Rotacione površi

Ako površ Σ nastaje rotacijom neke krive γ oko neke prave p, koja se naziva *osom rotacije* tada za nastalu površ kažemo da je *rotaciona površ*. Svaka tačka M krive γ pri toj rotaciji opisuje kružnicu čiji se centar nalazi na osi rotacije, jednu takvu kružnicu možemo shvatiti kao generatrisu koja svojim kretanjem duž direktrise obrazuje Σ.

Primjer. Pretpostavimo da je kriva γ zadata kao presjek površi:

$$\gamma : \begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Pretpostavimo da je osa rotacije $z-$osa. Kružnica koja se kreće po krivoj γ se opisuje jednačinama $x^2 + y^2 = \eta, z = \alpha$. Parametri r i α se mijenjaju, ali tako da generatrisa (tj. kružnica) prolazi kroz direktrisu. Neka je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka površi Σ. Tada postoji položaj generatrise, pri kojem ona sadrži tačku M. To znači da postoje brojevi η i α_0 takvi da je

$$x^2 + y^2 = \eta, z = \alpha_0.$$

Ta generatrisa sa disektrisom γ ima zajedničku tačku, označimo je sa $M_0(x_0, y_0, z_0)$. To znači da je

$$x_0^2 + y_0^2 = \eta,\ z_0 = \alpha_0.$$

i

$$f_1(x_0, y_0, z_0) = 0,\ f_2(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Ove četiri jednakosti, daju nam mogućnost da na osnovu tri od njih, odredimo x_0, y_0, z_0 u obliku

$$x_0 = g_1(\eta, \alpha_0),\ y_0 = g_2(\eta, \alpha_0).$$

Uvrštavanjem ove jednakosti u četrvrtu jednačinu dobijamo jednakost oblika

$$\phi(\eta, \alpha_0) = 0,$$

odnosno, postavljajući $\eta = x^2 + y^2$, i $\alpha_0 = z$, dobijamo jednčinu

$$\phi(x^2 + y^2, z) = 0$$

koju zadovoljavaju koordinate x, y i z svih tačaka $M(x, y, z)$ površi Σ. Važi i sljedeće: Svaka tačka čije koordinate zadovoljavaju ovu jednačinu pripada površi Σ. Odavde slijedi da je $\phi(x^2 + y^2, z) = 0$ jednačina površi Σ.

Opisani postupak demostriraćemo na nekoliko konkretnih primjera-zadataka.

Zadatak. Naći jednačinu rotacione površi koja nastaje rotacijom prave $p : x + z = 0, y = 1$. Ovo je dakle direktrisa, a generatrisa je kružnica opisana jednačinama $x^2 + y^2 = \eta, z = \alpha$. Iz sistema jednačina

$$x + z = 0, y = 1, x^2 + y^2 = \eta, z = \alpha.$$

eliminišemo promjenljive x, y, z. Imamo $x = -\alpha, y = 1, z = \alpha$. Sada iz jednačine $x^2 + y^2 = \eta$ dobijamo da je $\alpha^2 + 1 = \eta$, odnosno dobijamo jednačinu rotacione površi.

$$z^2 + 1 = x^2 + y^2.$$

Primjer. Eliposoid

Ako je $k > 0$, i Σ površ čija je jednačina $F(x, y, z) = 0$, tada za površ Σ' čija je jednačina $F(x, ky, z) = 0$ kažemo da je dobijena iz površi Σ skaliranjem (sažimanjem ili istezanjem) duž $y-$ose.

Primijetimo da se rotacijom elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, y = 0$ oko $z-$ose dobija rotaciona površ koja se inače naziva *rotacionim elipsoidom.* U ovom slučaju, direktrisa je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, y = 0$, a generatrisa je kružnica $x^2 + y^2 = \eta, z = \alpha$. Iz sistema jednačina

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,\ y = 0, x^2 + y^2 = \eta, z = \alpha,$$

treba eliminisati promjenljive x, y, z. Iz druge i treće jednačine slijedi $x^2 = \eta, y = 0$, a četvrta jednačina daje $z = \alpha$. Ako sve to uvrstimo u prvu jednačinu dobićemo

$$\frac{\eta}{a^2} + \frac{\alpha^2}{c^2} = 1,$$

a pošto je $\eta = x^2 + y^2, \alpha = z$, iz ove jednakosti slijedi *jednačina rotacionog elipsoida*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ako sada y zamijenimo sa $\frac{a}{b}y$ (skaliranjem po $y-$osi) dobićemo jednačinu elipsoida (vidjeti sliku 1.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

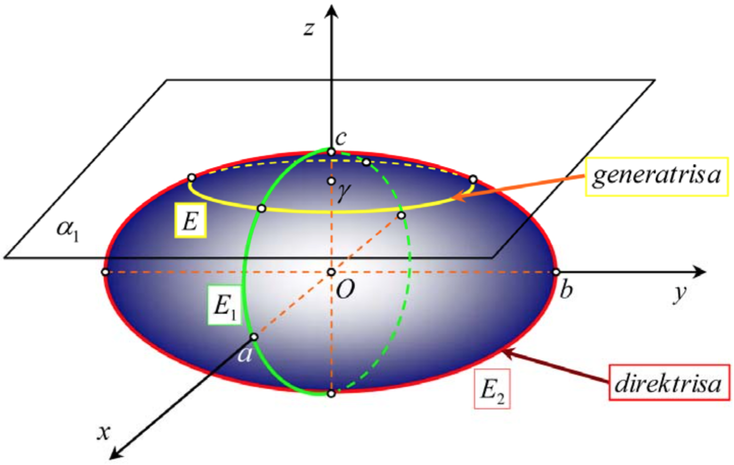
Brojevi a, b i c nazivaju se poluose elipsoida. Elipsoid je simetričan u odnosu na svaku koordinatnu ravan.

U slučaju kada su dvije poluose elipsoida jednake, onda nastaje rotacioni elipsoid. Ako su sve ose medjusobno jednake, elipsoid postaje sfera.

Primjer. Rotacijom hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$$

ko z-ose dobija se površ koja se naziva *rotacionim jednogranim hiperboloidom.* U ovom primjeru, direktrisa je hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}, y = 0$, a generatrisa je promjenljiva kružnica $x^2 +$



Slika 1: Elipsoid

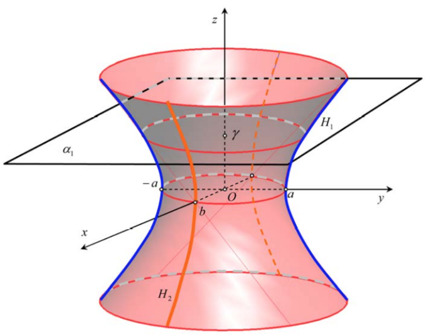
$y^2 = \eta, z = \alpha$ (promjenljivi su poluprečnik i ravan u kojoj leži). Ponavljajući postupak iz prethodnog primjera dobijamo jednačinu rotacionog jednogranog hiperboloida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Skalranjem po $y-$osi sa koeficijentom $k = \frac{a}{b}$ dobija se *jednačina jednogranog hiperboloida*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Rotacijom hiperbole



Slika 2: Jednograni hiperboloid

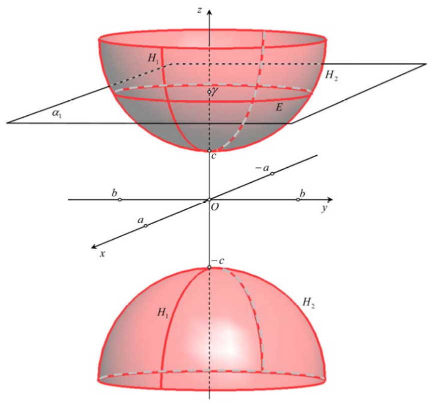
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = 0$$

oko ose Oz dobija se *rotacioni dvoghrani hiperboloid.* Direktrisa je hiperbola $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = 0$, a generatrisa je kružnica $x^2 + y^2 = \eta, z = \alpha$. Postupkom primijenjenim u prethodnom sluăcju dobijamo jednačinu rotacionog dvogranog hiperboloida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Skalranjem po $y-$osi sa koeficijentom $k = \frac{a}{b}$ dobija se *jednačina dvogranog hiperboloida*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Slika 3: Dvograni hiperboloid

Površ koja nastaje rotacijom parabole $x^2 = 2pz, y = 0$ oko $z-$ose naziva se *rotacionim paraboloidom.* Direktrisa ove površi je kriva $D : x^2 = 2pz, y = 0$ a generatrisa je pokretna kružnica $G : x^2 + y^2 = \eta, z = \alpha$.Da bismo dobili jednačinu rotracionog paraboloida treba iz sistema jednačina

$$x^2 = 2pz, y = 0, x^2 + y^2 = \eta, z = \alpha$$

eliminisati promjenljive x, y, z. Naprimjer, iz druge i treće jednačine dobijamo $x^2 = \eta$. Slijedi da je $\eta = 2p\alpha$. Ako sve ovo uvrstimo u treću jedmnačini dobićemo jednačinu rotacionog paraboloida:

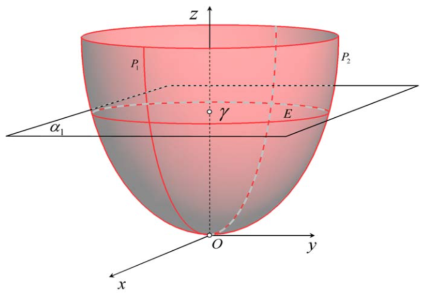
$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

odnosno

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p}.$$

Skaliranjem po osi Oy (tj. zamjenom promjenljive y sa $\sqrt{\frac{p}{q}}$), dobijamo *jednačinu paraboloida*

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}.$$



Slika 4: Eliptički paraboloid

Rotacija oko proizvoljne prave. U prethodnim. primjerima razmatrali smo površi, nastale rotacijom oko Oz ose. Sada ćemo razmotriti oštiji slučaj, kada kriva γ rotira oko proiozvoljne prave p. Tada svaka tačka M krive γ opisuje kružnicu k čiji se centar nalazi na pravoj p, čije se centar nalazi na toj pravoj i koja leži u ravni koja je normalnana istu pravu. I ovdje kružnicu k možemo shvatiti kao generatrisu koja svojim kretanjem duž direktrise formira rotacionu površ, koju ćemo označiti sa Σ.

Pretpostavimo da je direktrisa kriva γ zadata kao presjek dvije površi:

$$D : f_1(x, y, z) = 0, f_2(x, y, z) = 0.$$

Generatrisa je pokretna jružnica čiji centar klizi po pravoj p i koja leži u ravni ortogonalnoj na pravu p. Generatrisu G možze shvatiti kao presjek sfere promjenjivog poluprečnika, sa fiksiranim centrom $C(a, b, c)$ na pravoj p i ravni π koja je normalna na p i prolazi kroz tačku C. Vektor pravca prave p $\vec{N} = (l, m, n)$ je istovremeno i vektor normale ravni π.

Jednačina prave p glasi

$$p : \frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n},$$

a jednačina ravni *pi* je

$$lx + my + nz = \alpha,$$

Generatrsisa G koja se kreće može biti opisana jednačinama

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \lambda,\ lx + my + nz = \alpha.$$

Ako je $P(X,Y,Z)$ proizvoljna tačka rotacione površi, onda ona priipada nekoj od generatrisa, tj., za tu tačku postoje vrijednosti λ_0 i α_0 parametara λ i α, tako da je (

$$(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=\lambda_0,\ lX+mY+nZ=\alpha_0.$$

S druge strane, postoji tačka $M_0(x_0,y_0,z_0)$ koja je zajednička tačka $M_0(x_0my_0,z_0)$ direktrise i neke od pokretnih generatrisa, tako da je

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z-z_0)^2=\lambda_0,$$

$$lx_0+my_0+nz_0=\alpha_0$$

$$f_1(x_0,y_0,z_0)=0$$

$$f_2(x_0,y_0,z_0)=0.$$

Moguće je iz prvr tri jednačine izraziti x_0,y_0,z_0 kao funkcije prametara λ_0 i α_0. Uvrštavanjem u četvrtu jednačinu dobijamo

$$\phi(\lambda_0,\alpha_0)=0.$$

odnosno postavljajući $\lambda_0=(X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2=\ \alpha_0=lX+mY+nZ$,uzimajući u obzir da je $P(X,Y,Z)$ proizvoljna tačka površi dobijamo da koordinate svake tačke $M(x,y,z)$ površi Σ, zadovoljva jednačinu $\phi((x-a)^2+(y-b)^2+(z-a)^2,lx+my+nz)=0$, odnosno $F(x,y,z)=0$, gdje je $F(x,y,z)=\phi((x-a)^2+(y-b)^2+(z-a)^2,lx+my+nz)$. Dakle,

$$\Sigma\subseteq S:=\{M(x,y,z)\in E: F(x,y,z)=0\}.$$

Može se dokazati da važi i obrnuto, tj. da je $S\subseteq\Sigma$, odakle slijedi da je $\Sigma=S$ i da je

$$F(x,y,z)=0$$

jednačina površi Σ.

Na jednom kokretnom primjeru ilustrovaćemo kako funkcioniše opisani postupak

Primjer-Zadatak Odredićemo jednačinu rotacione površi §koja nastaje rotacijom ose Ox oko prave $p: x=y=z$. Odredimo jednačinu sfere promjenljivog poluprečnika, i pokretnu ravan, čiji su presjeci generatrise rotacione površi. Vektor pravca prave rotacije i vektor normale pokretne ravni je vektor $\vec{N}=(1,1,1)$, prava oko koje se vrši rotacija sadrži tačku $C(0,0,0)$, sfera promjenljivog poluprečnika ima centar u tački C. Dakle, generatrise su definisane sistemom jednačina

$$G: x^2+y^2+z^2=\lambda,\ x+y+z=\alpha,$$

a direktrisa je

$$D: y=0, z=0.$$

Iz druge, treće i četvrte jednačine slijedi $x=\alpha, y=0, z=0$, a kada ovo uvrstimo u prvu jednačinu, dobijamo $\alpha^2=\lambda$. Odavde, s obzirom da je $\lambda=x^2+y^2+z^2, \alpha=x+y+z$, imamo jednačinu povr si S

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2,$$

odnosno

$$xy + xz + yz = 0.$$

pa je to konusna površ.