Primjer. Odredimo jednadžbu krivulje $xy = 1$ u koordinatnom sustavu $\{O; x', y'\}$ koji je dobiven rotacijom sustava $\{O; x, y\}$ oko O za $\frac{\pi}{4}$ u pozitivnom smjeru.

Koordinate (x, y) točke u polaznom sustavu povezane su s koordinatama (x', y') te iste točke u rotiranom sustavu na sljedeći način (zbog (3.14))

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Prema tome, jednadžba krivulje $xy = 1$ u novom koordinatom sustavu glasi

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1.$$

Uočavamo da je ta krivulja hiperbola.

3.9 Krivulje drugog reda u $\mathbb{R}^2$

Promotrimo opći polinom 2. stupnja u varijablama x i y

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \tag{3.16}$$

gdje su a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{R}$ i bar jedan od koeficijenata a, b, c nije 0. Skup

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

nazivamo ***krivuljom 2. reda***.

Posebne primjere krivulja 2. reda upoznali smo i ranije (kružnica, elipsa, hiperbola, parabola). Cilj nam je pokazati da je skup $\mathcal{K}$ uvijek jedna od tih krivulja (u nedegeneriranom slučaju).

To ćemo postići tako da ćemo uvesti novi Kartezijev koordinatni sustav (dakle, nove koordinate x', y') u kojem će promatrani skup biti opisan već poznatim jednadžbama za elipsu, hiperbolu ili parabolu.

Dakle, uvođenjem novog koordinatnog sustava ne mijenjamo promatrani skup, nego pojednostavljujemo njegovu jednadžbu.

U tu svrhu promotrimo najprije ***rotaciju koordinatnog sustava*** za kut φ u pozitivnom smjeru. Označimo sa x, y osi polaznog sustava, a sa x', y' osi rotiranog sustava. Veza među koordinatama točke T u ta dva sustava dana je sa (3.14).

Stoga u novim koordinatama polinom f glasi

$$f(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f', \tag{3.17}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
a' &= a\cos^2\varphi + c\sin^2\varphi + b\sin 2\varphi,\\
b' &= (c-a)\cos\varphi\sin\varphi + b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \tfrac{1}{2}(c-a)\sin 2\varphi + b\cos 2\varphi,\\
c' &= a\sin^2\varphi + c\cos^2\varphi - b\sin 2\varphi,\\
d' &= d\cos\varphi + e\sin\varphi,\\
e' &= -d\sin\varphi + e\cos\varphi,\\
f' &= f.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Kut rotacije φ izabrat ćemo tako da se član b' u polinomu (3.17) poništava. Dakle, iz $b' = 0$ dobivamo

$$\operatorname{ctg}(2\varphi) = \frac{a-c}{2b}. \tag{3.19}$$

Sada polinom f glasi

$$f(x', y') = a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'. \tag{3.20}$$

Pokušajmo nadalje eliminirati koeficijente uz x' i y' (to je zapravo postupak svođenja izraza na puni kvadrat u svakoj varijabli).

Translantirajmo koordinatni sustav za vektor (v, w). Označimo sa x'', y'' nove koordinate. Veza sa starima koordinatama x', y' je dana sa (3.15), imajući na umu imena novih i starih koordinata (uoči, prije smo imali x, y kao stare i x', y' kao nove koordinate).

U novim koordinatama dobivamo

$$\begin{aligned} f(x'', y'') &= a'(x''+v)^2 + c'(y''+w)^2 + 2d'(x''+v) + 2e'(y''+w) + f' \\ &= a''x''^2 + c''y''^2 + 2d''x'' + 2e''y'' + f'', \end{aligned} \tag{3.21}$$

gdje su

$$\begin{aligned} a'' &= a', \\ c'' &= c', \\ d'' &= a'v + d', \\ e'' &= c'w + e', \\ f'' &= a'v^2 + c'w^2 + 2d'v + 2e'w + f'. \end{aligned}$$

Slučaj A. Ako su oba a' i c' različiti od 0, tj. $a'c' \neq 0$, tada v i w možemo jednoznačno odrediti iz zahtjeva $d'' = 0$, $e'' = 0$

$$v = -\frac{d'}{a'}, \;\; w = -\frac{e'}{c'},$$

pa možemo postići da polinom f poprima oblik

$$f(x'', y'') = a'x''^2 + c'y''^2 + f''. \tag{3.22}$$

Proanalizirajmo jednadžbu

$$f(x'', y'') = 0. \tag{3.23}$$

A1. Ako je $f'' = 0$, tada jednadžba (3.23) postaje

$$a'x''^2 + c'y''^2 = 0,$$

što predstavlja

(i) točku $(0, 0)$; ukoliko su a', c' istog predznaka,

(ii) par ukrštenih pravaca; ukoliko su a', c' različitih predznaka.
U tom se slučaju dobiva

$$\frac{y''^2}{x''^2} = -\frac{a'}{c'} > 0,$$

pa su jednadžbe pravaca

$$y'' = \pm\sqrt{-\frac{a'}{c'}}\, x''.$$

A2. Neka je $f'' \neq 0$ (i još od prije $a'c' \neq 0$).

(i) Ako su oba a', c' istog predznaka, ali suprotnog od f'', dobivamo

$$\frac{x''^2}{-\frac{f''}{a'}} + \frac{y''^2}{-\frac{f''}{c'}} = 1,$$

što predstavlja ***elipsu***.

(ii) Ako su a', c' različitih predznaka, npr. $a' > 0$, $c' < 0$ i neka je npr. $f'' < 0$, tada dobivamo

$$\frac{x''^2}{-\frac{f''}{a'}} - \frac{y''^2}{\frac{f''}{c'}} = 1,$$

što predstavlja ***hiperbolu***.

(iii) Ako su a', c', f'' istog predznaka, za skup $\mathcal{K}$ dobivamo prazan skup $\emptyset$, tj. nema točke iz $\mathbb{R}^2$ koja zadovoljava jednadžbu (3.23).

Uočimo da smo ovu analizu (slučaj A) napravili uz pretpostavku $a'c' \neq 0$. Lakim računom rabeći formule (3.18) može se pokazati da vrijedi

$$a'c' = ac - b^2,$$

gdje su a, b, c koeficijenti iz polaznog zapisa (3.16) polinoma f.

Ako polinomu (3.16) pridružimo determinantu

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2, \tag{3.24}$$

a polinomu (3.20) determinatu

$$\begin{vmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{vmatrix} = a'c' = ac - b^2, \tag{3.25}$$

tada zapravo vrijedi da su te determinante jednake.

Napomenimo još da prijelazom iz determinante (3.24) na determinantu oblika (3.25) u kojoj smo postigli dijagonalni oblik, određujemo ***svojstvene vrijednosti matrice*** $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. O tome više na **Linearnoj algebri**.

Slično se može provjeriti da je

$$\Delta := \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & f'' \end{vmatrix}.$$

Dakle, u slučaju A1 vrijedi $\Delta = 0$; posebno za (i) vrijedi $\delta > 0$, odnosno za (ii) $\delta < 0$.

U slučaju A2 vrijedi $\Delta \neq 0$.

Da bismo mogli dobro opisati podslučajeve od A2 uvedimo još jednu veličinu

$$S = a + c.$$

S je tzv. ***trag matrice*** $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$, tj. suma elemenata na dijagonali navedene matrice.

Za tu se veličinu također može provjeriti, rabeći (3.18), da je $S = a' + c'$.

Sad se lako vidi da:

za (i) vrijedi $\delta > 0$, $S\Delta < 0$,
za (iii) vrijedi $\delta > 0$, $S\Delta > 0$, a
za (ii) vrijedi $\delta < 0$, $S\Delta \neq 0$.

Ispišimo dobiveno u tablicu:

<table>
<tr><td rowspan="5">$\delta \neq 0$</td><td rowspan="2">$\Delta = 0$</td><td>$\delta > 0$ točka</td></tr>
<tr><td>$\delta < 0$ par ukrštenih pravaca</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta \neq 0$</td><td>$\delta > 0$, $S\Delta < 0$ elipsa</td></tr>
<tr><td>$\delta > 0$, $S\Delta > 0$ prazan skup</td></tr>
<tr><td>$\delta < 0$ hiperbola</td></tr>
</table>

ili, malo drugačije

<table>
<tr><td rowspan="5">$\delta \neq 0$</td><td rowspan="3">$\delta > 0$</td><td>$\Delta \neq 0$, $S\Delta < 0$ elipsa</td></tr>
<tr><td>$\Delta \neq 0$, $S\Delta > 0$ prazan skup</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$ točka</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\delta < 0$</td><td>$\Delta \neq 0$ hiperbola</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$ par ukrštenih pravaca</td></tr>
</table>

Navedimo još da se krivulje za koje je $\delta \neq 0$ zovu ***centralne***. To su krivulje koje imaju samo jedan centar ili središte, točku s obzirom na koju su centralnosimetrične. U nedegeneriranom slučaju, to su elipsa i hiperbola. Primijetimo također da su nedegenerirane krivulje (u ovom slučaju elipsa i hiperbola) opisane sa $\Delta \neq 0$.

Slučaj B. Ostaje razmotriti situaciju kad je $\delta = a'c' = ac - b^2 = 0$, dakle, kad je jedan od a', c' jednak 0 (ne mogu biti oba, jer tada (3.20) više nije polinom 2. stupnja).

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $c' = 0$. (Sjetimo se da su a', c' koeficijenti polinoma f u rotiranom sustavu.)

Dakle, imamo

$$f(x', y') = a'x'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'. \tag{3.26}$$

Translacijom koordinatnog sustava duž x'-osi

$$\begin{aligned} x' &= x'' + v \\ y' &= y'' \end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned} f(x'', y'') &= a'(x'' + v)^2 + 2d'(x'' + v) + 2e'y'' + f' \\ &= a''x''^2 + 2d''x'' + 2e''y'' + f'', \end{aligned}$$

gdje su

$$\begin{aligned} a'' &= a', \\ d'' &= a'v + d', \\ e'' &= e', \\ f'' &= a'v^2 + 2d'v + f'. \end{aligned}$$

Ako želimo $d'' = 0$, tada je $v = -\frac{d'}{a'}$, tj. $x'' = x' - \frac{d'}{a'}$.

Tada f'' postaje $f'' = -\frac{d'^2}{a'} + f'$, i promatrana jednadžba skupa $\mathcal{K}$ glasi

$$f(x'', y'') = a'x''^2 + 2e'y'' + f'' = 0. \tag{3.27}$$

Imamo sljedeće mogućnosti:

B1. Ako je $e''(= e') = 0$, tada jednadžba postaje

$$x''^2 = -\frac{f''}{a'}.$$

U ovisnosti o desnoj strani te jednadžbe imamo

(i) za $-\frac{f''}{a'} > 0$, jednadžba se transformira u $x'' = \pm\sqrt{-\frac{f''}{a'}}$ čime se dobivaju dva paralelna pravca;

(ii) za $-\frac{f''}{a'} = 0$, jednadžba postaje $x'' = 0$ što je jednadžba jednog pravca (y''-osi);

(iii) za $-\frac{f''}{a'} < 0$, nema točaka koje zadovoljavaju jednadžbu (3.27).

B2. Ako je $e''(= e') \neq 0$, translacijom sustava

$$\begin{aligned} x'' &= x''' \\ y'' &= y''' + w. \end{aligned}$$

možemo postići da slobodni član iščezne. Kako slobodni član u polinomu f glasi

$$f''' = f'' + 2e''w,$$

to uvjet $f''' = 0$ daje $w = -\frac{f''}{2e''}$. Tada jednadžba (3.27) postaje

$$f(x''', y''') = a'x'''^2 + 2e'''y''' = 0,$$

što predstavlja ***parabolu***.

Time smo razmotrili sve mogućnosti za analizu skupa $\mathcal{K}$.

Opišimo još slučaj B preko veličina Δ, δ, S.

U slučaju B1 imamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f'' \end{vmatrix} = a'f'' \cdot 0 = 0,$$

dok u slučaju B2 imamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & & e'' \\ 0 & e'' & 0 \end{vmatrix} = -a'e''^2 \neq 0.$$

(Opet $\Delta \neq 0$ opisuje nedegeneriranu koniku!)

Nadalje, u slučaju B1 promotrimo veličinu

$$-\frac{f''}{a'} = \frac{d'^2}{a'^2} - \frac{f'}{a'} = \frac{d'^2 - f'a'}{a'^2}.$$

Očito

za (i) vrijedi $d'^2 - f'a' > 0$,

za (ii) vrijedi $d'^2 - f'a' = 0$ i

za (iii) vrijedi $d'^2 - f'a' < 0$.

Lakim računom (koristeći (3.18) i činjenicu $c' = 0$, $e'' = e' = 0$) možemo se uvjeriti da je

$$T := d'^2 - f'a' = d^2 + e^2 - (a + c)f.$$

Navedimo još da su veličine Δ, δ, S tzv. ***invarijante*** krivulje 2. reda (ne mijenjaju se pri rotacijama i translacijama koordinatnog sustava), dok je veličina T ***poluinvarijanta*** (ne mijenja se pri rotaciji ali se mijenja pri translaciji).

Sada rezultat možemo ispisati u tablicu

<table>
<tr><td rowspan="4">$\delta = 0$</td><td>$\Delta \neq 0$</td><td>parabola</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$</td><td>$T > 0$ dva paralelna pravca</td></tr>
<tr><td>$T = 0$ jedan (dvostruki) pravac</td></tr>
<tr><td>$T < 0$ prazan skup</td></tr>
</table>

Napomena. Proučili smo krivulje zadane polinom prvog stupnja u varijablama x, y (pravci) i polinomom drugog stupnja (konike). Klasifikacija krivulja trećeg i većeg stupnja znatno je složenija. Nju je započeo I. Newton 1695. godine klasifikacijom kubika (krivulja zadanih polinomom 3. stupnja) na 72 različita tipa.