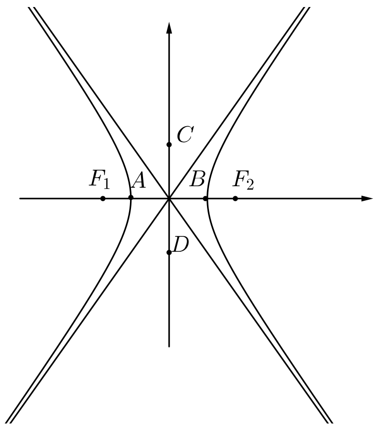
3.4 Hiperbola

Definicija 3.4.1 *Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u ravnini E^2 udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani pozitivan realan broj, $a < e$.* ***Hiperbola*** *je skup točaka u E^2 za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od F_1 i F_2 konstantna i jednaka $2a$*

$$\mathcal{H} = \left\{ T \in E^2 : |d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a \right\}.$$

Točke F_1, F_2 nazivamo ***žarištima*** ili ***fokusima hiperbole***.



Jednadžbu hiperbole izvodimo analogno kao jednadžbu elipse. Dobivamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.10}$$

gdje je $b^2 = e^2 - a^2$. Analogno kako kod elipse provjeravamo da sve točke skupa zadanog jednadžbom (3.10) su točke hiperbole opisane definicijom.

Iz jednadžbe (3.10) slijedi

$$y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

odakle zaključujemo da je y definiran za sve x, $|x| \geq a$, te je hiperbola neograničena krivulja koja se sastoji od dviju grana. Ne postoje točke hipebole za koje vrijedi $|x| \leq a$.

Točke $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$ zovemo ***tjemena hiperbole***. Dobivaju se kao presječne točke hiperbole i x-osi. Točke $C = (0, b)$, $D = (0, -b)$ nisu točke hiperbole. Dužinu $\overline{AB}$ zovemo ***realna os***, dužine $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ realne poluosi, a dužinu $\overline{CD}$ ***imaginarna os***, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ imaginarne poluosi hiperbole.

Jednadžba (3.10) također se naziva ***kanonskom jednadžbom hiperbole***. Naziva se i ***središnjom (centralnom) jednadžbom*** jer je ishodište koordinatnog sustava smještemo u središte ili centar hiperbole (hiperbola je centralnosimetričan skup točaka sa središtem simetrije u točki O).

Veličina e naziva se ***linearni ekscentricitet***, a $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ ***numerički ekscentricitet hiperbole***. Iz $e > a$ slijedi $\varepsilon > 1$.

Napomena. Ako postavimo koordinatni sustav tako da fokusi određuju y-os tog sustava, tada je jednadžba takve hiperbole

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Fokusi imaju koordinate $F_i = (0, \pm e)$, $i = 1, 2$, $e^2 = a^2 + b^2$.

Analizirajmo međusobni položaj pravca i hiperbole. Pravac i hiperbola mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Kao i kod elipse, kao tangentu hiperbole razmatrat ćemo pravac koji ima jednu zajedničku točku s hiperbolom.[4] Uvjet da je pravac $y = kx + l$ tangenta hiperbole (3.10) dobivamo na analogan način kao kod elipse (***uvjet dodira*** ili ***tangencijalnosti***)

$$k^2a^2 - b^2 = l^2.$$

Analogno se određuje ***jednadžba tangente*** u točki hiperbole $D_1 = (x_1, y_1)$ (diralište tangente). Dobivamo

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Zadatak. Izvedite uvjet da je pravac zadan jednadžbom $x = l$ tangenta hiperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Odredite uvjet dodira i koordinate dirališta.

Za razliku od elipse, hiperbola je neograničena krivulja i ima ***asimptote***. Asimptote hiperbole su pravci kojima se hiperbola sve više približava, a da ih ne siječe, kada se po nekoj njenoj grani giba prema beskonačnosti. Jednadžbe asimptota možemo odrediti na sljedeći intuitivan način: primijetimo da koordinate točke hiperbole možemo zapisati na sljedeći način

$$T(x, \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}).$$

Za "jako velike" vrijednosti od $|x|$, korijen $\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ se ponaša kao $\frac{|x|}{a}$ (jedinicu možemo zanemariti). Stoga se točka hiperbole "ponaša" kao točka pravca

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{3.11}$$

Jednadžbe (3.11) su jednadžbe asimptota hiperbole.

Uvjerimo se da su (3.11) jednadžbe asimptota još i sljedećim računom. Zaista, pokažimo sad da se točka gornje grane hiperbole $T_1 = (x_1, b\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1})$ sve više približava pravcu p zadanom jednadžbom $y = \dfrac{b}{a}x$ kad x teži u beskonačnost. Udaljenost točke T_1 od pravca p dana je izrazom

$$\begin{aligned}
d(T_1, p) &= \frac{|bx_1 - ab\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1}|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}|x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2}| \\
&= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left|\frac{x_1^2 - (x_1^2 - a^2)}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}\right| \\
&= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\frac{a^2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}
\end{aligned}$$

[4] Neke pravce koji zadovoljavaju taj uvjet ipak nećemo smatrati tangentama hiperbole.

iz čega je vidljivo da $d(T_1, p)$ teži u 0 kad x_1 teži u beskonačnost. Osim toga, jednostavno se provjeri da pravac p ne siječe hiperbolu.

Primijetimo da za hiperbolu, asimptote možemo definirati ekvivalentno kao pravce koji su granični položaji tangente kada se diralište tangente giba po grani hiperbole prema beskonačnosti. Odredimo jednadžbe asimptota iz prethodnog opisa tangente. Tangenta dira hiperbolu u točki s koordinatama

$$x_1 = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}, \qquad y_1 = \frac{b^2l}{b^2 - a^2k^2}.$$

Diralište je *beskonačno daleka točka* hiperbole ako i samo ako je $b^2 - a^2k^2 = 0$, odakle slijedi $k = \pm\dfrac{b}{a}$. Uvjet dodira povlači da je tada $l = 0$, pa su jednadžbe asimptota

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x.$$

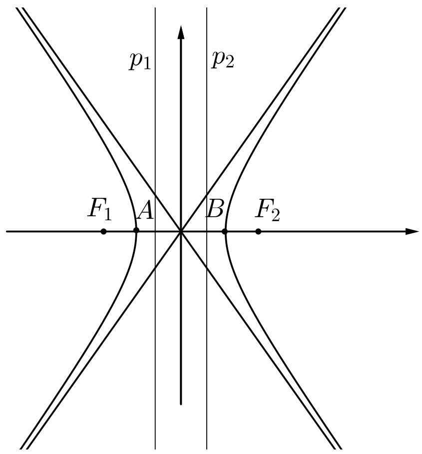
Zadatak. Odredite jednadžbe tangenata povučenih na hiperbolu $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ iz:

(i) točke $T_1 = (4, 2)$,

(ii) točke $T_2 = (2, 1)$.

[Obje točke $T_1 = (4, 2)$, $T_2 = (2, 1)$ su točke asipmtote. (i) Jednadžbe tangenata su $y = \frac{1}{2}x$ (asimptota), $y = \frac{5}{6}x - \frac{8}{6}$. (ii) Jednadžbe tangenata su $y = \frac{1}{2}x$ (asimptota), $x = 2$.]

Zadatak. U koliko točaka pravac paralelan asimptotama, $y = \pm\frac{b}{a}x + l$, siječe hiperbolu? Smatramo li taj pravac tangentom hiperbole?



Direktrisa ili ***ravnalica hiperbole*** je pravac p za koji vrijedi da je za svaku točku T hiperbole omjer

$$\frac{d(T, F)}{d(T, p)}, \tag{3.12}$$

konstantan realan broj $c > 0$. Kao i kod elipse, pokazuje se da hiperbola ima dvije direktrise dane jednadžbama

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{e}.$$

Nadalje, za hiperbolu također vrijedi ***Pappus-Boškovićeva karakterizacija***: Neka je F čvrsta točka, p čvrsti pravac u E^2. Skup točaka T u E^2 koje zadovoljavaju uvjet

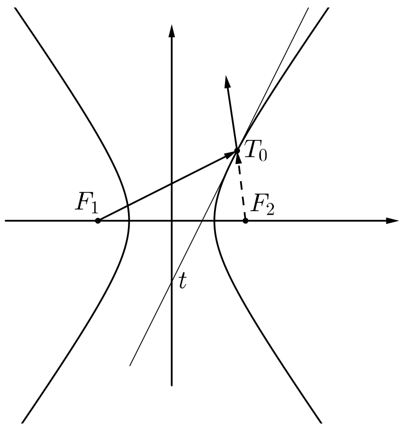
$$\frac{d(T,F)}{d(T,p)} = \varepsilon, \quad \varepsilon > 1$$

je hiperbola.

Polarna jednadžba hiperbole dana je s (3.9) uz uvjet $\varepsilon > 1$.

Izrecimo još i *zrcalno svojstvo za hiperbolu*:

Teorem 3.4.1 *Ako zraka svjetlosti izlazi iz jednog fokusa i reflektira se od hiperbole, tada reflektirana zraka izgleda kao da izlazi iz drugog fokusa.*



Zrcalno svojstvo izričemo i na sljedeći način:

Teorem 3.4.2 *Neka je T_0 točka hiperbole i neka je t tangenta hiperbole u točki T_0. Tada su kutovi koje zatvaraju spojnice F_1T_0, F_2T_0 s tangentom t jednaki.*

Ili:

Teorem 3.4.3 *Neka je T_0 točka hiperbole i neka je t tangenta hiperbole u točki T_0. Tada tangenta t raspolavlja unutrašnji kut između spojnica F_1T_0, F_2T_0.*

Napomena. Svojstvo koje definira hiperbolu koristi se u navigaciji. Brod na moru mjeri razliku udaljenosti od dva fiksna odašiljača (mjereći razliku u vremenu primanja sinkroniziranih radio-signala). Time je položaj broda smješten na hiperbolu kojoj su odašiljači u fokusima. Ako se koriste četiri odašiljača (tj. dva para odašiljača), tada je položaj broda na presjeku hiperbola.

Zadaci

1. Napišite kanonsku jednadžbu hiperbole kojoj je udaljenost između fokusa 8, a od fokusa do bližeg tjemena 2. Koliki joj je numerički ekscentritet?

$$\left[\ 3x^2 - y^2 = 12,\ \varepsilon = 2\ \right]$$

2. Napišite jednadžbu centralne hiperbole koja dodiruje kružnicu $x^2 + y^2 = 50$ u dvije točke, a jedna asimptota joj je paralelna s pravcem $3x + y - 4 = 0$.

$$\left[\ 9x^2 - y^2 = 450\ \right]$$

3. Napišite jednadžbu centralne hiperbole kojoj kružnica $x^2 + y^2 = 26$ prolazi kroz fokuse, a točka $(-6, 4)$ leži na asimptoti.

$$\left[\ 4x^2 - 9y^2 = 72\ \right]$$

4. Naći udaljenosti fokusa hiperbole $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ od njenih asimptota.

$$\left[\ 8\ \right]$$

5. Na hiperboli $3x^2 - 4y^2 = 72$ odredite točku najbližu pravcu $3x + 2y + 1 = 0$.

$$\left[\ (-6, 3)\ \right]$$

6. Na hiperboli $3x^2 - y^2 = 12$ odredite točku koja je dva puta bliža desnom nego lijevom fokusu.

$$\left[\ (3, \sqrt{15})\ \right]$$

7. U sjecištima pravca $x+y = 2$ i hiperbole $2x^2-y^2 = 8$ povučene su tangente na hiperbolu. U kojoj točki i pod kojim kutem se sijeku te tangente?

$$\left[\ \text{Tangente se sijeku u točki } (2, -4) \text{ pod kutem } \operatorname{arctg} \tfrac{2}{3} \approx 33^\circ 41'.\ \right]$$

8. Tetiva koja prolazi fokusom hiperbole (kojoj su duljine poluosi a, b) i koja je paralelna s njenom direktrisom naziva se *latus rectum.* Izračunajte duljinu te tetive u ovisnosti o a, b.

$$\left[\ \frac{2b^2}{a}\ \right]$$

9. Neka je $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ hiperbola, te neka je $P = (x_0, y_0)$ točka u ravnini elipse. Tada pravac p zadan s jednadžbom $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$ zovemo *polarom* točke P s obzirom na zadanu hiperbolu.

   Uvjerite se da je za vanjsku točku hiperbole P polara upravo spojnica dirališta tangenata iz P na hiperbolu.

10. Nađite jednadžbe tangenata iz točke $T = (7, \frac{13}{3})$ na hiperbolu $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ pomoću uvjeta dodira i pomoću polare.

$$\Big[\ 5x - 6y - 9 = 0,\ 41x - 60y - 27 = 0\ \Big]$$

11. Dokažite da je dirالište tangente hiperbole ujedno i polovište dužine koju ta tangenta odsjeca među asimptotama hiperbole.

12. Osobe A, B, C nalazile su se u točkama s koordinatama $(-8, 0)$, $(8, 0)$, $(8, 10)$ kad su začule eksploziju. Osobe B i C čule su je u isto vrijeme, a osoba A 12 sekundi kasnije. Odredite koordinate točke u kojoj je bila eksplozija. Brzina zvuka iznosi 1/3 km/s.

$$\Big[\ E(\sqrt{\tfrac{17}{3}}, 5)\ \Big]$$

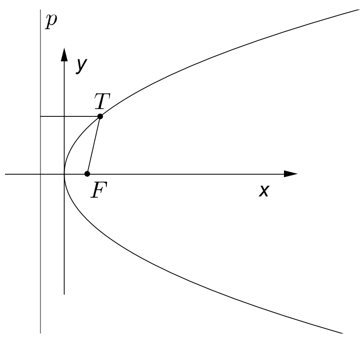
3.5 Parabola

Definicija 3.5.1 *Neka je p čvrsti pravac i F čvrsta točka u E^2 koja ne pripada pravcu p.* ***Parabola*** *je skup točaka u E^2 koje su jednako udaljene od p i F*

$$\mathcal{P} = \left\{ T \in E^2 : d(T, F) = d(T, p) \right\}.$$

Pravac p nazivamo ***ravnalicom*** ili ***direktrisom***, a točku F ***žarištem*** ili ***fokusom parabole***.

Uočimo odmah da je ova definicija jednaka Pappus-Boškovićevoj uz zahtjev $\varepsilon = 1$. Polarna jednadžba parabole dana je s (3.9) uz $\varepsilon = 1$.



Izvedimo sada direktno jednadžbu parabole u Kartezijevim koordinatama.

Prije nego što izaberemo pravokutni koordinatni sustav, definirajmo tjeme i os parabole. Ako označimo nožište okomice iz F na p sa N, tada je ***tjeme parabole*** polovište dužine $\overline{FN}$, označimo ga s A. Tjeme očito pripada paraboli. Povučenu okomicu na direktrisu p kroz F (stoga i kroz A) nazivamo ***os parabole***.

Neka je ishodište pravokutnog koordinatnog sustava u A, a x-os neka se podudara s osi parabole.

Neka je p parametar parabole, tj. polovina duljine tetive *latus rectum* (tetive koja prolazi fokusom i koja je paralelna s direktrisom). Krajnje točke te tetive, kao točke parabole, udaljene su jednako od fokusa F i od direktrise p i ta je udaljenost jednaka p.

Prema tome, udaljenost fokusa od direktrise jednaka je p, pa su koordinate fokusa $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$, a jednadžba direktrise p je $x = -\frac{p}{2}$.
Sada za po volji odabranu točku T parabole vrijedi

$$d(T,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \qquad d(T,p) = x + \frac{p}{2},$$

odakle izjednačavanjem i kvadriranjem dobivamo

$$y^2 = 2px. \tag{3.13}$$

To je tzv. ***kanonska jednadžba parabole***. Nazivamo je još i ***tjemenom (vršnom) jednadžbom***.

Vrijedi i obratno, točke (x, y) koje zadovoljavaju jednadžbu (2.1) su točke parabole. Zaista, kako je x uvijek nenegativan broj, to vrijedi

$$d(T,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \qquad d(T,p) = x + \frac{p}{2}.$$

Nadalje, kako vrijedi i (3.13), dobivamo $d(T,F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$, odakle je i $d(T,F) = x + \frac{p}{2}$.
Iz jednadžbe (3.13) slijedi da je y definiran za $x \geq 0$, te da je parabola neograničena krivulja.

Zadatak. Kako glasi jednadžba parabole u koordinatnom sustavu kojemu je ishodište u tjemenu parabole A, a y-os se podudara s osi parabole. Razmotrite razne mogućnosti s obzirom na otvor parabole.

Pravac i parabola mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku. Uvjet da je pravac $y = kx + l$, $k \neq 0$, $l \neq 0$, tangenta[5] parabole dobivamo na analogan način kao kod elipse (***uvjet dodira*** ili ***tangencijalnosti***)

$$p = 2kl.$$

Odredimo sada jednadžbu tangente u točki parabole $D_1 = (x_1, y_1)$ (dirالište tangente). Koordinate dirališta se dobivaju kao korijeni kvadratne jednadžbe

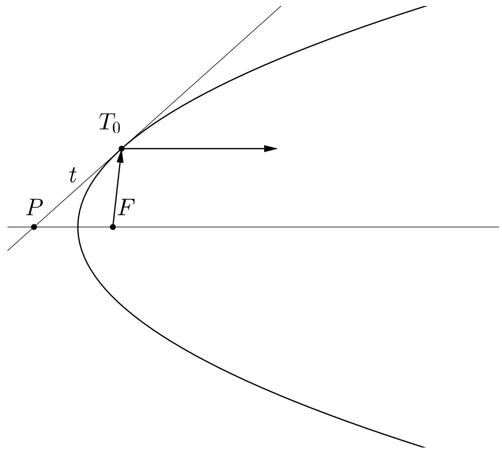
$$k^2x^2 + 2(kl - p)x + l^2 = 0$$

uz uvjet da je diskriminanta jednaka 0. Dobivamo $x_1 = \frac{p - kl}{k^2} = \frac{l}{k}$, $y_1 = 2l$. Odavde je $l = \frac{y_1}{2}$, $k = \frac{l}{x_1} = \frac{y_1}{2x_1}$ Uvrštavanjem u jednadžbu $y = kx + l$ i korištenjem činjenice da je diralište točka parabole, $y_1^2 = 2px_1$, dobivamo

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Zadatak. U koliko točaka pravci $y = kx$, $y = l$, $x = l$ sijeku parabolu? Jesu li ti pravci tangente parabole?

Izrecimo sada *zrcalno svojstvo za parabolu.* Ono glasi:



Teorem 3.5.1 *Ako zraka svjetlosti izlazi iz fokusa i reflektira se od parabole, tada je reflektirana zraka paralelna s osi parabole i obrnuto.*

Ili, drugačije rečeno:

Teorem 3.5.2 *Neka je T_0 točka parabole i t tangenta parabole u T_0. Tada je kut što ga tangenta t zatvara sa spojnicom FT_0 jednak kutu što ga tangenta zatvara s osi parabole.*

Dokaz. Označimo s P točku u kojoj tangenta presjeca x-os. Tada je tvrdnja teorem ekvivalenta s tvrdnjom da je trokut $\triangle T_0PF$ jednakokračan. U tu svrhu dovoljno je pokazati da je $d(F,P) = d(F,T_0)$. Kako je T_0 točka parabole, to je $T_0 = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$. Tangenta kojoj je jednadžba $yy_0 = p(x + x_0)$ presjeca x-os u točki $P = (-x_0, 0)$, $x_0 > 0$. Dakle

$$d(F,P) = \frac{p}{2} + x_0, \qquad d(F,T)^2 = \left(\frac{p}{2} + x_0\right)^2.$$

$\square$

Napomena. Zrcalno svojstvo za parabolu (i za plohu koja se zove eliptički paraboloid) koristi se kod paraboličnih antena. Parabola se javlja i u mnogim drugim situacijama, primjerice opisuje putanje projektila (kosi hitac), putanje kometa, u građevinarstvu itd.

Zadaci

1. Nađite jednadžbu parabole (u kanonskom obliku) s tjemenom u ishodištu koja sadrži točku $(2,3)$. Odredite fokus te parabole.

$$\left[\ y^2 = \tfrac{9}{2}x,\ (\tfrac{9}{8}, 0)\ \right]$$

2. Odredite dužinu tetive parabole $y^2 = 8x$ koja sadrži točku $T = (2,-4)$, a paralelna je s pravcem $2x - 2y - 3 = 0$.

[5] Neke pravce koji imaju jednu zajedničku točku s parabolom ipak nećemo smatrati njezinim tangentama.

$$\left[\ 16\sqrt{2}\ \right]$$

3. Odredite jednadžbe zajedničkih tangenata kružnice $10x^2+10y^2=81$ i parabole $y^2=4x$.

$$\left[\ y=\frac{1}{3}x+3,\ y=-\frac{1}{3}x-3\ \right]$$

4. Kolika je duljina tetive parabole $y^2=2px$ koja prolazi kroz njen fokus, i okomita je na os parabole? Ako je nacrtana parabola i označeno njeno tjeme, kako biste konstruirali os i fokus parabole?

$$\left[\ 2p\ \right]$$

5. Neka je A bilo koja točka na paraboli s fokusom F, neka je t tangenta na tu parabolu u točki A i neka je B točka u kojoj pravac t siječe direktrisu te parabole. Pokažite da je kut $\angle AFB$ uvijek pravi kut, neovisno o izboru točke A.

6. Dokažite da su tangente na parabolu povučene iz bilo koje točke njene direktrise međusobno okomite.

7. Neka je T točka parabole, a pravac n neka je normala parabole u toj točki. Neka je P projekcija točke T na os parabole, a točka N sjecište normale n s osi parabole. Dokažite da udaljenost točaka P i N ne ovisi o točki T.

8. Neka je F fokus parabole i p pravac kroz F okomit na os parabole. Neka je T bilo koja točka na paraboli koja se nalazi s iste strane pravca p kao i tjeme parabole. Ako je T' projekcija točke T na pravac p, pokažite da $|TT'|+|TF|$ ne ovisi o izboru točke T.

3.6 Elipsa, parabola i hiperbola kao konusni presjeci

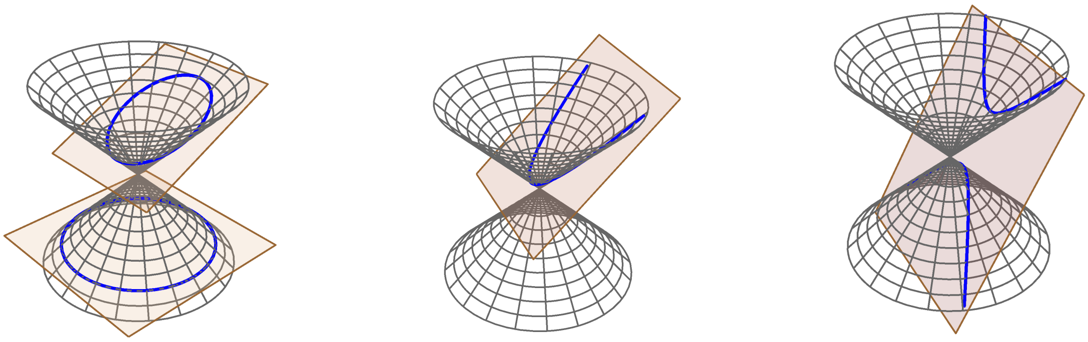
Recimo još da elipsu, hiperbolu i parabolu dobivamo i kao presjeke uspravnog kružnog stošca (stožaste plohe) ravninom. Preciznije, presjek uspravnog kružnog stošca (stožaste plohe) i ravnine nazivamo ***konusnim presjekom*** prema riječi konus (stožac). Razlikujemo degenerirane i nedegenerirane presjeke.

Degenerirane konusne presjeke dobivamo kad presječna ravnina prolazi vrhom stošca. To su sljedeći skupovi točaka:

1. sam vrh stošca (točka),
2. jedna izvodnica (ravnina je tangencijalna ili dirna),
3. dvije izvodnice.

Nedegenerirani konusni presjeci su:

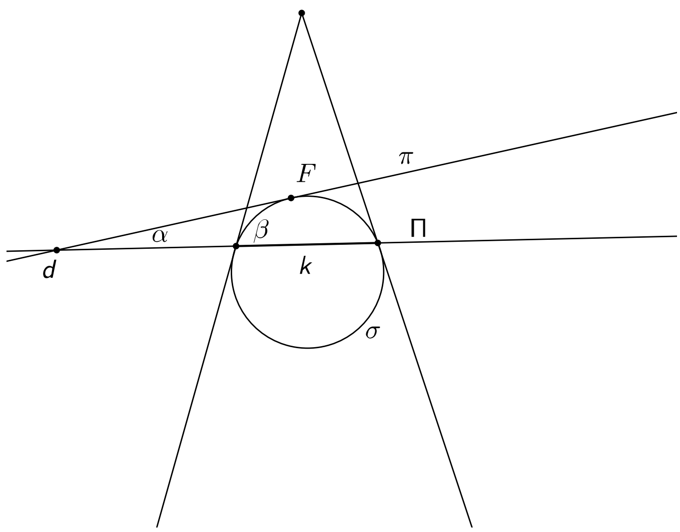
1. elipsa (presječna ravnina siječe sve izvodnice); specijalno ako je presječna ravnina okomita na os stošca presjek je kružnica,



2. parabola (presječna ravnina je paralelna s jednom izvodnicom),
3. hiperbola (presječna ravnina je paralelna s dvije izvodnice).

Sljedeći teorem nam govori da su *svi* nedegenerirani konusni presjeci upravo elipsa, hiperbola i parabola. Nazivamo ih ***konikama***. U dokazu teorema, koji iznosimo samo idejno, konike će biti opisane Pappus-Boškovićevom karakterizacijom.

Teorem 3.6.1 *Neka je $\mathcal{K}$ krivulja dobivena kao presjek uspravnog kružnog stošca i ravnine. Tada u ravnini postoji točka F i pravac p takvi da je omjer udaljenosti $\dfrac{d(T,F)}{d(T,p)}$ konstantan, gdje je $T \in \mathcal{K}$ po volji odabrana točka krivulje $\mathcal{K}$.*



Skica dokaza.

π je presječna ravnina

σ je sfera upisana u stožac

F je dirалište sfere σ i presječne ravnine π

k je kružnica diranja sfere σ i stošca

Π ravnina u kojoj leži kružnica k

d je pravac presjeka ravnina π i Π

α je kut između ravnina π i Π

β je kut između izvodnice i ravnine Π.

Može se pokazati da za svaku točku T krivulje $\mathcal{K}$ vrijedi

$$\frac{d(T,F)}{d(T,d)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \text{konst.}$$

što pokazuje da točke krivulje $\mathcal{K}$ zadovoljavaju Pappus-Boškovićevu karakterizaciju elipse, hiperbole ili parabole. $\square$

Zadaci

1. Dana je hiperbola $x^2 - y^2 = 8$. Napišite jednadžbu elipse koja ima iste fokuse kao i dana hiperbola, a prolazi točkom $(4, 6)$.

   $$\Big[\ 3x^2 + 4y^2 = 192\ \Big]$$

2. Odredite jednadžbu kružnice koja dodiruje asimptotu hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ u točki $(1, 1)$ i čije se središte nalazi na pravcu $x + 2y = 4$.

   $$\Big[\ x^2 + (y-2)^2 = 2\ \Big]$$

3. Točka A je fokus elipse $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ koji leži u poluravnini $x \geq 0$, a p je pravac paralelan sa $x + y = 0$ koji prolazi kroz A. Odredite jednadžbu kružnice koja dira pravac p u točki A, a središte joj leži na pravcu $x + y + 2 = 0$.

   $$\Big[\ x^2 + (y+2)^2 = 8\ \Big]$$

4. Napišite jednadžbu tangente na parabolu $y^2 = 4x$ koja je paralelna s jednom od asimptota hiperbole $9x^2 - 4y^2 = 36$. U kojoj točki ta tangenta dodiruje parabolu?

   $$\Big[\ y = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{2}{3},\ (\tfrac{4}{9}, \tfrac{4}{3});\ y = -\tfrac{3}{2}x - \tfrac{2}{3},\ (\tfrac{4}{9}, -\tfrac{4}{3})\ \Big]$$

5. Neka je $\mathcal{K}$ kružnica koja u točki $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ dodiruje pravac $4x - 10y = 27$, i prolazi točkom $(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. Neka je $\mathcal{H}$ hiperbola $3x^2 - 7y^2 = 5$. Odredite sjecišta hiperbole $\mathcal{H}$ i kružnice $\mathcal{K}$. Pod kojim se kutem $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ sijeku u sjecištu koje leži u prvom kvadrantu?

   $$\Big[\ \text{sjecišta su } (2,1),\ (2,-1),\ (-\tfrac{27}{10}, \tfrac{\sqrt{241}}{10}),\ (-\tfrac{27}{10}, -\tfrac{\sqrt{241}}{10}),\ \text{kut je } \operatorname{arctg} \tfrac{47}{16} \approx 71,2^\circ\ \Big]$$