $H=(-1,3)$, stranica $\overline{AB}$ leži na pravcu $5x-3y+1=0$, a stranica $\overline{BC}$ na pravcu $-x+2y+4=0$.

$\left[\ A(4,0),\ B(-2,-3),\ C(\frac{2}{11},\frac{7}{11})\ \right]$

4. Odredite udaljenost pravca od ishodišta i kut koji pravac zatvara s osi x, ako je jednadžba pravca
   (a) $x+2=0$
   (b) $x+y\sqrt{3}+2=0$
   (c) $3x+y=10$

$\left[\ \text{a) } d=2,\ \varphi=90^\circ;\ \text{b) } d=1,\ \varphi=150^\circ;\ \text{c) } d=\sqrt{10},\ \varphi\approx 108,4^\circ\ \right]$

5. Odredite jednadžbu pravca koji sadrži sjecište pravaca $3x+y-5=0$ i $x-2y+10=0$, a od točke $C=(-1,-2)$ je udaljen za $d=5$.

$\left[\ 3x-4y-20=0,\ 4x+3y-15=0\ \right]$

6. Napišite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(-1,3)$, a s osi x zatvara kut od 45°.

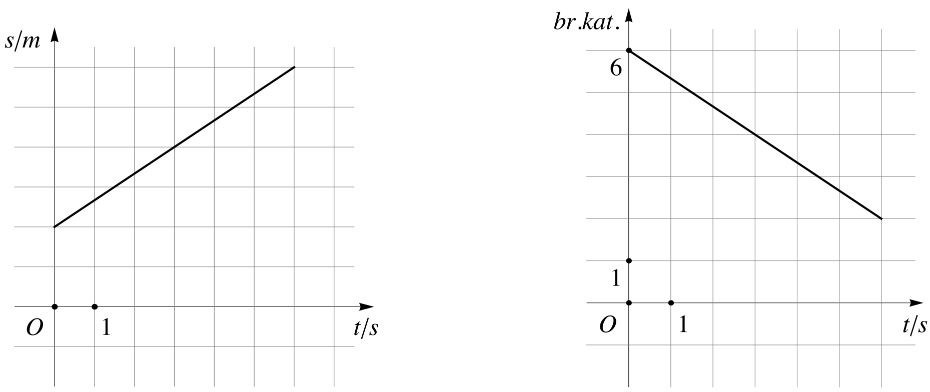
$\left[\ y=x+4,\ y=-x+2\ \right]$

7. Napišite jednadžbu simetrale kuta kojeg određuju pravci $x+2y-5=0$ i $3x-6y+2=0$, a u kojem leži ishodište.

$\left[\ x=\frac{17}{12}\ \right]$

8. Dvije stranice pravokutnika leže na pravcima $4x-6y+13=0$ i $3x+2y-13=0$, a jedan od vrhova je točka $(2,-3)$. Odredite preostale vrhove.

$\left[\ (2,\frac{7}{2}),\ (-1,\frac{3}{2}),\ (5,-1)\ \right]$



Slika 2.1: Gibanje tijela i lifta

9. Provjerite da su točke $A = (-4, -3)$, $B = (-5, 0)$, $C = (5, 6)$ i $D = (1, 0)$ vrhovi trapeza, te odredite njegovu visinu.

$$\left[\ AD \parallel BC,\ v = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{17}}\ \right]$$

10. Na slici 2.1 a) prikazan je s-t graf gibanja tijela, gdje je s je prijeđeni put izražen u metrima, a t vrijeme u sekundama. Kolika je brzina tijela?

[0.67 m/s]

11. Lift kreće sa šestog kata. Njegovo gibanje opisano je kao ovisnost prijeđenog broja katova o vremenu (u sekundama) i prikazano grafom na slici 2.1 b).

    (a) Nakon koliko sekundi je lift na drugom katu?

    (b) Kolika je brzina lifta? Izrazite je kao broj katova u sekundi.

[a) 6 s, b) −0.67 katova/s]

12. Na Marsu je uočena promjena dnevne temperature od 5°C izmjerenih u podne do −55°C izmjerenih 12 sati kasnije.

    (a) Ukoliko se temperatura mijenja jednoliko, prikažite ovisnost temperature (°C) o vremenu (h) grafički.

    (b) Odredite brzinu promjene temperature i izrazite je u °C po satu.

[b) −5°C/h]

13. Dva tijela počinju se gibati jednoliko po pravcu u trenutku $t = 0$. Njihove koordinate položaja su $x_1 = 20t$ i $x_2 = 250 - 5t$. Položaj x iskazan je u metrima, a vrijeme t u sekundama.

    (a) Kolika je udaljenost tijela na početku gibanja?

    (b) Kolikom brzinom se tijela gibaju?

(c) U kojem će trenutku njihova međusobna udaljenost biti 125 m?

(d) U kojem će se trenutku tijela susresti?

(a) Prikažite ta gibanja u (x, t)-koordinatnom sustavu.

$\Big[$ a) 250 m, b) $v_1 = 20$ m/s, $v_2 = -5$ m/s, c) $t = 5$ s, d) $t = 10$ s $\Big]$

14. Dva broda gibaju se pravocrtno, konstantnim brzinama. Prvi kreće iz položaja $(-1, 4)$, a drugi iz $(4, -1)$. Koordinate položaja izražene su u km. Brzina prvog broda je 20 km/h, a drugog 10 km/h. Vektor smjera prvog broda je $(0, -1)$, a drugog $(-1, 0)$.

    (a) Hoće li se brodovi sresti?

    (b) Kolika je njihova najmanja udaljenost?

$\Big[$ a) Neće. b) Najmanja udaljenost je $\sqrt{5} \approx 2.24$ km, a postiže se za 0.3 h = 18 min. $\Big]$

2.4 Ravnina u E^3

Kao i u E^2, možemo dokazati sljedeću propoziciju:

Propozicija 2.4.1 *Neka su* $A, B \in E^3$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ *točke dane svojim koordinatama (s obzirom na neku bazu koja ne mora biti ortonormirana). Tada vektor* $[\overrightarrow{AB}]$ *ima koordinate*

$$[\overrightarrow{AB}] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Cilj nam je odrediti jednadžbe pravaca i ravnina u prostoru E^3.

Odredimo najprije razne oblike jednadžbe ravnine u E^3. Kao posljedica aksioma euklidske geometrije u prostoru, postoji jedinstvena ravnina u E^3 koja prolazi točkom T_0 i paralelna je s dva nekolinearna vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in V^3$. Kažemo da je ravnina određena ili razapeta vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i točkom T_0.

Neka je T_0 zadana točka, a T po volji odabrana točka ravnine π. Tada su vektori $[\overrightarrow{T_0T}]$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ komplanarni, pa po propoziciji 1.2.7 postoje skalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$[\overrightarrow{T_0T}] = \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}.$$

Ako uvedemo oznake $\overrightarrow{r} = [\overrightarrow{OT}]$, $\overrightarrow{r_0} = [\overrightarrow{OT_0}]$, prethodni izraz možemo napisati i kao

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

što predstavlja ***parametarski vektorski oblik jednadžbe ravnine*** π.

Uočimo da su za svaku točku ravnine skalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ jedinstveno određeni.

Ako su točke T, T_0 i vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ dani pravokutnim koordinatama $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $T = (x, y, z)$, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ista jednadžba zapisana koordinatno glasi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ z &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

To je ***parametarski koordinatni oblik jednadžbe ravnine***.

Nadalje, činjenicu da su vektori $[\overrightarrow{T_0T}]$, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ komplanarni, možemo karakterizirati i preko njihovog mješovitog produkta (mješoviti produkt $([\overrightarrow{T_0T}], \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ mora biti jednak 0). Dakle,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2.14}$$

je također ***jednadžba ravnine određene točkom*** T_0 i ***dvama nekolinearnim vektorima*** $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$.

Ravnina može biti zadana i trima točkama $T_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, koje ne leže na istom pravcu. Ako definiramo $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{T_1T_2}]$, $\overrightarrow{b} = [\overrightarrow{T_1T_3}]$ i uvrstimo u prethodnu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.15}$$

Posebno, ako izaberemo točke ravnine u kojima ona presjeca koordinatne osi $T_1 = (m, 0, 0)$, $T_2 = (0, n, 0)$, $T_3 = (0, 0, p)$, $mnp \neq 0$, razvojem prethodne determinante dobivamo ***segmentni oblik*** jednadžbe ravnine

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1.$$

Nadalje, ravninu možemo zadati i vektorom normale $\overrightarrow{n} = (A, B, C) \neq \overrightarrow{0}$ i jednom njenom točkom $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Tada je točka $T = (x, y, z)$ točka ravnine ako i samo ako su vektori $[\overrightarrow{T_0T}]$ i $\overrightarrow{n}$ okomiti. Kako su ne-nulvektori okomiti ako i samo ako je njihov skalarni produkt jednak 0, dobivamo jednadžbu

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2.16}$$

Prethodnu jednadžbu možemo napisati i u obliku

$$Ax + Bx + Cz + D = 0, \tag{2.17}$$

gdje je $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Jednadnakost (2.17) nazivamo ***implicitnim*** ili ***općim oblikom*** jednadžbe ravnine.

Uočimo da jednadžbu (2.16) možemo zapisati i kao

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \cdot \overrightarrow{n} = 0, \tag{2.18}$$

gdje je $\overrightarrow{r}$ radijvektor točke T, a $\overrightarrow{r_0}$ radijvektor točke T_0.

2.5 Udaljenost dviju točaka, udaljenost točke od ravnine i kut dviju ravnina u E^3

Slično kao u prostoru E^2, pokazuje se da vrijedi

Propozicija 2.5.1 *Neka su $A, B \in E^3$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ točke dane svojim* pravokutnim *koordinatama. Tada je udaljenost od A do B jednaka*

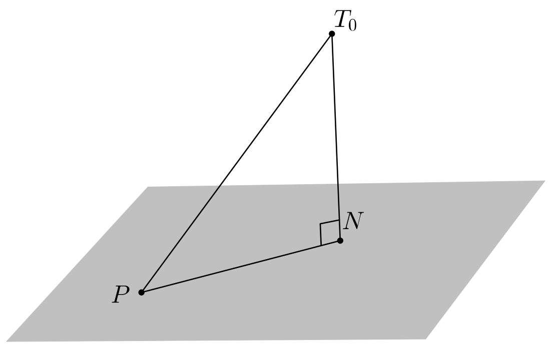
$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Odredimo udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od ravnine π.

Propozicija 2.5.2 *Neka je T_0 točka, a π ravnina u E^3. Neka je N nožište normale (pravca okomitog na π) kroz T_0 na ravninu π i neka je P po volji odabrana točka ravnine π. Tada vrijedi*

$$d(T_0, N) \leq d(T_0, P), \quad P \in \pi.$$

Dokaz. U pravokutnom trokutu $\triangle T_0NP$, $|T_0N|$ je duljina katete, a $|T_0P|$ hipotenuze, pa slijedi tvrdnja. $\square$



Točka N naziva se i ***ortogonalna projekcija*** točke T_0 na ravninu π.

Izvedimo sada formulu za $d(T_0, \pi)$. Neka je $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, a ravnina π je dana jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$. Vektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ je vektor normale ravnine π. Tada je

$$d(T_0, \pi) = d(T_0, N) = |T_0N| = |[\overrightarrow{T_0N}] \cdot \frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}| = \frac{|([\overrightarrow{ON}] - [\overrightarrow{OT_0}]) \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}$$

$$= \frac{|[\overrightarrow{ON}] \cdot \overrightarrow{n} - [\overrightarrow{OT_0}] \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

pri čemu smo koristili da točka N ravnine π zadovoljava $[\overrightarrow{ON}] \cdot \overrightarrow{n} = -D$.

Dokazali smo:

Propozicija 2.5.3 *Udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od ravnine $\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0$ je*

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.19}$$

Ako je $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ točka ravnine, a $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ vektor normale ravnine, tada koristeći (2.18), jednakost iz prethodne propozicije možemo zapisati ovako:

$$d = \frac{|(\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}) \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}. \tag{2.20}$$

Odredimo još mjeru kuta između dviju ravnina. Neka se ravnine sijeku po pravcu p. Kut dviju ravnina je kut između pravaca koji su presječnice zadanih ravnina i bilo koje ravnine okomite na pravac p.

Neka su ravnine π_i dane jednadžbama $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2$, pri čemu su $\overrightarrow{n_i} = (A_i, B_i, C_i)$ njihovi vektori normala. Tada je kut dvaju ravnina jednak kutu između njihovih vektora normala ili suplementu tog kuta. Mjera kuta dviju ravnina je uvijek iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$, te zaključujemo

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}.$$

Ravnine su očito paralelne ako i samo ako su im vektori normala kolinearni

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2,$$

odnosno

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2,$$

a okomite su ako i samo ako su im vektori normala okomiti

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

2.6 Pravac u E^3

Neka je p pravac u E^3 zadan točkom T_0 i ne-nulvektorom $\overrightarrow{s}$ (***vektor smjera***).

Neka je T po volji odabrana točka pravca p. Parametarske jednadžbe pravca u E^3 izvodimo analogno kao takve jednadžbe u E^2.

Vektor $[\overrightarrow{T_0T}]$ je kolinearan s vektorom $\overrightarrow{s}$, pa postoji skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$[\overrightarrow{T_0T}] = \lambda \overrightarrow{s}.$$

Ako označimo $\overrightarrow{r} = [\overrightarrow{OT}]$, $\overrightarrow{r_0} = [\overrightarrow{OT_0}]$, tada iz prethodne jednakosti slijedi

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{s}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$