Hiperbolički paraboloid. Neka je

$$D : x^2 = 2pz, y = 0$$

parabola u ravni Oxz i $G : y^2 = -2qz, x = 0$ parbola u ravni Oyz.. Neka kriva G klizi tako da tjeme ostaje na paraboli D, tako da uvijek leži u ravni paralelnoj Oyz.. Površ koju opiše pokretna kriva G, naziva se *hiperboličkim paraboloidom*, označimo tu površ sa S. Dakle, direktrisa je kriva D, a generatrisa koja je pokretna, se opisuje jednačinama

$$y^2 = -2q(z - \alpha), \;\; x = \lambda.$$

Ako je $P(x, y, z)$ proizvoljna tačka površ S, tada postoji generatrisa G koja prolazi kroz tačku P, odnosno postoje brojevi λ i aα, tj. postoje brojeve λ i α takvi da je

$$y^2 = -2q(z - \alpha), \;\; x = \lambda.$$

Tjeme $T(\lambda, 0, \alpha)$ generatrise leži uvijek na direktrisi, tj.

$$\lambda^2 = 2p\alpha,$$

Rješavanjem sisteme $y^2 = -2q(z - \alpha)$, $x = \lambda$, po parametrima λ i α, dobijamo

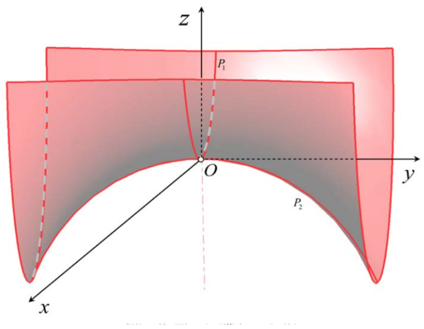
$$\lambda = x, \;\; \alpha = \frac{y^2}{2q} + z.$$

Ako sada uvrstimo ove vrijednosti u jednakost $\lambda^2 = 2p\alpha$, dobićemo da koordinate svake tačke površi S zadovoljavaju jednačinu

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}.$$

Moše dokazati i obrnuto tvrdjenje: svaka tačka koja zadovoljava prethodnu jednačinu pripada hiperboličkom paraboloidu. S. Dakle, to je jednačina hiperboiličkog paraboloida. Za ovu povrv s često se kaže da je sedlasta površ. Primijetimo da su presjeci ove površi i ravni $z = h$ je hiperbola

$$2h = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}, \;\; z = h.$$



Slika 5: Hiperbolički parabolioid

Površi drugog reda

Polionom drugog stepena promljenljivih x, y i z je funkcija oblika

$$P_2(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_1x + a_2y + a_3z + a_0,$$

gdje su $a_{ij}(i,j = 1,2,3), a_k$ (k=0,1,2,3) realni brojevi, pri čemu je bar jedan od brojeva a_{11}, a_{22}, a_{33} različit od nule.

Pretpostavimo da je u prostoru E zadat pravougli koordinatni sistem. Tada skup svih nula polinoma $P_2(x,y,z)$ $S = \{M(x,y,z) \in E : P_2(x,y,z)\}$. Za jednačinu $P_2(x,y,z) = 0$ kažemo da je jednačina skupa S. O tome kako može izgledati skup S govori sljedeća teofrema.

Teorema. *Skup S nula polinoma je jedan od sljedećih skupova*

1. Prazan skup 2. Skup od jedne tačke 3. Prava 4. Ravan 5. Unija dvije prave (paralelne ili ne) 6. Eliptički cilindar 7. Hiperbolički cilindar 8. Parabolički cilindar 9. Elipsoid 10. Jednograni hiperboloid 11. Dvograni hiperboloid 12. Eliptički konus 13. Eliptički paraboloid 14. Hiperbolički paraboloid

Napomenimo da se površi 6) do 14) nazivaju *površima drugog reda.*

Primjer. Pretpostavimo da je zadata površ drugog reda $S : P_2(x,y,z) = 0$ i vektor $\vec{a} = (l,m,n)$. Treba odrediti jednačinu cilindrične površi Σ čija je generatrisa paralelna vektoru $\vec{a}$, opisanu oko površi S.

Prvo uočimo tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$, koja pripada i generatrisi i zadatoj površi S. Jednačina generatrise koja prolazi kroz tačku M_0 glasi:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t.$$

Odavde slijedi da je $x_0 = x - lt, y_0 = y - mt, z_0 = z - nt$, a pošto tačka $M_0 \in S$, imamo

$$P_2(x - lt, y - mt, z - nt) = 0.$$

Pošto je P_2 polinom drugog stepena, ova jednačina je kvadratna jednačina po t, koja se, dakle može napisati u obliku

$$Q(x,y,z)t^2 + R(x,y,z)t + T(x,y,z) = 0.$$

S obzirom da generatrisa G i površ S imaju tačno jednu zajedničku tačku, diskriminanta ove jednačiner jednaka je nuli. Tako zaključujemo da kooordinate svake tačke površi Σ zadovoljavaju jednačinu

$$[R(x,y,z)]^2 - 4Q(x,y,z)T(x,y,z) = 0.$$

Može se takodje dokazati da svaka tačka čje koordinate zadovoljavaju ovu jednačinu pripadaju površi Σ. Dakle, ova jednčina je jednačina površi Σ.

Primjer. Rijšićemo sljedeći konkretan zadatak. Naći jednačinu konusne površi čije je tjeme $T(0,0,2)$, koja je opisana oko sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Prvo primjetimo da je jednačina prave koja prolazi kroz tjeme $T(0,0,2)$ konusne površi i tačku $M_0(x_0, y_0, z_0)$ na sferi (to znači da je $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$) glasi

$$\frac{x - x_0}{-x_0} = \frac{y - y_0}{-y_0} = \frac{z - z_0}{2 - z_0} = t.$$

Ovo je zapravo jednčina generatrise. Iz ove jednačine slijedi

$$x_0 = \frac{x}{1-t},\ y_0 = \frac{y}{1-t},\ z_0 = \frac{z - 2t}{1-t}.$$

Uvrstimo ove vrijednosti u jednačinu $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$. Dobijamo

$$x^2 + y^2 + (z - 2t)^2 = (1 - t)^2$$

odnosno

$$3t^2 + (2 - 4z)t + x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Ova jednačina po promjenjivoj t mora imati tačno jedno rje. senje, pa je njena diskriminanta jednaka nuli:

$$4(1 - 2z)^2 - 12(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$$

što je ekvivalentno sa

$$3x^2 + 3y^2 - z^2 + 4z - 2 = 0.$$

i ovo je jednačina konusne površi sa tjemenom $T(0,0,2)$

Zadaci

Konusne površi

I Naći jednačinu konusne površi čija je direektrisa D a tjeme T ako je . 1. $D: x^2+y^2=1, y=0,\ T(0,0,0)$, [Rez: $x^2+y^2--z^2=0$]

2.$D: y^2--2x=0,\ z=0,\ T(0,0,0)$, [Rez: $x^2--2z(z-y)+z-y=0$]

3. $D: x^2+y^2=1, y=0,\ T(0,1,-1)$, [Rez: $(y+z)^2-2x(z+1)=0$]

4.$D: (x-1)^2+(y-1)^2=1, z=1,\ T(0,0,0)$, [Rez: $x^2+y^2+z^2-2xz-2yz=0$]

5. $D: x^2+4z^2-6x+2z+3=0, y=0,\ T(1,1,1)$, [Rez: $x^2+4y^2+4z^2+4xy-10yz-6x-2y+2z+3=0$]

Cilindrične površi

I Naći jednačinu cilindričke površi čija je direektrisa D a verktor pravca $\vec{a}$ ako je

1. $D: x^2+4z^2-1=0, y=0,\ \vec{a}=(1,1,1)$, [Rez: $x^2+5y^2+4z^2-2xy-8yz-1=0$]

2. $D: 2y^2+3z^2-x=0,\ x-1=0,\ \vec{a}=(-1,2,3)$ [Rez: $2(y+2x-2)^2+3(z+3x-3)^2-1=0$]

3. $D: y=x^2,\ z=0,\ \vec{a}=(1,1,1)$, [Rez: $x^2+z^2-2xz-y+z=0$].

4. $D: x^2+y^2=9\ z=1,\ \vec{a}=(2,-3,4)$, [Rez: $16x^2+16y^2+13z^2+24yz-16xz+16x-24y-26z-131=0$]

5. $D: x^2+y^2-1=0,\ z=0,\ \vec{a}=(1,1,1)$, [Rez: $(x--z)^2+(y-z)^2-1=0$]

6. $D: x^2+y^2+z^2=a^2,\ x+y=0,\ \vec{a}=(1,1,0)$, [Rez: $(x--y)^2+2(z^2-a^2)=0$].

Rotacione površi

I Naći jednačinu površi Σ koja nastaje rotacijom krive γ oko prave l ako je

1. $\gamma: z^2=2py, x=0,\ \ l: x=0, y=0.$ $[Rez.\, z^4=4p^2(x^2+y^2)$

2. $\gamma: zy=1, x=0,\ \ l: x=0, y=0.$ $[Rez.\, z=\pm(x^2 3+y^2)^{-1/2}$

3. $\gamma: (y--c)^2+z^2=a^2, x=0,\ \ l: x=0, y=0.$ [Rez. $(\sqrt{x^2+y^2}-c)^2+z^2=a^2$.

4$\gamma: z+y=1, x=0,\ \ l: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$ $[Rez.\, x^2-y^2-z^2-4xy+4xz-2yz+8x+2y+2z-1=0$

Površi drugog reda. Površi opisane oko površi drugog reda

1. Naći jednačinu cilindrične površi koja je opisana oko sfere $x^2+y^2+z^2=25$, i čija je generatrisa paralelna vektoru $veca=(1,1,1)$. [Rez. $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz-75=0$.

2. Naći jednačinu konusa sa tjemenom $T(0,0,5)$ koji je opisan oko sfere $x^2+y^2+z^2=9$,. [Rez. $16x^2+16y^2-9z^2+90z-225=0$.

3. Naći jednačinu cilindrične površi koja je opisana oko sfere $x^2+y^2+z^2=25$, i čija je izvodnica paralelna vektoru $veca=(2,1,0)$. [Rez: $x^2+4y^2+5z^2-4xy-125=0.$]

4. Naći jednačinu konusa sa tjemenom $T(3,0,-1)$ koji je opisan oko elipse $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1$. [Rez. $4x^2--15y^2--6z^2--12xz--36x+24z+66=0$.