Poglavlje 3

Krivulje i plohe u koordinatnom sustavu

3.1 Kružnica u E^2

Definicija 3.1.1 ***Kružnica*** *je skup točaka u ravnini* E^2 *jednako udaljenih od čvrste točke u ravnini.*

Tu čvrstu točku nazivamo ***središtem*** kružnice, a udaljenost od središta do bilo koje točke kružnice ***polumjerom*** ili ***radijusom***.

Izvedimo jednadžbu kružnice u Kartezijevom sustavu.

Neka je $S = (p, q)$ središte kružnice, r njen polumjer, a $T = (x, y)$ po volji odabrana točka kružnice. Tada je točka T točka kružnice ako i samo ako je $d^2(S, T) = r^2$, pa jednadžba kružnice glasi

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Nadalje, ispitajmo moguće položaje pravca i kružnice.

Neka su zadani pravac $y = kx + l$ i kružnica $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$. Određivanje zajedničkih točaka pravca i kružnice svodi se na određivanje rješenja sustava

$$\begin{cases} y = kx + l \\ (x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2. \end{cases}$$

Uvrštavanjem jednadžbe pravca u jednadžbu kružnice, dobivamo sljedeću kvadratnu jednadžbu za koordinatu x točke presjeka

$$(1 + k^2)x^2 + 2x\,(k(l - q) - p) + (l - q)^2 + p^2 - r^2 = 0. \tag{3.1}$$

Kako prethodna jednadžba može imati dva, jedno ili niti jedno (realno) rješenje, to se pravac i kružnica sijeku u dvije točke (pravac je ***sekanta*** kružnice), u jednoj točki (pravac je ***tangenta***[1] kružnice) ili se ne sijeku (pravac je ***pasanta*** kružnice).

[1]Općenito, tangentu krivulje u točki uvodimo kao *granični položaj* sekante za što nam treba pojam derivacije.

Pravac je tangenta kružnice ukoliko je diskriminanta jednadžbe (3.1) jednaka 0. Tada je

$$((l-q)k-p)^2-(1+k^2)\left((l-q)^2+p^2-r^2\right)=0,$$

odakle slijedi ***uvjet dodira (tangencijalnosti)*** pravca i kružnice

$$r^2(1+k^2)=(q-kp-l)^2. \tag{3.2}$$

Uočimo da se prethodni uvjet može izvesti i na sljedeći način. Pravac p je tangenta kružnice ako i samo ako je njegova udaljenost do središta kružnice jednaka polumjeru kružnice. Dakle, pravac p je tangenta ako i samo ako je

$$r=\frac{|q-kp-l|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Kvadriranjem prethodnog izraza dobivamo uvjet (3.2).

Zadatak. Izvedite uvjet da je pravac zadan jednadžbom $x=l$ tangenta kružnice $x^2+y^2=r^2$. Odredite uvjet dodira i koordinate dirališta.

$$\Big[\ l=\pm r; D_{1,2}=(\pm r,0)\ \Big]$$

Zadatak. Izvedite jednadžbu tangente kružnice $x^2+y^2=r^2$ u točki kružnice $D=(x_1,y_1)$.

Uputa. Uvjet dodira za kružnicu sa središtem u ishodištu glasi $r^2(1+k^2)=l^2$. Koordinate dirališta su $x_1=-\frac{kl}{1+k^2}$, $y_1=\frac{l}{1+k^2}$. Ukoliko je diralište $D=(x_1,y_1)$ zadano, iz tih jednakosti određujemo k,l; dobivamo $k=-\frac{x_1}{y_1}$, $l=\frac{r^2}{y_1}$. Jednadžba tangente glasi $x_1x+y_1y=r^2$.

Zadatak. Izvedite jednadžbu tangente kružnice $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ u točki kružnice $D=(x_1,y_1)$.
Uputa. Koristite pogodnu translaciju koordinatnog sustava (vidi Poglavlje 3.8) kako bi u novom sustavu kružnica bila zadana jednadžbom iz prethodnog zadatka.

Zadaci

1. Odredite jednadžbu kružnice koja
   (a) ima središte u točki $A(1,5)$ i dodiruje pravac $3x-2y-6=0$.
   (b) dodiruje x–os u točki $A=(6,0)$ i sadrži točku $B=(9,9)$.
   (c) dodiruje pravac $x-7y+10=0$ u točki s ordinatom 2, a središte joj se nalazi na pravcu $2x+y=0$.
   (d) ima polumjer 5 i dodiruje pravac $2x-y+4=0$ u točki s apscisom -1.
   (e) dodiruje pravce $x=8$ i $3x+4y=46$, te prolazi točkom $(-1,0)$.
   (f) dodiruje pravce $x+y-2=0$, $x-y+4=0$ i $x-7y=0$.

[a) $(x-1)^2+(y-5)^2=13$; b) $(x-6)^2+(y-5)^2=25$; c) $(x-6)^2+(y+12)^2=200$;
d) $(x+1-2\sqrt{5})^2+(y-2+\sqrt{5})^2=25$, $(x+1+2\sqrt{5})^2+(y-2-\sqrt{5})^2=25$;
e) $(x-3)^2+(y-3)^2=5^2$, $(x+81)^2+(y+39)^2=73^2$;
f) Postoje četiri takve kružnice. Upisana kružnica ima jednadžbu
$(x+1)^2+(y-\frac{7}{6})^2=\frac{121}{72}$.]

2. Odredite realne brojeve a, b tako da $2x^2 + ay^2 + bx - 5y + 3 = 0$ bude jednadžba kružnice koja prolazi točkom $(2, 3)$.

$$\left[\ a = 2,\ b = -7\ \right]$$

3. Napišite jednadžbu tangente na kružnicu $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$ u njenoj točki s apscisom 0, različitoj od ishodišta.

$$\left[\ y = -2x + 16\ \right]$$

4. Odredite površinu trokuta kojeg određuju tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = 50$ u točkama $(5, 5)$, $(-1, 7)$, $(-7, 1)$.

$$\left[\ \tfrac{75}{2}\ \right]$$

5. Napišite jednadžbe tangenata povučenih iz točke $(8, 8)$ na kružnicu $x^2 + y^2 = 32$, te odredite kut među njima.

$$\left[\ y = (2 \pm \sqrt{3})(x - 8) + 8,\ \varphi = 60^\circ\ \right]$$

6. Iz točke $(-9, 3)$ povučene su tangente na kružnicu $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 78 = 0$. Izračunajte udaljenost središta kružnice od tetive koja spaja dirališta tih tangenata.

$$\left[\ 7\ \right]$$

7. Dana je kružnica $x^2 + y^2 = 1$ i točke $A = (1, 0)$ i $B = (0, -1)$ na njoj. Provjerite da za bilo koju točku T na toj kružnici kut $\angle ATB$ iznosi $\dfrac{\pi}{4}$ ili $\dfrac{3\pi}{4}$. *(To je posljedica teorema o obodnom i središnjem kutu.)*

3.2 Polarni koordinatni sustav u E^2

U ravnini E^2 možemo uvesti koordinatni sustav i na sljedeći način.

Neka je O čvrsta točka i polupravac o čvrsti polupravac s početkom u točki O.

Tada je točka $T \in E^2$, $T \neq O$, jednoznačno je određena svojom udaljenošću $r = d(O, T)$ od točke O i kutom φ što ga polupravac OT zatvara s polupravcem o, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$. Uvedeni koordinatni sustav nazivamo ***polarnim sustavom***, a uređeni par (r, φ) ***polarnim koordinatama*** točke T. Točka O zove se ***pol***, a polupravac O ***polarna os***.

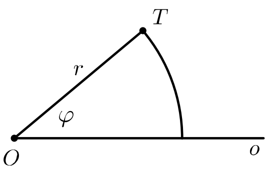
Odredimo vezu među pravokutnim i polarnim koordinatama točke T, pri čemu pravokutni koordinatni sustav ima ishodište u točki O, a polarna os o se podudara s osi apscisa i to njezinim pozitivnim dijelom. Očito je

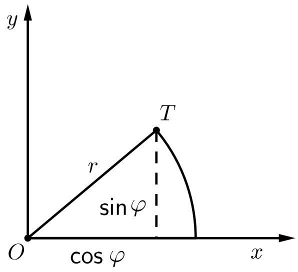
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Obratno,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

pri čemu kod određivanja mjere kuta φ uzimamo u obzir u kojem kvadrantu leži točka T.





Zadaci

1. U pravokutnom koordinatnom sustavu dane su točke $(60,0)$, $(-6,2\sqrt{3})$, $(0,-5)$, $(11,11)$, $(0,0)$, $(-3\sqrt{3},-3)$, $(9,-12)$, $(-200,100)$. Odredite njihove polarne koordinate.

   $\Big[$ $(60,0)$, $(4\sqrt{3},\frac{5\pi}{6})$, $(5,\frac{3\pi}{2})$, $(11\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$, $r=0$ (φ nije određen), $(6,\frac{7\pi}{6})$, $(15,\operatorname{arctg}-\frac{4}{3})$, $(100\sqrt{5},\operatorname{arctg}-\frac{1}{2})$ $\Big]$

2. Točke $(3,-\frac{2\pi}{3})$, $(20,\frac{7\pi}{6})$, $(15,-\frac{\pi}{2})$, $(10,\frac{3\pi}{4})$, $(12,-\frac{\pi}{4})$, $(7,\frac{\pi}{2})$, $(0,\frac{11\pi}{12})$, $(1,\frac{7\pi}{3})$ dane su svojim polarnim koordinatama (r,φ). Odredite njihove kartezijeve koordinate.

   $\Big[$ $(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2})$, $(-10\sqrt{3},-10)$, $(0,-15)$, $(-5\sqrt{2},5\sqrt{2})$, $(6\sqrt{2},-6\sqrt{2})$, $(0,7)$, $(0,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\Big]$

3. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut duljine stranice 1. Napišite koordinate svih njegovih vrhova i središta S u polarnom koordinatnom sustavu kojem je pol u točki A, a os je polupravac AD.

   $\Big[$ $A(r=0)$, $B(1,-\frac{\pi}{3})$, $C(\sqrt{3}-\frac{\pi}{6})$, $D(2,0)$, $E(\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$, $F(1,\frac{\pi}{3})$, $S(1,0)$ $\Big]$

4. Odredite polarne koordinate polovišta dužine $\overline{AB}$, ako je $A(12,\frac{4\pi}{9})$ i $B(12,-\frac{2\pi}{9})$.

   $\Big[$ $r=6,\ \varphi=\frac{\pi}{6}$ $\Big]$

5. Odredite udaljenost točaka $A(5,\frac{\pi}{4})$ i $B(8,-\frac{\pi}{12})$ zadanih polarnim koordinatama.

   $\Big[$ $d=7$ $\Big]$

6. Izvedite općenitu formulu za udaljenost dviju točaka s polarnim koordinatama (r_1,φ_1) i (r_2,φ_2).

   $\Big[$ $d^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$ $\Big]$

7. Napišite formulu za površinu trokuta OAB ako je $A=(r_1,\varphi_1)$, $B=(r_2,\varphi_2)$.

   $\Big[$ $P=\frac{1}{2}r_1r_2\sin|\varphi_2-\varphi_1|$ $\Big]$

8. Odredite u polarnom koordinatnom sustavu jednadžbu kružnice polumjera r_0 sa središtem u
   (a) polu polarnog sustava (b) točki S s koordinatama (r_1,φ_1) ?

$\left[\text{a) } r = r_0, \quad \text{b) } r^2 - 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1) = r_0^2 - r_1^2 \right]$

9. Odredite polarnu jednadžbu

   (a) polupravca s vrhom u polu koordinatnog sustava

   (b) pravca koji prolazi kroz pol

   (c) pravca koji ne prolazi kroz pol

$$\left[\text{a) } \varphi = \varphi_0, \quad \text{b) } \varphi - \varphi_0 = k\pi,\ k = 0, 1, \quad \text{c) } r = \frac{d}{a\cos\varphi + b\sin\varphi} \right]$$

10. Odredite kartezijeve jednadžbe krivulja:

   (a) $r\sin\varphi = 1$,

   (b) $\sqrt{5}\sin\varphi = 1$,

   (c) $r^2\sin 2\varphi = 2a^2$,

   (d) $\operatorname{tg}\varphi = 1$,

   (e) $r + \operatorname{tg}\varphi = 0$.

$$\left[\text{a) } y = 1; \ \text{b) } x - 2y = 0; \ \text{c) } xy = a^2; \ \text{d) } y = x; \ \text{e) } \sqrt{x^2 + y^2} = -\tfrac{y}{x} \right]$$

11. Odredite polarne jednadžbe krivulja:

   (a) $y = 1$,

   (b) $y^2 = 2px$,

   (c) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$,

   (d) $2xy = 1$,

   (e) $9x^2 + 4y^2 = 36$,

   (f) $x^2 - y^2 + 2xy = 0$.

$$\Big[\text{a) } r\sin\varphi = 1; \ \text{b) } r = \tfrac{2p}{\sin^2\varphi\cos\varphi}; \ \text{c) } r = 4(\sin\varphi + \cos\varphi);$$
$$\text{d) } r^2\sin 2\varphi = 1; \ \text{e) } r^2(4 + 5\cos^2\varphi) = 36; \ \text{f) } \varphi \in \{\tfrac{3\pi}{8}, \tfrac{7\pi}{8}, \tfrac{11\pi}{8}, \tfrac{15\pi}{8}\} \Big]$$

12. Skicirajte krivulje dane sljedećim polarnim jednadžbama:

   (a) $r = 2\cos\varphi$

   (b) $r = 4\sin\varphi$

   (c) $r = 1 + 2\cos\varphi$

13. U polarnim koordinatama dana je jednadžba $r^2\sin 2\varphi = 2$. Napišite jednadžbu te krivulje u kartezijevim koordinatama. Koja je to krivulja? Skicirajte ju.

$\left[\text{hiperbola } xy = 1 \right]$

14. Provjerite da je $r = \dfrac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ polarna jednadžba parabole $y^2 = 2px$, ako se polarna os podudara s x–osi, a pol se nalazi u tjemenu parabole.

15. Odredite sjecište krivulja čije su jednadžbe u polarnim koordinatama $r = \sin\varphi$ i $r = -\sqrt{3}\cos\varphi$. Koje su polarne, a koje kartezijeve koordinate sjecišta? Skicirajte te krivulje.

$$\left[\ (0,0),\ (-\tfrac{\sqrt{3}}{4}, \tfrac{3}{4}) \text{ odnosno } r = \tfrac{\sqrt{3}}{2},\ \varphi = \tfrac{2\pi}{3}\ \right]$$

16. Točka $A = (a, \alpha)$ dana je svojim polarnim koordinatama. Pravac p prolazi točkom A i paralelan je s polarnom osi. Odredite jednadžbu pravca p u polarnim koordinatama.

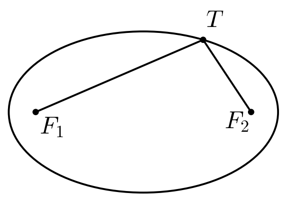
$$\left[\ r\sin\varphi = a\sin\alpha\ \right]$$

3.3 Elipsa

Definicija 3.3.1 *Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u ravnini E^2 udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani realan broj, $a > e$.* ***Elipsa*** *je skup točaka u E^2 za koje je zbroj udaljenosti od F_1 i F_2 konstantan i jednak $2a$*

$$\mathcal{E} = \left\{T \in E^2 : d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a\right\}.$$

Točke F_1, F_2 nazivamo ***žarištima*** ili ***fokusima elipse***.



Napomena. Na osnovu definicije, elipsu možemo konstruirati tzv. ***vrtlarskom konstrukcijom***. Ako se napne labava nit (lopatom u rukama vrtlara) koja je učvršćena u dvjema točkama (fokusi), točka u kojoj je nit napeta (lopatom) opisuje elipsu.

Odredimo jednadžbu elipse.

Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da točke F_1, F_2 leže na osi x i da je polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ ishodište sustava. Tada točke F_1, F_2 imaju koordinate

$$F_1 = (-e, 0), \quad F_2 = (e, 0).$$

Neka je T po volji odabrana točka elipse. Tada je

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a. \tag{3.3}$$

Pomnožimo li tu jednadžbu sa $\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$, sređivanjem dobivamo

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \frac{2ex}{a}. \tag{3.4}$$

Zbrajanjem (3.3) i (3.4) te kvadriranjem dobivamo

$$(x+e)^2 + y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2,$$

te je uz $b^2 = a^2 - e^2 > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.5}$$

Vrijedi i obratno: točka koja zadovoljava jednadžbu (3.5) je točka elipse.

Zaista, ako definiramo $e^2 = a^2 - b^2$, $F_1 = (-e, 0)$, $F_2 = (e, 0)$, tada su F_1, F_2 tražene točke iz definicije elipse. Pokažimo to.

Neka je $T = (x, y)$ točka koja zadovoljava jednadžbu (3.5). Treba pokazati da je $d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a = \text{konst.}$

Vrijedi

$$d(T, F_1) = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \qquad d(T, F_2) = \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$

pri čemu je $y^2 = b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Stoga je

$$d^2(T, F_1) = \left((x+e)^2 + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})\right) = \left(x^2\frac{a^2 - b^2}{a^2} + 2ex + e^2 + b^2\right) = \left(\frac{e}{a}x + a\right)^2.$$

Analogno je

$$d^2(T, F_2) = \left(a - \frac{e}{a}x\right)^2.$$

Iz toga slijedi

$$d(T, F_1) = \left|a + \frac{e}{a}x\right|, \qquad d(T, F_2) = \left|a - \frac{e}{a}x\right|.$$

Ukoliko utvrdimo predznake izraza napisanih u apsolutnim vrijednostima, apsolutne vrijednosti "možemo maknuti". Kako je $e \leq a$ i kako za apscisu x točke T mora vrijediti $-a \leq x \leq a$ (inače je već pribrojnik $\dfrac{x^2}{a^2}$ u jednadžbi (3.5) veći od 1), to je

$$d(T, F_1) = a + \frac{e}{a}x, \qquad d(T, F_2) = a - \frac{e}{a}x.$$

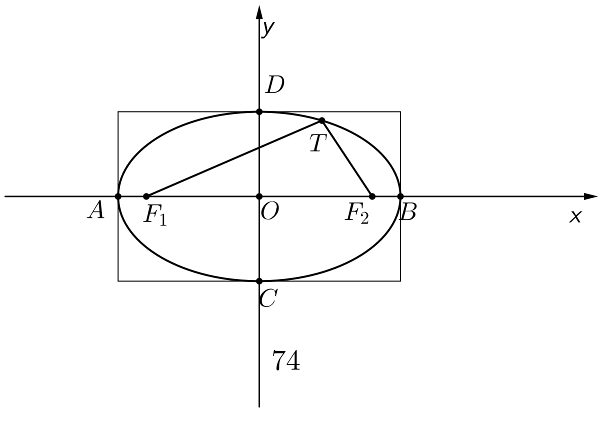
Sada je $d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a$. Time je obrat pokazan.

Naglasimo još jednom da je za točke na elipsi uvijek $|x| \leq a$. Zaista iz jednadžbe elipse (3.5) slijedi

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Uočavamo da je korijen definiran samo za $|x| \leq a$.

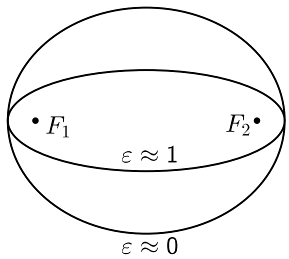
Analogno vrijedi i $|y| \leq b$. Odavde zaključujemo da je elipsa ograničena krivulja. Sadržana je u pravokutniku $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$.



Jednadžba (3.5) naziva se ***kanonskom jednadžbom elipse***. Ona se naziva i ***središnjom (centralnom) jednadžbom*** jer je ishodište koordinatnog sustava smješteno u središte ili centar elipse (elipsa je centralnosimetričan skup točaka sa središtem (centrom) simetrije u točki O).

Označimo $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (0, -b)$, $D = (0, b)$. Te se točke zovu ***tjemena elipse***. Dužina $\overline{AB}$ zove se ***glavna (velika) os***, dužine $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ glavne poluosi, a dužina $\overline{CD}$ ***sporedna (mala) os***, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ sporedne poluosi elipse. Prema tome, a je duljina glavne poluosi, a b sporedne poluosi.

Broj e zove se ***linearni ekscentricitet elipse***, $e < a$, a broj $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$, $0 < \varepsilon < 1$, ***numerički ekscentricitet elipse***. Kada je ε blizak 0, veličine a i b su bliske, pa je elipsa bliska kružnici. Još kažemo da kružnica ima numerički ekscentricitet jednak 0 (jer $a = b$). Ako je numerički ekscentricitet blizak 1, tada je elipsa "jako spljoštena".

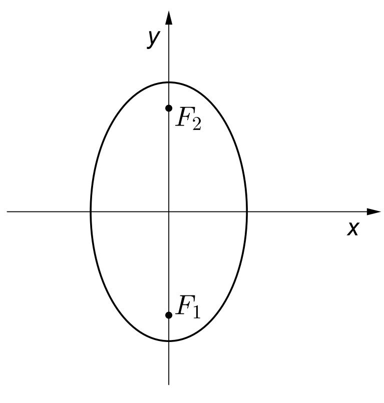


Napomena. J. Kepler (1571-1630) je ustanovio da se planeti gibaju oko Sunca po eliptičnim putanjama, sa Suncem u jednom fokusu. Primjerice, za Zemlju, duljine velike i male osi njezine eliptične putanje iznose (u milijunima km)

$$2a \approx 300.638, \qquad 2b \approx 300.590.$$

Prema tome, numerički ekscentricitet te elipse je $\varepsilon = 0.018$. Što možete zaključiti o toj elipsi?

Mjesec i umjetni sateliti također se gibaju po eliptičnim putanjama oko Zemlje. Orbite elektrona u atomu su elipse s jezgrom u jednom fokusu.



Napomena. Ako postavimo koordinatni sustav tako da fokusi određuju y-os tog sustava, tada je jednadžba takve elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad b < a.$$

U tom slučaju fokusi imaju koordinate $F_i = (0, \pm e)$, $e^2 = a^2 - b^2$.

Sljedeći nam je cilj analizirati te analitički opisati međusobni položaj pravca i elipse. Pravac $y = kx + l$ i elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ imaju dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku, što je vidljivo iz analize rješenja sustava određenog njihovim jednadžbama. Ukoliko iz jednadžbe elipse eliminiramo y koristeći jednadžbu pravca, dobivamo kvadratnu jednadžbu za x-koordinatu točke presjeka

$$x^2(a^2k^2 + b^2) + 2kla^2x + a^2(l^2 - b^2) = 0. \tag{3.6}$$

Pravac je tangenta elipse ukoliko ima jednu zajedničku točku s elipsom, što vrijedi ako i samo ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe (3.6) jednaka 0.

Sličnim postupkom kao kod kružnice dobivamo uvjet dodira (tangencijalnosti) pravca i elipse

$$k^2a^2 + b^2 = l^2.$$

Odredimo jednadžbu tangente u točki elipse $D_1 = (x_1, y_1)$ (diralište tangente). Rješenja jednadžbe (3.6) uz uvjet $D = 0$ su

$$x_1 = -\frac{ka^2}{l}, \ \ y_1 = \frac{b^2}{l}.$$

Uočimo da uvjet dodira povlači da je $l \neq 0$. Iz te dvije jednadžbe određujemo koeficijent smjera k i odsječak l tražene tangente

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}, \ \ l = \frac{b^2}{y_1}.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu $y = kx + l$ i sređivanjem dobivamo jednadžbu tangente elipse s diralištem u točki $D_1 = (x_1, y_1)$

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

Zadatak. Izvedite uvjet da je pravac zadan jednadžbom $x = l$ tangenta elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Odredite uvjet dodira i koordinate dirališta.

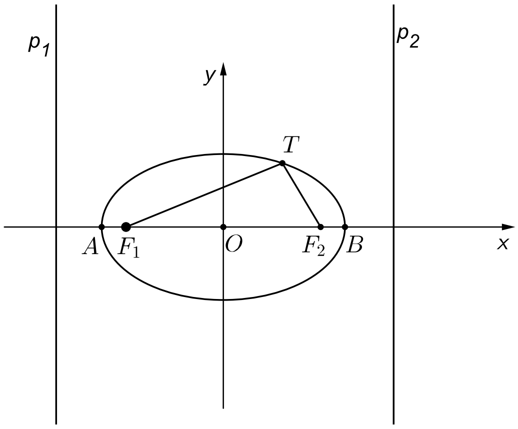
U daljnjem tekstu opisujemo još neka svojstva elipse.

Direktrisa ili ***ravnalica elipse*** je pravac p za koji vrijedi da je za svaku točku T elipse omjer udaljenosti od jednog žarišta elipse i od tog pravca konstantan realan broj $c > 0$, tj. vrijedi

$$\frac{d(T, F)}{d(T, p)} = c. \tag{3.7}$$

Postoji li direktrisa elipse? Ako postoji, ona ne smije sijeći elipsu (tada bi postojale točke elipse čija je udaljenost od direktrise jednaka 0 i one čija udaljenost nije 0). Također, kako su točke koje su simetrične s obzirom na veliku os elipse jednako udaljene od jednog fokusa, to moraju biti jednako udaljene i od direktrise.

Dakle, direktrisa mora biti okomita na veliku os elipse.



Uočimo još sljedeće: kako je elipsa simetrična u odnosu na sporednu os, tada, ako postoji jedna, onda postoje i dvije direktise. Iz dosad rečenog slijedi da bi jednadžbe direktrisa trebale biti oblika $x = \pm x_0$. Odredimo $x_0 > 0$.

Uzmimo fokus $F = (e, 0)$ i pravac p zadan jedndžbom $x = x_0$. Iz definicije direktrise, odnosno uvjeta (3.7), za točke $A = (-a, 0)$ i $B = (a, 0)$ dobivamo

$$\frac{a+e}{a+x_0} = c = \frac{a-e}{x_0-a}.$$

Izjednačavanje prvog i trećeg izraza dobivamo $x_0 = \frac{a^2}{e} = \frac{a}{\varepsilon}$. Sada slijedi da je $c = \varepsilon$. Dakle, ukoliko postoje direktrise elipse, tada bi njihove jednadžbe trebale glasiti

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}. \tag{3.8}$$

Sada se direktnom provjerom možemo uvjeriti da sve točke elipse zaista zadovoljavaju uvjet (3.7), odnosno da direktrise elipse postoje, i to dvije, te da su njihove jednadžbe (3.8). Pritom za fokus $F(e, 0)$ treba uzeti direktrisu $x = \frac{a}{\varepsilon}$, a za fokus $F(-e, 0)$ direktrisu $x = -\frac{a}{\varepsilon}$.

Zaista, neka je T točka elipse i neka su njezine koordinate $T = \left(x, \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)$. Uzimamo kao fokus točku $F(e, 0)$ i direktrisu $x = \frac{a}{\varepsilon}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
d(T,F) &= \sqrt{(e-x)^2 + (b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}})^2} = \sqrt{(e-x)^2 + b^2(1-\frac{x^2}{a^2})} \\
&= \sqrt{x^2(1-\frac{b^2}{a^2}) - 2ex + e^2 + b^2} \\
&= \sqrt{(\frac{e}{a}x - a)^2} = \frac{e}{a}\left|x - \frac{a^2}{e}\right| = \varepsilon|x - \frac{a}{\varepsilon}|, \\
d(T,p) &= \left|\frac{a}{\varepsilon} - x\right|.
\end{aligned}$$

Prema tome, dobili smo $\frac{d(T,F)}{d(T,p)} = \varepsilon$.

Vrijedi i obratno, ako točka T ravnine ispunjava uvjet (3.7), pri čemu je $0 < c = \varepsilon < 1$, tada je T točka elipse. Zaista, neka točka $T = (x, y)$ zadovoljava (3.7). Tada dobivamo (za fokus točku $F(e,0)$ i direktrisu $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$)

$$(x-e)^2 + y^2 = \varepsilon^2(\frac{a}{\varepsilon} - x)^2.$$

Za koordinate (x, y) točke T vrijedi

$$x^2(1-\varepsilon^2) - 2x(a\varepsilon - e) + e^2 - a^2 + y^2 = 0,$$

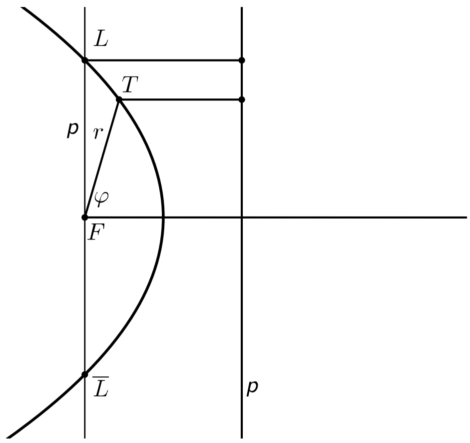
odnosno

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Stoga uvjet (3.7) uz $c = \varepsilon < 1$ karakterizira točke elipse. Ta karakterizacija elipse poznata je kao ***Pappus***[2]***-Boškovićeva***[3] ***definicija (karakterizacija)*** elipse.

Polazeći od Pappus-Boškovićeve karakterizacije elipse, izvedimo polarnu jednadžbu elipse.

Polarni sustav uvodimo tako da je fokus F elipse pol polarnog sustava, a polupravac s početkom u F okomit na direktrisu p polarna os (vidi sliku).



Tetivu elipse koja prolazi fokusom i koja je paralelna s direktrisom elipse nazivamo *latus rectum*. Označimo njenu duljinu s $2p$, a točke koje ona odsjeca na elipsi s L, $\bar{L}$. Kako je L točka elipse, vrijedi

$$d(L, F) = \varepsilon\, d(L, p).$$

Neka je sada T neka točka elipse, a (r, φ) njene polarne koordinate. Također vrijedi

$$d(T, F) = \varepsilon\, d(T, p).$$

Prema tome

$$p = d(L,F) = \varepsilon\, d(L,p) = \varepsilon\,(r\cos\varphi + d(T,p)) = \varepsilon\, r\cos\varphi + d(T,F) = \varepsilon\, r\cos\varphi + r.$$

Polarna jednadžba elipse, dakle, glasi

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}. \tag{3.9}$$

Veličinu p nazivamo i ***parametrom elipse***.

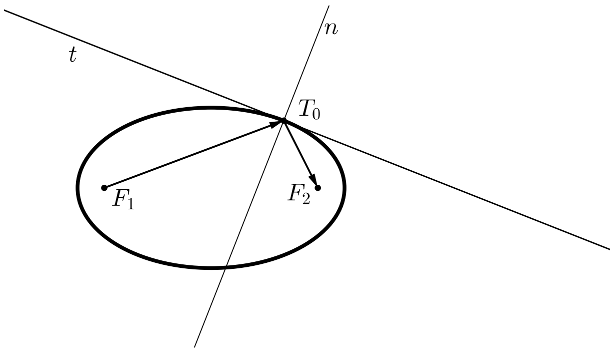
[2] Pappus Aleksandrijski – starogrčki matematičar, 3. st.

[3] Ruđer Bošković – hrvatski matematičar, astronom, fizičar, filozof; isusovac, 18. st

Ako elipsu zamislimo kao zrcalo, tada vrijedi sljedeće *zrcalno (optičko) svojstvo elipse*:

Teorem 3.3.1 *Ako zraka svjetlosti izlazi iz jednog fokusa i reflektira se od elipse, tada reflektirana zraka prolazi drugim fokusom.*

Odatle potiče naziv za fokuse (žarišta).



Matematičkim rječnikom prethodni teorem izričemo na sljedeći način:

Teorem 3.3.2 *Neka je T_0 točka elipse i neka je t tangenta elipse u točki T_0. Tada su kutovi koje zatvaraju spojnice F_1T_0, F_2T_0 s tangentom t jednaki.*

Dokaz. Označimo kut $\angle(\overline{F_1T_0}, t) = \alpha$, a kut $\angle(\overline{F_2T_0}, t) = \beta$. Treba pokazati $\alpha = \beta$.
Kut između pravaca računamo po formuli (2.10). Ako je $T_0 = (x_0, y_0)$, tada je koeficijent smjera tangente elipse u toj točki jednak $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$, a koeficijent smjera pravca T_0F_1 jednak $\dfrac{y_0}{x_0+e}$. Dobivamo

$$\text{tg}\ \alpha = \left|\frac{b^2}{y_0e}\right|.$$

Slično dobivamo i

$$\text{tg}\ \beta = \left|\frac{b^2}{y_0e}\right|.$$

Kako je $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, tvrdnja slijedi. $\square$

Teorem možemo izreći i na sljedeći način:

Korolar 3.3.3 *Neka je T_0 točka elipse i neka je n normala elipse u točki T_0. Tada su kutovi koje zatvaraju spojnice F_1T_0, F_2T_0 s normalom n jednaki.*

Takodjer i na sljedeći način:

Korolar 3.3.4 *Neka je T_0 točka elipse i neka je n normala elipse u točki T_0. Tada normala n raspolavlja unutrašnji kut između spojnica F_1T_0, F_2T_0.*

Korolar 3.3.5 *Neka je T_0 točka elipse i neka je t tangenta elipse u točki T_0. Tada tangenta t raspolavlja vanjski kut između spojnica F_1T_0, F_2T_0.*

Napomena. Zrcalno svojstvo elipse se koristi kod gradnje tzv. *prostorija šapta* (whispering galleries). Ako osoba stoji u jednom fokusu prostorije eliptičnog oblika i govori šaptom, tada ju osoba koja stoji u drugom fokusu čuje.