Dokazali smo:

Propozicija 2.5.3 *Udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od ravnine $\pi \ldots Ax + By + Cz + D = 0$ je*

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.19}$$

Ako je $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ točka ravnine, a $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ vektor normale ravnine, tada koristeći (2.18), jednakost iz prethodne propozicije možemo zapisati ovako:

$$d = \frac{|(\overrightarrow{r_0} - \overrightarrow{r_1}) \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|}. \tag{2.20}$$

Odredimo još mjeru kuta između dviju ravnina. Neka se ravnine sijeku po pravcu p. Kut dviju ravnina je kut između pravaca koji su presječnice zadanih ravnina i bilo koje ravnine okomite na pravac p.

Neka su ravnine π_i dane jednadžbama $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2$, pri čemu su $\overrightarrow{n_i} = (A_i, B_i, C_i)$ njihovi vektori normala. Tada je kut dvaju ravnina jednak kutu između njihovih vektora normala ili suplementu tog kuta. Mjera kuta dviju ravnina je uvijek iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$, te zaključujemo

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}.$$

Ravnine su očito paralelne ako i samo ako su im vektori normala kolinearni

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2,$$

odnosno

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2,$$

a okomite su ako i samo ako su im vektori normala okomiti

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

2.6 Pravac u E^3

Neka je p pravac u E^3 zadan točkom T_0 i ne-nulvektorom $\overrightarrow{s}$ (***vektor smjera***).

Neka je T po volji odabrana točka pravca p. Parametarske jednadžbe pravca u E^3 izvodimo analogno kao takve jednadžbe u E^2.

Vektor $[\overrightarrow{T_0T}]$ je kolinearan s vektorom $\overrightarrow{s}$, pa postoji skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$[\overrightarrow{T_0T}] = \lambda \overrightarrow{s}.$$

Ako označimo $\overrightarrow{r} = [\overrightarrow{OT}]$, $\overrightarrow{r_0} = [\overrightarrow{OT_0}]$, tada iz prethodne jednakosti slijedi

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \lambda \overrightarrow{s}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

Prethodna jednadžba naziva se ***parametarskim vektorskim oblikom jednadžbe pravca*** $p \subset E^3$ koji je određen točkom T_0 i vektorom $\overrightarrow{s}$.

Neka su sad točka T_0 i vektor $\overrightarrow{s}$ zadani svojim pravokutnim koordinatama, $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\overrightarrow{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Iz (2.21) dobivamo ***parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca***

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda\alpha \\ y &= y_0 + \lambda\beta \\ z &= z_0 + \lambda\gamma, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Eliminacijom parametra λ dobivamo ***kanonski oblik jednadžbe pravca***

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \quad (= \lambda).$$

Ako pravac zadamo dvjema točkama $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $T_2 = (x_2, y, z_2)$ tada njegov parametarski koordinatni oblik jednadžbe glasi

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_0 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_0 + \lambda(z_2 - z_1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Kanonski oblik jednadžbe sada glasi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (= \lambda).$$

I na kraju, pravac možemo zadati i kao presječnicu dviju neparalelnih ravnina π_1, π_2. Neka su ravnine dane svojim implicitnim jednadžbama

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \tag{2.24}$$

pri čemu vrijedi $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$. Pravac je zadan sustavom jednadžbi (2.24).

Zadatak. Odredimo jednadžbe koordinatne osi x.

Rješenje. Os x zadana je točkom $(0, 0, 0)$ i vektorom smjera $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$. Njene koordinatne parametarske jednadžbe glase $x = t$, $t \in \mathbb{R}$, $y = 0$, $z = 0$. Kanonski oblik jednadžbe glasi

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0},$$

a sustav $y = 0$, $z = 0$ predstavlja x-os kao presjek dviju ravnina, konkretno koordinatne xz-ravnine i koordinatne xy-ravnine.

Zadatak. Pravac p zadan je kao presječnica ravnina

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - 2y - z &= -2. \end{aligned} \right.$$

Odredite parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca p.

Rješenje. Stavimo $x = t$.

Zbrajanjem jednadžbi kojima je pravac zadan dobivamo $2x - y = -1$, odakle slijedi $y = 2t + 1$. Sada, primjerice iz prve jednadžbe, slijedi $z = 1 - x - y = -3t$.

Dakle, parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca p glasi

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2t+1 \\ y &= -3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2.7 Udaljenost točke od pravca, udaljenost dvaju pravaca. Kut dvaju pravaca, kut pravca i ravnine u E^3

Kao i u E^2 možemo pokazati sljedeće:

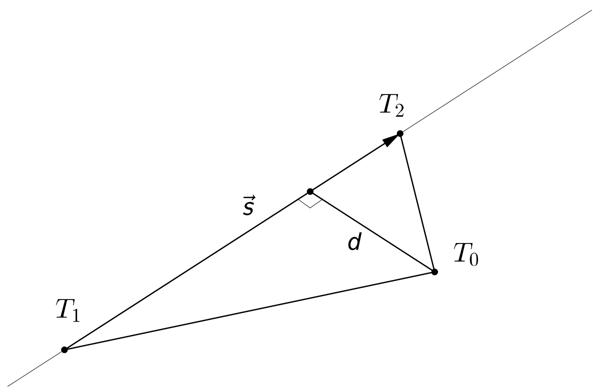
Propozicija 2.7.1 *Udaljenost točke T_0 od pravca p u E^3 jednaka je udaljenosti točke T_0 od nožišta normale kroz T_0 na pravac p.*

Izvedimo sad formulu za udaljenost točke T_0 (s radijvektorom $\overrightarrow{r_0}$) od pravca p u E^3.

Neka je pravac p dan vektorskom jednadžbom

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_1} + \lambda \overrightarrow{s}, \tag{2.25}$$

gdje je $\overrightarrow{r}$ radijvektor po volji odabrane točke T na pravcu p, a $\overrightarrow{r_1}$ radijvektor točke T_1 pravca p. Neka je T_2 točka pravca p za koju vrijedi $[\overrightarrow{T_1T_2}] = \overrightarrow{s}$.



Površinu trokuta $\triangle T_0T_1T_2$ računamo na dva načina. Vrijedi

$$P = \frac{\text{baza} \cdot \text{visina}}{2} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{s}|d, \tag{2.26}$$

odnosno

$$P = \frac{1}{2}|[\overrightarrow{T_0T_1}] \times [\overrightarrow{T_1T_2}]| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{s}|. \tag{2.27}$$

Iz (2.26), (2.27) slijedi

$$d = \frac{|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{s}|}{|\overrightarrow{s}|}.$$

Dokazali smo:

Propozicija 2.7.2 *Udaljenost točke T_0 (s radijvektorom $\overrightarrow{r_0}$) od pravca p danog jednadžbom (2.25) u E^3 iznosi*

$$d = \frac{|(\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_0}) \times \overrightarrow{s}|}{|\overrightarrow{s}|}.$$

Idući nam je cilj odrediti udaljenost dvaju pravaca. U tu svrhu konstruirajmo zajedničku normalu dvaju pravaca. ***Zajednička normala*** dvaju pravaca je pravac koji *siječe* oba pravca i na njih je okomit.

Za pravce kažemo da su ***mimosmjerni*** (mimoilazni) ako se ne sijeku i nisu paralelni. Za takve pravce, dakle, ne postoji ravnina koja ih oba sadrži.

Neka su p_1, p_2, dva mimosmjerna pravca zadana jednadžbama

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_i} + \lambda \overrightarrow{s_i}, \quad i = 1, 2. \tag{2.28}$$

Pokazat ćemo da dva mimosmjerna pravca imaju jedinstveno određenu zajedničku normalu. Vektor smjera $\overrightarrow{n}$ zajedničke normale n je vektor okomit i na $\overrightarrow{s_1}$ i na $\overrightarrow{s_2}$, pa je primjerice dan kao

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}. \tag{2.29}$$

Nadalje, kako se pravci p_1 i n sijeku, to oni određuju ravninu, nazovimo je π_1. Ta ravnina prolazi točkom T_1 i razapeta je vektorima $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{n}$. Stoga je njena jednadžba dana mješovitim produktom (vidi (2.14))

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{n}) = 0. \tag{2.30}$$

Analogno, točkom T_2 i vektorima $\overrightarrow{s_2}$ i $\overrightarrow{n}$ razapeta je ravnina, nazovimo je π_2, kojoj je jednadžba

$$(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{s_2}, \overrightarrow{n}) = 0. \tag{2.31}$$

Zajednička normala mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 određena je kao presječnica ravnina π_1 i π_2, dakle sustavom jednadžbi (2.30), (2.31).

Zadatak. Odredite zajedničku normalu pravaca

$$p_1 \ldots \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad p_2 \ldots \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}.$$

Jesu li zadani pravci mimosmjerni?

Rješenje. Pravci su mimosmjerni, jer se ne sijeku (provjerite) i nisu paralelni (njihovi vektori smjera $\overrightarrow{s_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{s_2} = (0, 0, 1)$ nisu kolinearni). Vektor smjera zajedničke normale je $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2} = (1, -1, 0)$. Prema tome, zajednička normala n dobiva se kao presjek ravnina

$$\pi_1 \ \ldots \ x + y - 2z = 0, \qquad \pi_2 \ \ldots \ x + y - 1 = 0.$$

Odavde slijedi da je parametarski oblik jednadžbe normale n je, primjerice

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 1 - t \\ z &= \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Odredimo sada udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2. Pokažimo najprije da udaljenost opet možemo računati kao udaljenost između određenih točaka.

Propozicija 2.7.3 *Neka su p_1, p_2 mimosmjerni pravci i neka je n njihova zajednička normala. Neka su N_1, N_2 nožišta zajedničke normale n s pravcima p_1, p_2. Tada je udaljenost mimosmjernih pravaca p_1, p_2 dana je sa*

$$d(p_1, p_2) = d(N_1, N_2).$$

Dokaz. Treba pokazati da je udaljenost točaka N_1, N_2 najmanja moguća od svih udaljenosti točaka $P_1 \in p_1$ i $P_2 \in p_2$. Zaista

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{P_1P_2}] &= [\overrightarrow{P_1N_1}] + [\overrightarrow{N_1N_2}] + [\overrightarrow{N_2P_2}] = \lambda_1 \overrightarrow{s_1} + [\overrightarrow{N_1N_2}] + \lambda_2 \overrightarrow{s_1} \\ &= [\overrightarrow{N_1N_2}] + (\lambda_1 \overrightarrow{s_1} + \lambda_2 \overrightarrow{s_1}). \end{aligned}$$

Prema tome je

$$|[\overrightarrow{P_1P_2}]|^2 = [\overrightarrow{N_1N_2}]^2 + (\lambda_1 \overrightarrow{s_1} + \lambda_2 \overrightarrow{s_2})^2 + 2\lambda_1 \overrightarrow{s_1} \cdot [\overrightarrow{N_1N_2}] + 2\lambda_2 \overrightarrow{s_2} \cdot [\overrightarrow{N_1N_2}].$$

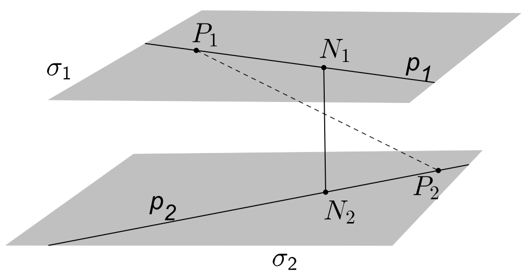
Kako je $\overrightarrow{s_1} \cdot [\overrightarrow{N_1N_2}] = \overrightarrow{s_2} \cdot [\overrightarrow{N_1N_2}] = 0$, to je

$$d(P_1, P_2)^2 = |[\overrightarrow{P_1P_2}]|^2 = d(N_1, N_2)^2 + (\lambda_1 \overrightarrow{s_1} + \lambda_2 \overrightarrow{s_2})^2 \geq d(N_1, N_2)^2.$$

$\square$

Izvedimo sada formulu za udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2. Iako smo dokazali da je ta udaljenost dana kao udaljenost točaka N_1, N_2, nećemo je odrediti na taj način, jer je zahtjeva složen račun. Izračunat ćemo a da ne određujemo koordinate točaka N_1, N_2.

Uočimo da postoje paralelne ravnine σ_1, σ_2 koje sadrže pravce p_1, p_2 (vektor normale tih ravnina je upravo vektor $\overrightarrow{n}$). Očito je udaljenost točaka N_1 i N_2 jednaka udaljenosti ravnina σ_1, σ_2. Udaljenost ravnina σ_1, σ_2 možemo izračunati kao, primjerice, udaljenost točke T_2 od



ravnine σ_1. Zapišimo jednadžbu ravnine σ_1 kao $(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_1}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$ (vidi (2.18)). Koristeći formulu (2.20) za udaljenost točke od ravnine, dobivamo

$$d(T_2, \sigma_1) = \frac{|(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|},$$

te koristeći (2.29) dobivamo

$$d(p_1, p_2) = \frac{|(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \cdot (\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2})|}{|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|} = \frac{|(\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{s_1}, \overrightarrow{s_2})|}{|\overrightarrow{s_1} \times \overrightarrow{s_2}|}.$$

Dokazali smo:

Propozicija 2.7.4 *Udaljenost mimosmjernih pravaca p_1 i p_2 zadanih jednadžbama (2.28) jednaka je*

$$d(p_1,p_2)=\frac{|(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2})|}{|\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}|}. \tag{2.32}$$

Zadatak. Odredite udaljenost mimosmjernih pravaca

$$p_1\ldots\begin{cases} x=t\\ y=t\\ z=t\end{cases},\qquad p_2\ldots\begin{cases} x=1\\ y=0\\ z=t\end{cases}.$$

Rješenje. Kako je $\overrightarrow{r_1}=(0,0,0)$, $\overrightarrow{s_1}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{r_2}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{s_2}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=(1,-1,0)$, uvrštavanjem u formulu (2.32) dobivamo $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Analizirajmo kada je

$$d(p_1,p_2)=0.$$

Znači li to nužno da se pravci sijeku?

Analizirajmo najprije kada je brojnik izraza (2.32) jednak 0, tj. ustanovimo kada vrijedi

$$(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2})=0.$$

Taj mješoviti produkt jednak je 0 ako i samo ako su vektori $\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{s_1}$, $\overrightarrow{s_2}$ komplanarni. To je moguće ako i samo ako pravci p_1, p_2 leže u istoj ravnini, što pak znači da se oni sijeku ili su paralelni.

U slučaju da su pravci p_1 i p_2 paralelni, njihovi vektori smjera $\overrightarrow{s_1}$ i $\overrightarrow{s_2}$ su kolinearni, pa je $\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=\overrightarrow{0}$, što znači da je i nazivnik izraza (2.32) jednak nuli. U tom slučaju udaljenost pravaca p_1 i p_2 računamo na drugačiji način (kako?).

Zaključujemo da je uvjet $d(p_1,p_2)=0$ nužan i dovoljan da se pravci p_1, p_2 sijeku, a uvjet $(\overrightarrow{r_2}-\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{s_1},\overrightarrow{s_2})=0$ je nužan i dovoljan da pravci p_1, p_2 leže u istoj ravnini.

Na kraju, odredimo još kut dvaju pravaca i kut pravca i ravnine u E^3.

Ako se pravci sijeku, tada smo već naznačili što podrazumijevamo pod pojmom kuta. Ako su p_1, p_2 mimosmjerni, tada je kut između njih definiran kao kut između pravaca p_1, p_2', gdje je pravac p_2' pravac paralelan pravcu p_2, a prolazi nekom točkom T_1 pravca p_1.

Kut dvaju pravaca određuje se pomoću vektora smjera pravaca, vidi formulu (2.11).

Uočimo da se pravci ne moraju sijeći (primjerice, okomiti pravci su upravo oni kojima su vektori smjera okomiti, pravci mogu biti i mimoilazni).

Nadalje, kut između pravca i ravnine definiran je kao kut između pravca i njegove ortogonalne projekcije na ravninu, dakle, kao kut dvaju pravaca.

Ako označimo kut između pravca i ravnine sa ψ, tada je očito $\phi=\frac{\pi}{2}-\psi$, gdje je ϕ kut između vektora smjera pravca i normale ravnine.

Sada je

$$\cos\phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \frac{|\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{s}||\overrightarrow{n}|},$$

pri čemu je

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \sin\psi.$$

Iz prethodnog slijedi da je kut ψ između pravca i ravnine dan s

$$\sin\psi = \frac{|\overrightarrow{s} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{s}||\overrightarrow{n}|}.$$

Zadaci

1. Kako zadajemo poluravninu u koordinatnom sustavu?

2. Zadana je ravnina π

$$\begin{aligned} x &= 2\lambda + \mu \\ y &= 1 - \lambda + 2\mu \\ z &= -1 + \lambda - \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   Napišite neku točku ravnine π.

   Siječe li pravac p

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= -2 - 2t \\ z &= 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   ravninu π?

3. Odredite a i b, tako da pravac $\frac{x-a}{3} = \frac{y+4}{b} = \frac{z}{2}$ prolazi točkom $(-4, -2, -4)$.

$$\left[\ a = 2,\ b = -1\ \right]$$

4. Odredite a i b, tako da točka $(-3, 2, 4)$ leži na pravcu $\frac{x-1}{2} = \frac{y-a}{2} = \frac{z+2}{b}$.

$$\left[\ a = 6,\ b = -3\ \right]$$

5. Dan je pravac

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

   Napišite tri različite točke tog pravca.

$$\left[\ \text{npr. } (3, 4, -1),\ (1, 5, -3),\ (-1, 6, -5)\ \right]$$

6. Dana je ravnina

$$\begin{cases} x = -2 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - 2\lambda + 4\mu \end{cases}$$

   Napišite kanonsku jednadžbu jednog pravca koji leži u toj ravnini.