1 Slučajni opit

Eksperiment (opit) je moćan metod za spoznaju stvarnosti. Opitom se ispituje odnos između uslova i posljedice. Deterministički opit-isti uslovi uvijek dovode do istog rezultata. Kod slučajnog opita ostvarivanje određenih uslova ne dovodi do determinističkog rezultata. Teorija vjerovatnoće izučava matematički model slučajnog opita.

Primjer 1.1 *Novčić se baca jednom.* $\Omega = \{P, G\}$. Ω *se naziva prostor ishoda, a njegovi elementi su ishodi (elementarni događaji).*

Primjer 1.2 *Novčić se baca četiri puta.* $\Omega = \{PPPP, PPPG, ..., GGGG\}$.

Primjer 1.3 *Kocka se baca jednom.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Primjer 1.4 *Kocka se baca dva puta.* $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$.

Primjer 1.5 *Novčić se baca do prvog padanja pisma.* $\Omega = \{P, GP, GGP, ...\}$.

Primjer 1.6 *Strijelac gađa u kružnu metu.*

Primjer 1.7 *Braunovo kretanje.*

Rezultate slučajnih opita ćemo zvati događajima. Valjano zadavanje događaja podrazumijeva da nakon obavljenog opita, moramo znati odgovor na pitanje: da li je u opitu realizovan događaj koji smo zadali. Odgovor je pozitivan ako ostvareni ishod odgovara događaju, u suprotnom odgovor je negativan. Dakle, realizacija događaja je ekvivalentna sa realizacijom ishoda koji događaju odgovara te se događaj identifikuje sa skupom ishoda koji tom događaju odgovaraju. U opitu u kome dva puta bacamo kocku možemo govoriti o događaju A da je zbir palih brojeva 5. Skup ishoda koji odgovaraju događaju A ćemo takođe označiti sa A i $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$.

Neka su A i B skupovi-događaji iz Ω.

$A \bigcup B = \{\omega : \omega \in A \text{ ili } \omega \in B\}$. Iz ovog zapisa zaključujemo: događaj $A \bigcup B$ se realizuje ako i samo ako se realizuje ili događaj A ili događaj B (ili ekvivalentno rečenom, događaj $A \bigcup B$ se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja A ili B). Dakle, $A \bigcup B$ je događaj da se realizuje ili događaj A ili događaj B ($A \bigcup B$ je događaj da se realizuje bar jedan od događaja A ili B).

$A\bigcap B=\{\omega:\ \omega\in A \text{ i } \omega\in B\}$. Iz ovog zapisa zaključujemo: događaj $A\bigcap B$ se realizuje ako i samo ako se realizuje i događaj A i događaj B (ili ekvivalentno rečenom, događaj $A\bigcap B$ se realizuje ako i samo ako se realizuju oba događaja A i B). Dakle, $A\bigcap B$ je događaj da se realizuje i događaj A i događaj B ($A\bigcap B$ je događaj da se realizuju oba događaja A i B).

$A\backslash B=\{\omega:\omega\in A,\ \omega\notin B\}$ je događaj da se realizuje događaj A i ne realizuje događaj B.

$A^c=\{\omega:\omega\notin A\}$ je događaj (događaj suprotan događaju A) da se u opitu ne realizuje događaj A.

Ako je $A\subset B$ tada kažemo da događaj A implicira (povlači) događaj B. Naime, iz realizacije događaja A slijedi da je realizovan neki ishod iz A, a zbog $A\subset B$, taj ishod je iz B. Zaključujemo, realizovan je događaj B. Relacija $A\subset B$ se može interpretirati i na sljedeći način: događaj A se ne može ostvariti ako se ne ostvari događaj B. Osoba ne može biti majka ako nije žena.

Ω je izvjestan događaj. $\emptyset$ je nemoguć događaj.

Primjer 1.8 *U opitu u kome se kocka baca dva puta A je događaj da je zbir palih brojeva $\leqslant 3$, B je događaj da u drugom bacanju padne paran broj, C je događaj da u drugom bacanju padne šestica. Naći $A\bigcup B, A\bigcap B, A^c, B\backslash A$ i dokazati da je $C\subseteq B$.*

U tekstu je bm skraćenica za beskonačno mnogo, a ss za skoro svi.

$$A^*=\limsup_{n\to\infty}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{\omega \text{ se nalazi u bm članova niza} A_n, n=1,2,...\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.$$

Na jeziku Teorije vjerovatnoće A^* je događaj da se realizuje bm događaja iz niza događaja $A_n, n=1,2,....$ Dokažimo da je zapis $A^*=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ korektan.

Pretpostavimo da je $\omega\in A^*$ tj. ω se nalazi u bm članova niza $A_n, n=1,2,...\Rightarrow\omega\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ (u suprotnom se ne bi nalazilo u $A_1,A_2,A_3...$ a samim tim ni u bm članova niza $A_n, n=1,2,....$), $\omega\in\bigcup_{k=2}^{\infty}A_k$ (u suprotnom se ne bi nalazilo u $A_2,A_3...$ a samim tim ni u bm članova niza $A_n, n=1,2,....$), ...$\Rightarrow\omega\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

$\omega\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Rightarrow\omega\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\ \omega\in\bigcup_{k=2}^{\infty}A_k,\ ....\ \Rightarrow$ iz $\omega\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, zaključujemo da postoji $k_1\in\mathbb{N}$ takav da je $\omega\in A_{k_1}$ (k_1 je indeks prvog skupa iz niza $A_n, n=1,2,....$ u kome se nalazi ω); iz

$\omega \in \bigcup_{k=k_1+1}^{\infty} A_k$, zaključujemo da postoji $k_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $\omega \in A_{k_2}$ (k_2 je indeks prvog skupa iz niza $A_n, n = k_1+1, k_1+2, ...$ u kome se nalazi ω),... $\Rightarrow$

$$\omega \in A_{k_1}, \omega \in A_{k_2}, \omega \in A_{k_3}, ..., k_1 < k_2 < k_3, ... \Rightarrow$$

ω se nalazi u bm članova niza $A_n, n = 1, 2, ...$

$$A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n =$$

$= \{\omega$ se nalazi u ss članovima niza$A_n, n = 1, 2, ...$ (u svim osim u eventualno njih konačno mnogo)$\}$
$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$

Na jeziku Teorije vjerovatnoće A_* je događaj da se realizuju ss članovi niza $A_n, n = 1, 2, ...$ (svi osim eventualno njih konačno mnogo).

Ako je $A_* = A^* = A$ tada se A naziva graničnim skupom niza $A_n, n = 1, 2, ...$ i koristi se zapis $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Ako je niz A_n monotono opadajući tada je $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ako je niz A_n monotono rastući tada je $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Primjer 1.9 *Naći* $\lim_{n\to\infty} A_n$. *a)* $A_n = [0, \frac{n}{n+1}), n = 1, 2, ...$ *b)* $A_n = (0, \frac{1}{n}), n = 1, 2, ...$

Primjer 1.10 *Ako je* $A_{2j} = B; A_{2j-1} = C, j = 1, 2, 3, ...$ *naći* A_* *i* A^*.

Primjer 1.11 *Ako je* $A_n = K((\frac{(-1)^n}{n}, 0), 1), n = 1, 2, 3, ...$ *naći* A_* *i* A^*.

Pokažimo da je $K((0,0),1) \subseteq A_*$. Neka je $T(x,y), x^2+y^2 < 1, x > 0$. Biramo n tako da je $\frac{1}{2n} < x$ i dobijamo da je $\mid C_{2n}T \mid < \mid OT \mid < 1$ gdje je $C_{2n} = (\frac{1}{2n}, 0)$.

Biramo n tako da je $\frac{1}{2n+1} < 1 - |OT|$. Koristimo oznaku $C_{2n+1} = (-\frac{1}{2n+1}, 0)$. Na osnovu relacije trougla imamo $|C_{2n+1}T| < |C_{2n+1}O| + |OT| < 1$. U slučaju $T(x,y), x^2+y^2 < 1, x = 0.$ lako se dokazuje da se izborom dovoljno velikog n dobija da je $|C_{2n+1}T| < 1$ i $|C_{2n}T| < 1$. Uraditi!

Neka je $T(x,y), x^2+y^2 = 1, x > 0$. Biramo n tako da je $\frac{1}{2n} < x \Rightarrow |C_{2n}T| < |OT| = 1$ i ovo važi za sve centre sa parnim indeksima većim od $2n$. Međutim, za svako n važi $|C_{2n+1}T| > 1$. Tačke sa koordinatama $(0,1)$ i $(0,-1)$ su van domašaja naših skupova.

Neka je $T(x,y), x^2+y^2>1, x>0$. Biramo n tako da je $\frac{1}{2n}<|OT|-1$. Na osnovu relacije trougla imamo $|OT|<|OC_{2n+1}|+|C_{2n+1}T|$ te zaključujemo da je $|C_{2n+1}T|>1$. Slučaj $T(x,y), x^2+y^2=1, x=0$. se lako analizira. Dakle, $A_*=K((0,0),1)$, dok je A^* zatvoreni centralni jedinični krug bez tačaka $(0,1)$ i $(0,-1)$.

Primjer 1.12 *Neka je $q_n, n=1,2...$ jedno nizanje racionalnih brojeva sa segmenta $[0,1]$ i neka je zadat niz skupova $A_n=[0,q_n], n=1,2,...$. Naći A_* i A^*. ($A_*=\{0\}; A^*=[0.1)$.)*

Neke od podskupova prostora ishoda Ω ćemo nazivati događajima. Prirodno je zahtijevati da kolekciji događaja pripada izvjestan događaj Ω, nemoguć događaj $\emptyset$ i da je ta kolekcija zatvorena u odnosu na skupovne operacije. Kolekciju događaja ćemo označavati sa $\mathfrak{F}$.

Definicija 1.1 *Kolekcija događaja $\mathfrak{F}$ je polje ako važi:*

(A1) $\Omega \in \mathfrak{F}$.

(A2) Ako $A \in \mathfrak{F}$ tada $A^c \in \mathfrak{F}$.

(A3) Ako $A \in \mathfrak{F}$ i $B \in \mathfrak{F}$ tada $A \bigcup B \in \mathfrak{F}$.

Definicija 1.2 *Kolekcija događaja $\mathfrak{F}$ je σ polje ako važe (A1), (A2), (A3) i*

(A4) Ako $A_1 \in \mathfrak{F}$, $A_2 \in \mathfrak{F}$,... tada $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.

σ polje je zatvoreno u odnosu na prebrojivo presjecanje. Zaista, ako $A_1 \in \mathfrak{F}$, $A_2 \in \mathfrak{F}$,... tada je $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c\big)^c \in \mathfrak{F}$. Lako se dokazuje da je σ polje zatvoreno u odnosu na operaciju razlike skupova. Dokazuje se da je presjek σ polja takođe σ polje.

Primjeri

1.) $\Omega=\{1,2,3,...\}$ i kolekciju $\mathfrak{F}$ čine skupovi iz Ω koji su konačni ili su njihovi komplementi konačni. Kolekcija $\mathfrak{F}$ je polje koje nije σ polje.

2.) Neka je

$$[a,b)=\{x \in \mathbf{R}:\ a \leqslant x < b\},\ -\infty < a < b \leqslant \infty$$

i za potrebe primjera smatraćemo da je $[-\infty,b)=(-\infty,b)$ (ovo radimo da bi komplement skupa $[a,\infty)$ bio skup istog tipa). Kolekcija $\mathcal{C}$ koju čine konačne unije disjunktnih upravo formiranih skupova tipa $[a,b)$ je polje.

Neka je $\mathcal{C}$ kolekcija događaja koja nije σ polje. Označimo sa $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ familiju sigma polja koja sadrže $\mathcal{C}$. Pomenuta familija nije prazna, u njoj se nalazi $\mathbb{P}(\Omega)$. Koristeći tvrđenje da je presjek σ polje takođe σ polje, zaključujemo da je

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$$

minimalno σ polje koje sadrži $\mathcal{C}$. Naime, σ polje $\sigma(\mathcal{C})$ je kao presjek sadržano u svim σ poljima koja sadrže $\mathcal{C}$ te je minimalno. Minimalno σ polje koje sadrži $\mathcal{C}$ se takođe naziva minimalnim σ poljem generisanim kolekcijom $\mathcal{C}$

Borelovo σ polje na R. Neka je $\Omega = \mathbf{R}$, neka je $\mathcal{C}_1$ kolekcija intervala (a, b), neka je $\mathcal{C}_2$ kolekcija polusegmenata $[a, b)$, neka je $\mathcal{C}_3$ kolekcija polusegmenata $(a, b]$, neka je $\mathcal{C}_4$ kolekcija segmenata $[a, b]$, neka je $\mathcal{C}_5$ kolekcija intervala $(-\infty, a)$, neka je $\mathcal{C}_6$ kolekcija intervala (a, ∞), neka je $\mathcal{C}_7$ kolekcija otvorenih skupova i neka je $\mathcal{C}_8$ kolekcija zatvorenih skupova. Tada je

$$\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2) = ... = \sigma(\mathcal{C}_8),$$

a ovo sigma polje se naziva Borelovo σ polje na $\mathbf{R}$ i označava se sa $\mathcal{B}^1$.

Dokažimo da je $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_5)$. Neka je (a, b) proizvoljni interval i neka je a_n niz koji strogo monotono opada ka a. Kako je $[a, b) = (-\infty, b) \backslash (-\infty, a)$ slijedi $[a, b) \in \sigma(\mathcal{C}_5)$. Iz $(a, b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b)$ slijedi $(a, b) \in \sigma(\mathcal{C}_5)$. Dakle, $\sigma(\mathcal{C}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_5)$. Neka je $a \geqslant 0$ (lako se dokazuje i za ostale vrijednosti a). Kako je $(-\infty, a) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (-n, a)$ slijedi $(-\infty, a) \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. Dakle, $\sigma(\mathcal{C}_5) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$.

2 Vjerovatnosni prostor

Pokažimo kako se obično formira matematički model slučajnog opita sa konačnim brojem ishoda. Kažemo obično jer postoje mogućnosti i drugačijeg modeliranja ali ti slučaji su praksi neinteresantni i pripadaju teorijskoj egzotici. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$. σ polje događaja $\mathfrak{F}$ je $\mathbb{P}(\Omega)$. Svakom ishodu $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$, pridružujemo masu $p(\omega_i), i = 1, 2, ..., N$ koju nazivamo vjerovatnoća ishoda ω_i i od vjerovatnoća zahtijevamo da važi:

a) $0 \leqslant p(\omega_i) \leqslant 1, i = 1, 2, ..., N$.

b) $p(\omega_1) + p(\omega_2) + ... + p(\omega_N) = 1$.

Polazeći od vjerovatnoća ishoda zadajemo vjerovatnoću svakog događaja $A \in \mathfrak{F}$ po formuli

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p(\omega_i).$$

Trojka $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ predstavlja matematički model opita i naziva se vjerovatnosni prostor opita. Lako se dokazuje da važi:

1) $P(\emptyset) = 0$; 2) $P(\Omega) = 1$; 3) $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$; 4) $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Zapaža se da se u dugim serijama opita relativna učestalost događaja ponaša stabilno. Ta stabilnost učestalosti ukazuje na to da se objektivno prisutna slučajnost realizacije događaja može kvantitativno mjeriti. Matematička formalizacija gore pomenutog zapažanja se ostvaruje kroz zakon velikih brojeva. Teorija vjerovatnoće se ne bavi zadatkom pravilnog zadavanja vjerovatnoća $p_i, i = 1, 2, ..., N$. Pri zadavanju ovih vjerovatnoća vodi se računa o intuitivnoj predstavi broja p_i kao relativnoj učestalosti ishoda ω_i u dugoj seriji opita. Jedan od glavnih vjerovatnosnih zadataka je da na osnovu vjerovatnoća ishoda tražimo vjerovatnoće složenih događaja.

U slučaju opita u kom je skup Ω konačan ili prebrojiv, uobičajeno, σ polje događaja $\mathfrak{F}$ je $\mathbb{P}(\Omega)$. Svakom ishodu ω_i, $i \in I$, pridružujemo masu $p(\omega_i), i \in I$, koju nazivamo vjerovatnoća ishoda ω_i i od vjerovatnoća zahtijevamo da važi:

a) $0 \leqslant p(\omega_i) \leqslant 1, i \in I$,

b) $\sum_{i \in I} p(\omega_i) = 1$.

Vjerovatnoća svakog događaja $A \in \mathfrak{F}$ se računa po formuli

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p(\omega_i).$$

U praksi se često susreću opiti sa konačno mnogo ravnopravnih ishoda. Zbog ravnopravnosti ishoda u slučaju kada je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ razumno je svakom ishodu pridružiti vjerovatnoću $\frac{1}{N}$ tj. $p(\omega_1) = ... = p(\omega_1) = \frac{1}{N}$ odakle zaključujemo da je za svako $A \in \mathfrak{F}$

$$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid N \mid} \tag{2.1}$$

Dakle vjerovatnoća događaja A je količnik broja ishoda koji odgovaraju događaju A i broja svih mogućih ishoda. Formulom (5) je data tzv. klasična definicija vjerovatnoće.

U sljedeća dva primjera ishodi nisu ravnopravni.

Primjer 2.1 *Novčić se baca do prvog padanja grba ali najviše dva puta.*

$\Omega = \{P, GP, GG\}; P(P) = 0,5; P(GP) = P(GG) = 0,25.$

Primjer 2.2 *Novčić se baca do prvog padanja pisma.* $\Omega = \{P, GP, GGP, ...\}, P(P) = 0,5; P(GP) = 0,25; P(GGP) = 0,125, ...$

Primjer 2.3 *Komplet u kome je 36 karata se na slučajan način dijeli na dva jednakobrojna dijela. Kolika je vjerovatnoća da se u oba dijela nalazi po 9 crnih i crvenih karata?*

►Broj podjela je određen izborom 18 karata iz kompleta od 36 karata, a tih izbora ima $\binom{36}{18}$. Iz skupa od 18 crnih karata, 9 karata možemo izabrati na $\binom{18}{9}$ načina. Isti rezon primjenjujemo i za crvene karte. Koristeći princip proizvoda, dobijamo

$$p = \frac{\binom{18}{9}\binom{18}{9}}{\binom{36}{18}} \approx 0,26.$$

Prilikom računanja je korišćena Stirlingova formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}.$$

Navešćemo neke relativne frekvencije događaja čiju smo vjerovatnoću izračunali. Podaci potiču iz jedne serije od 100 ponavljanja opita – podjela karata. Nakon 5 podjela relativna frekvencija je bila 0, 4, nakon 10 podjela je bila 0, 3, nakon 26 podjela je bila 0, 23, nakon 50 podjela je bila 0, 24, a nakon svih 100 podjela relativna frekvencija je 0, 24. Znači, na početku serije relativna frekvencija ima veliku fluktuaciju, a zatim se sa rastom serije relativna frekvencija stabilizuje.◄

Primjer 2.4 *U kutiji se nalaze cedulje na kojima su brojevi od* 1 *do* 10. *Iz kutije se po modelu bez vraćanja vadi* 5 *cedulja. Kolika je vjerovatnoća da brojevi na izvađenim ceduljama obrazuju rastući niz? R:*$\frac{1}{5!}$.

Primjer 2.5 *U kutiji se nalazi* b *bijelih i* c *crnih kuglica. Dva igrača jedan za drugim vade kuglicu i pobjeđuje onaj koji prvi izvuče bijelu kuglicu. Kolika je vjerovatnoća pobjede igrača koi započinje igru? Uraditi oba modela.*

a) Model sa vraćanjem. $\frac{b+c}{b+2c}$. b) Model bez vraćanja.

$$c \text{ parno}, \quad p = b\sum_{l=0}^{c} \frac{c^{[l]}}{(b+c)^{[l+1]}}, n^{[k]} = n(n-1)...(n-k+1), \text{sumira se po parnim indeksima,}$$

$$c \text{ neparno}, \quad p = b\sum_{l=0}^{c-1} \frac{c^{[l]}}{(b+c)^{[l+1]}}, \text{sumira se po parnim indeksima.}$$

Primjer 2.6 *Izračunati vjerovatnoću da za* 30 *osoba između* 12 *mjeseci u godini ,* 6 *mjeseci sadrži po* 2, *a ostalih* 6 *mjeseci po* 3 *njihova rođendana. R:* $p = \binom{12}{6}\frac{30!}{2^6 6^6 12^{30}} \approx 0,00035$.

Primjer 2.7 r *kuglica se razmješta u* n *kutija. Izračunati vjerovatnoću da* *a) u svakoj od prvih r kutija bude tačno jedna kuglica* $(n \geqslant r)$*, R:* $p = \frac{r!}{n^r}$.

b) u prvoj kutiji bude tačno r_1 *kuglica, u drugoj kutiji bude tačno* r_2 *kuglica,..., u* n*-toj kutiji bude tačno* r_n *kuglica,* $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = r$*, R:* $p = \frac{r!}{n^r \prod\limits_{i=1}^{n} r_i!}$.

c) u jednoj od kutija bude r_1*, u nekoj drugoj* r_2 *itd pri čemu su brojevi* $r_1, r_2, ..., r_n$ *među sobom različiti,* $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = r$*. R:* $p = \frac{r!n!}{n^r \prod\limits_{i=1}^{n} r_i!}$.

Primjer 2.8 *U kutiji se nalazi* $n-1$*-na bijela i jedna crvena kuglica. Iz kutije se po modelu bez vraćanja vadi* $k, 1 \leqslant k \leqslant n$ *kuglica. Kolika je vjerovatnoća da među njima bude crvena?*

$p = \frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$.

Primjer 2.9 m *muškaraca i* n *žena sjedaju u red. Kolika je vjerovatnoća da sve žene sjede jedna pored druge?*

$p = \frac{m+1}{\binom{m+n}{n}}$.

Primjer 2.10 *Na četiri strane kocke A utisnute su po* 2 *tačke, a na dvije strane utisnuto je po* 5 *tačaka. Na svim stranama kocke B utisnute su po* 3 *tačke. Na četiri strane kocke C utisnute su po* 4 *tačke, a na dvije po jedna tačka. Biraju se dvije kocke, istovremeno se bacaju i "pobjeđuje" ona kocka na kojoj padne više tačaka (padne veći broj).*

Analizirajmo varijante. Ako igraju kocke A i B, B pobjeđuje ako na A padne 2. Dakle, pobjedu kocke B povlače parovi 2 na A i 6 na B, a tih parova ima $4 \cdot 6 = 24$. Kako mogućih ishoda ima $6 \cdot 6 = 36$ (6 je broj strana i na A i na B), to je vjerovatnoća pobjede kocke B, $p_B = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, a vjerovatnoća pobjede kocke A, $p_A = \frac{1}{3}$. Ako igraju kocke B i C, vjerovatnoća pobjede kocke C je $p_C = \frac{2}{3}$ (kocka C pobjeđuje ako na njoj padne 4), dok je $p_B = \frac{1}{3}$. Ako igraju A i C, imamo $p_A = \frac{4 \cdot 2 + 2 \cdot 6}{36} = \frac{5}{9}$ (A pobjeđuje u varijantama 1^0 : 2 na A, 1 na C, 2^0 : 5 na A) i $p_C = \frac{4}{9}$.

Primijetimo, u igri kocaka A i B, bolja je kocka B – ima veću šansu (vjerovatnoću) na pobjedu; u igri B i C, bolja je kocka C; u igri A i C, bolja je kocka A. Dakle, relacija "biti bolji (bolja)" u našem slučaju nije tranzitivna.

Ako svaka od dvije osobe odabere po jednu kocku sa namjerom da otpočnu opisanu igru, u boljoj je poziciji osoba koja kocku bira nakon što je svoju kocku već odabrala prva osoba. Naime, ako je prva osoba odabrala A, druga će odabrati B; ako je prva odabrala B, druga će odabrati C; ako je prva odabrala C, druga će odabrati A. Prirodno, druga osoba uvijek bira kocku za koju je vjerovatnoća pobjede veća.◄

Primjer 2.11 *Iz skupa od n osoba koje sjede za okruglim stolom, na slučcajan način bira se k osoba, $k \leqslant \frac{n}{2}$. Kolika je vjerovatnoća da nikoje dvije izabrane osobe ne sjede jedna do druge?*

Numerišimo stolice sa $1, 2, ..., n$, koristimo numeraciju koja prati kretanje kazaljke na satu, a zatim sto "presjecanjem" između stolica n i 1 pretvorimo u pravougaoni (stolice $1, 2, .., n$ se nalaze na jednoj strani pravougaonog stola). Tokom analize, stolice na kojima sjede odabrane osobe ćemo obilježiti sa a, a neodabrane sa b. U procesu računanja broja povoljnih ishoda razmotrimo dvije varijante.

Prva. Na stolici sa rednim brojem 1 sjedi neka od k odabranih osoba. Na stolicama 2 i n moraju sjedjeti neodabrane osobe. Isključimo stolicu n i stolice na kojima sjede odabrane osobe. Ostala je $n-k-1$ stolica na kojima sjede neodabrane osobe. Da bi rekonstruisali raspored koji nam je generisao stolice koje su ostale, treba odabrati $k-1$ od preostalih stolica i na prvoj desnoj poziciji smjestiti odabranu. Recimo, $n = 8, k = 3$. Ostale su 4 stolice, dakle rekonstrukcija kreće od *bbbb*. Imajući u vidu da je u ovoj varijanti poznato da je stolica 1 obilježena sa a, a stolice 2 i 8 sa b, jedan od rekonstrukcija je recimo *abbabbab*. Mi smo iz četvorke *bbbb* odabrali prvi i četvrti član.

Druga. Razmatra se slučaj kada na stolici 1 sjedi neodabrana osoba.

$$p = \frac{\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k}}{\binom{n}{k}}$$

Definicija 2.1 *Neka je $\mathfrak{F}$ σ-polje na prostoru ishoda Ω. Uređeni par $(\Omega, \mathfrak{F})$ se naziva* **mjerljivi prostor**.

Definicija 2.2 *Neka je $(\Omega, \mathfrak{F})$ mjerljivi prostor. Funkcija $P : \mathfrak{F} \longrightarrow R$ je* **vjerovatnoća** na $\mathfrak{F}$ *ako važi:*

P1. $P(A) \geqslant 0$ *za svaki* $A \in \mathfrak{F}$; $P(\Omega) = 1$.

P2. *Ako su* $A_i \in \mathfrak{F}, i \in N$ *i* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ *tada je* $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definicija 2.3 *Uređena trojka $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, gdje je $\mathfrak{F}$ σ-polje na Ω i P vjerovatnoća na $\mathfrak{F}$, naziva se* **vjerovatnosni prostor**.

Vjerovatnosni prostor je osnovni objekat u Teoriji vjerovatnoća. Svojstvo $P(A) \geqslant 0, A \in \mathfrak{F}$, je svojstvo nenegativnosti vjerovatnoće, a svojstvo $P(\Omega) = 1$ je svojstvo normiranosti vjerovatnoće. Svojstvo iz aksiome P2 je svojstvo σ–aditivnosti vjerovatnoće.

Neka je $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vjerovatnosni prostor. Elemente σ–polja $\mathfrak{F}$ nazivamo **događaji**, a broj $P(A)$, $A \in \mathfrak{F}$, naziva se **vjerovatnoća događaja** A.

Dokazaćemo dvije teoreme koje slijede iz definicije vjerovatnoće. U tim teoremama će biti evidentirana neka značajna svojstva vjerovatnoće.

Teorema 2.1 *Neka je $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vjerovatnosni prostor. Tada vrijedi:*
(a) $P(\emptyset) = 0$.
(b) Ako su $A_1, \ldots, A_n$ događaji tada je
$P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$
(svojstvo **konačne aditivnosti vjerovatnoće**).
(c) Ako su A i B događaji, $A \subseteq B$ tada je $P(A) \leqslant P(B)$
(svojstvo **monotonosti vjerovatnoće**).
(d) Ako je A događaj tada je $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
(e) Ako je A događaj tada je $P(A^c) = 1 - P(A)$
(**vjerovatnoća suprotnog događaja** A^c).
(f) Ako su A i B događaji tada je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
(g) Ako su A_n, $n \in N$, događaji, tada je $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
($\sigma-$ **poluaditivnost vjerovatnoće**).
(h) Ako su A_n, $n \in N$, događaji, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ i
$A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *tada je* $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$
(**neprekidnost vjerovatnoće u odnosu na rastući niz događaja**).
(i) Ako us $A_n, n \in N$, događaji, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ i
$A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *tada je* $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$
(**neprekidnost vjerovatnoće u odnosu na opadajući niz događaja**).
(j) Ako us $A_n, n \in N$, događaji, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ i
$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ *tada je* $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$
(**neprekidnost vjerovatnoće u nuli**).

Dokaz.
(a) U aksiomi P2 stavimo $A_1 = \Omega$ i $A_i = \emptyset$, $i \geqslant 2$. Dobijamo

$$1 = 1 + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots \Longrightarrow P(\emptyset) = 0$$

(b) U P2 stavimo $A_i = \emptyset$, $i > n$ i iskoristimo (a).
(c) $A \subseteq B \Longrightarrow B = A \cup (B \setminus A)$. Zbog (b) je

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A).$$

(d) Za svaki događaj A važi: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ odakle iz monotonosti vjerovatnoće slijedi tvrđenje.
(e) $A + A^c = \Omega \Longrightarrow P(A) + P(A^c) = 1$.
(f) Imamo $A \cup B = A + (B \setminus A)$, $(A \cap B) + (B \setminus A) = B$. Odavde, zbog (b), dobijamo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A),\ P(A \cap B) + P(B \setminus A) = P(B).$$

Nakon sabiranja jednakosti i sređivanja dobijamo tvrđenje.
(g) Neka je $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $n \geqslant 2$. Tada je B_n, $n \in N$, niz disjunktnih događaja, $B_n \subseteq A_n$, $n \in N$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$. Zato imamo

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

(h) Stavimo $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Tada je $B_n \in \mathfrak{F}$, $n \in N$ i $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Osim toga vrijedi $A_n = \sum_{i=1}^{n} B_i$, $A = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$, pa imamo

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(i) Stavimo $C_n = A_1 \setminus A_n$, $n \in N$. Tada je $C_n \in \mathfrak{F}$, $C_n \subseteq C_{n+1}$, $n \in N$ i $A_1 \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Sada imamo $P(C_n) = P(A_1) - P(A_n)$, pa iz (h) slijedi

$$P(A_1) - P(A) = P(A_1 \setminus A) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) = P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

odakle dobijamo $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
(j) Ovo tvrđenje je specijalni slučaj tvrđenja (i).$\lhd$

Teorema 2.2 *Neka je $(\Omega, \mathfrak{F})$ mjerljivi prostor i $P : \mathfrak{F} \longrightarrow R$ funkcija koja je konačno aditivna, neprekidna u nuli i ima svojstvo $(P1)$. Tada funkcija P ima i svojstvo σ aditivnosti.*

Dokaz. Neka su A_n, $n \in N$, disjunktni događaji i $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$. Na osnovu konačne aditivnosti važi

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} A_i\Big). \tag{2.2}$$

Neka je $B_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i$. Primijetimo, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Na osnovu neprekidnosti u nuli funkcije P slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = 0$. Puštajući $n \to \infty$ u (2.2) dobijamo $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. $\triangleleft$

Borel Kantelijeva lema I Neka je $A_n, n \in \mathbb{N}$, niz događaja. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ konvergira tada je $P(A^*) = 0$.

Dokaz. Prisjetimo se, $A^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Neka je $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Primijetimo, $B_n \downarrow$. Iz svojstava (g) i (i) i pretpostavljene konvergencije reda dobijamo

$$P(A^*) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0. \triangleleft$$

Silvesterova formula. Neka je $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vjerovatnosni prostor i $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada važi

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) \\ &+ \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrđenje je očigledno, a za $n = 2$ to je tvrđenje (f) iz Teoreme 1. Pretpostavimo da tvrđenje vrijedi za sve familije od najviše $n - 1$ događaja. Stavimo

$$B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i,\ C_i = A_iA_n,\ i < n.$$

Tada vrijedi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(B \cup A_n) = P(B) + P(A_n) - P(BA_n). \tag{2.4}$$

Osim toga je $BA_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} C_i$ pa zbog induktivne pretpostavke imamo

$$P(B) = \sum_{1\leqslant i<n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j<n} P(A_iA_j) + \ldots + (-1)^n P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \tag{2.5}$$

i

$$
\begin{aligned}
P(BA_n) &= \sum_{1\leqslant i<n} P(C_i) - \sum_{1\leqslant i<j<n} P(C_iC_j) + ... + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} C_i\right) \\
&= \sum_{1\leqslant i<n} P(A_iA_n) - \sum_{1\leqslant i<j<n} P(A_iA_jA_n) + ... + (-1)^n P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i). \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Iz (2.4),(2.5),(2.6) slijedi (2.3).$\lhd$

Primijetimo da u desnoj strani jednakosti (2.3) prva suma ima $\binom{n}{1}$ članova, druga $\binom{n}{2}$ članova,..., a n–ta $\binom{n}{n}$ član.

Primjer 2.12 (Zadatak o rasijanom dekanu.) *Na svečanoj dodjeli diploma bilo je n studenata i dekan im je nasumce podijelio diplome. Kolika je vjerovatnoća da je bar jedan student dobio svoju diplomu?*

Numerišimo studente brojevima od 1 do n. Označimo sa A_1 događaj da prvi student dobije svoju diplomu, sa A_2 događaj da drugi student dobije svoju diplomu,..., sa A_n događaj da n–ti student dobije svoju diplomu. Ako sa W označimo događaj čiju vjerovatnoću tražimo, tada je $W = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$. Da bismo našli $P(W)$ primijenićemo Silvesterovu formulu. Nakon primjene ove formule, treba izračunati vjerovatnoće presjeka raznih događaja iz kolekcije $A_1, \ldots, A_n$. Kako je ideologija u računanju ovih vjerovatnoća ista, demonstriraćemo račun, recimo na primjeru $P(A_1A_2)$. n diploma se n–torici studenata može podijeliti na $n!$ načina. Kada prvi i drugi student dobiju svoje diplome, preostalih $n-2$ diplome preostalim studentima (ima ih $n-2$) može biti podijeljeno na $(n-2)!$ načina. Dakle, $P(A_1, A_2) = \frac{(n-2)!}{n!}$. Imamo

$$
P(W) \;=\; 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.
$$

Ako $n \to \infty$, dobijeni zbir teži ka $1 - e^{-1} \approx 0,6322$. Zbog brze konvergencije niza – zbira, u slučaju kada je $n \geqslant 20$, dobijena vjerovatnoća se odlično aproksimira sa $0,6322$. Iz istog razloga, rezultati se zanemarljivo razlikuju ako je, recimo, $n = 100$ ili $n = 200$.

Ovaj zadatak se može formulisati u mnogo varijanti. Navedimo jednu. Složili smo 100 listova, zaduvao je vjetar i razbacao listove. Zatim smo listove nasumce ponovo složili. Kolika je vjerovatnoća da će se bar jedan list naći na rednom mjestu na kojem je bio i ranije?◀

Primjer 2.13 *Kolika je vjerovatnoća da u seriji od 20 bacanja kocke ne budu zabilježeni svi brojevi?*

A_1 u seriji nije zabilježena jedinica,..., A_6 u seriji nije zabilježena šestica.

$$
P(\bigcup_{i=1}^{6} A_i) = 6\frac{5^{10}}{6^{10}} - \binom{6}{2}\frac{4^{10}}{6^{10}} + ... + \binom{6}{5}\frac{1}{6^{10}}. \blacktriangleleft
$$

Primjer 2.14 *Iz grupe od* 8 *bračnih parova bira se* 6 *osoba. Kolika je vjerovatnoća da među izabranima ne postoji bračni par?*

Numerišimo bračne parove sa $1, 2, ..., 8$. Neka je A_1 događaj da je među izabranim osobama bračni par 1 (tj. oba supružnika), A_2 bračni par 2,... Tražena vjerovatnoća je

$$p = 1 - P\big(\bigcup_{i=1}^{8} A_i\big).$$

Primjer 2.15 *Neka je* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *vjerovatnosni prostor i* $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Tada važi*

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{1\leqslant i\leqslant n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_i \cup A_j) \\ &\quad + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_i \cup A_j \cup A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\ ) \end{aligned}$$

U rješavanju nekih važnih vjerovatnosnih zadataka koristi se sljedeća dobro poznata teorema iz Kombinatorike (Teorema 1, zbirka str 37).

Teorema 2.3 *Neka je prostor ishoda* Ω *konačan skup,* $\mathfrak{F} = \mathbb{P}(\Omega)$ *i* $A_1, A_2, ..., A_n$ *su događaji. Tada je*

$$|A_1A_2..A_n| = |\Omega| - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i^c| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i^cA_j^c| - ... + (-1)^{n-1}|A_1^c...A_n^c|.$$

Primjer 2.16 *Kocka se baca do pojave svih šest strana. Izračunati vjerovatnoću događaja da će biti izvedeno tačno* $n, n \geqslant 6$, *bacanja.*

Ω je skup n torki čiji su elementi iz $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |\Omega| = 6^n$. Odgovaraju n torke koje se završavaju sa nekim brojem iz S (6 mogućnosti), a na prvih $n-1$ mjesta se nalaze **svi** brojevi iz S sa izuzetkom broja koji je na n tom mjestu. $n-1$ torki napravljenih od 5 brojeva (svi učestvuju) ima

$$5^{n-1} - \binom{5}{1}4^{n-1} + \binom{5}{2}3^{n-1} - \binom{5}{3}2^{n-1} + \binom{5}{4}.$$

(vidi Teoremu (prilagođavamo je slučaju kada se kocka baca $n-1$ puta), ako je na n tom mjestu recimo 6, tada $n-1$ torke pravimo sa brojevima $1, 2, 3, 4, 5$; skup - događaj A_1 - učestvuje 1 u $n-1$ torki, skup - događaj A_2 - učestvuje 2 u $n-1$ torki itd). Dakle,

$$\begin{aligned} p &= \frac{6\big[5^{n-1} - \binom{5}{1}4^{n-1} + \binom{5}{2}3^{n-1} - \binom{5}{3}2^{n-1} + \binom{5}{4}\big]}{6^n} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - 5\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} + 10\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} - 10\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Primjer 2.17 *r kuglica se razmješta u n kutija, $r \geqslant n$. Kolika je vjerovatnoća da tačno $m, 0 \leqslant m \leqslant n-1$ kutija bude prazno?*

Zapisujemo redni broj kutije u koju ide kuglica $1, 2, ..., r$ i dobijamo r torku čiji su članovi iz $S = \{1, 2, ..., n\}, |\Omega| = n^r$. Odgovaraju sve r torke napravljene od $n-m$ brojeva iz S (svi ti brojevi učestvuju). $n-m$ brojeva iz S možemo izabrati na $\binom{n}{m}$ načina. Izabrane brojeve označimo sa $s_1, s_2, ..., s_{n-m}$. Izračunajmo koliko ima r torki koje nam odgovaraju. Neka je A_1 događaj-skup s_1 učetvuje; ..., A_{n-m} događaj-skup s_{n-m} učetvuje. Sada je

$$\begin{aligned} |A_1 ... A_{n-m}| &= (n-m)^r - \binom{n-m}{1}(n-m-1)^r + \binom{n-m}{2}(n-m-2)^r ... \\ &\quad +(-1)^{n-m-1}\big[n-n-(n-m-1)\big]^r \end{aligned}$$

te je

$$p = \frac{\binom{n}{m}|A_1 ... A_{n-m}|}{n^r} = \binom{n}{m} \sum_{\nu=o}^{n-m-1} (-1)^\nu \binom{n-m}{\nu} \big(1 - \frac{m+\nu}{n}\big)^r. \blacktriangleleft$$

Primjer 2.18 *Kocka se baca 7 puta. Kolika je vjerovatnoća da je suma palih brojeva 27?*

$x_1 + ... + x_7 = 27, 1 \leqslant x_i \leqslant 6$. $y_i = x_i - 1; y_1 + ... + y_7 = 20, 0 \leqslant y_i \leqslant 5$.

$y_1 + ... + y_7 = 20, 0 \leqslant y_i$ ima $\binom{26}{6}$ rješenja. Koristićemomo formulu uključenja isključenja. Tražimo koliko ima rješenja takvih da je jedna nepoznata $\geqslant 6$, $z_7 = y_7 - 6; y_1 + ... + y_6 + z_7 = 14$ nenegativnih rješenja ima $\binom{20}{6}$. Dvije nepoznate $\geqslant 6$, $y_1 + ... + y_5 + z_6 + z_7 = 8$ ima ih $\binom{14}{6}$ i na kraju tri nepoznate $\geqslant 6$, $y_1 + ... y_4 + z_5 + z_6 + z_7 = 2$ ima ih $\binom{8}{6}$. Dakle,

$$p = \frac{1}{6^7}\left[\binom{26}{6} - \binom{20}{6}\binom{7}{1} + \binom{14}{6}\binom{7}{2} - \binom{8}{6}\binom{7}{3}\right].$$

Ovaj zadatak se može uraditi i metodom funkcije izvodnica. Metod ćemo usvojiti u toku jedne kasnije faze učenja stohastike.

3 Uslovna vjerovatnoća i nezavisnost događaja

Neka je A događaj iz slučajnog opita koji je matematički modeliran trojkom $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ako osim kompleksa uslova koji generišu opit nema drugih ograničenja koja mogu uticati na računanje vjerovatnoće događaja A, tada kažemo da je $P(A)$ bezuslovna vjerovatnoća događaja A.

Međutim, praksa često nameće potrebu za računanjem vjerovatnoće događaja A pri dopunskom uslovu da je ostvaren neki događaj B. Takve vjerovatnoće se zovu **uslovne**. Koristićemo zapis

$P(A|B)$; njime je označena vjerovatnoća događaja A pri uslovu B (ili preciznije, pri uslovu da je ostvaren događaj B).

Da bismo približili motive za definiciju kroz koju se ukazuje na postupak računanja uslovne vjerovatnoće, navešćemo dva primjera.

Primjer 3.1 *Kocka za igru se baca dva puta. Neka je A događaj da je u oba bacanja pao paran broj, a B događaj da je zbir brojeva u oba bacanja $\leqslant 6$.*

Konstatujmo

$$\begin{aligned}
&A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\},\\
&B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),\\
&(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\},
\end{aligned}$$

odakle slijedi $P(A) = \frac{9}{36}$, $P(B) = \frac{15}{36}$. Kako računati $P(A|B)$? Izvjesno je, B je ostvareno pa se skup ishoda sužava i redukuje na skup koji ima 15 elemenata. Među tim elementima – ishodima nađimo one koji odgovaraju događaju A. Ti elementi su $\{(2,2),(2,4),(4,2)\}$, a ovim pretraživanjem je u stvari nađen skup – događaj AB. Slijedeći ideju iz klasične definicije vjerovatnoće imamo

$$P(A|B) = \frac{3}{15} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \blacktriangleleft$$

Primjer 3.2 *Slučajno se bira tačka iz kvadrata K dužine stranice 1. Neka su A i B dva podskupa sa K. Neka je A događaj da je slučajno izabrana tačka iz A, a B događaj da je slučajno izabrana tačka iz B. Nađimo $P(A|B)$.*

Budući da je B izvjesno ostvareno, tj. slučajno izabrana tačka pripada skupu B, skup ishoda se svodi na B. Tražeći među elementima skupa B one koji pripadaju skupu A, mi dobijamo skup AB. Slijedeći ideju iz geometrijske vjerovatnoće, sada imamo

$$P(A|B) = \frac{\text{mes } AB}{\text{mes } B} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Posljednja jednakost slijedi iz činjenice $\text{mes } K = 1$.

Vratimo se izlaganju teorije. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor vjerovatnoće i neka je $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$. Definišimo preslikavanje $P_B : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ sa:

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},\ A \in \mathcal{F}. \tag{3.1}$$

Lako se provjerava da je P_B vjerovatnoća na $\mathcal{F}$. Nazivamo je uslovna vjerovatnoća uz uslov B. Druga jednakost u formuli (3.1) služi kao obrazac za računanje uslovne vjerovatnoće. Budući da su primjeri (3.1) i (3.2) u svježem sjećanju, jasno je odakle potiče motiv za drugu jednakost u (3.1).

Znači, svaki događaj B za koji je $P(B) > 0$ generiše prostor vjerovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$.

Zato što je P_B vjerovatnoća na $\mathcal{F}$, neposredno slijedi

Teorema 3.1 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor vjerovatnoće i neka je $B \in \mathcal{F}$, $P(B)$ > 0. Tada je*

(a) $P(\emptyset|B) = 0$.

(b) $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$, $A \in \mathcal{F}$.

(c) $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$.

(d) $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, $A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow P(A_1|B) \leqslant P(A_2|B)$.

(e) $A_n \in \mathcal{F}, n \in N \Longrightarrow P\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n|B\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$.

Iz jednakosti (3.1) slijedi da uz uslove $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ važi **formula množenja vjerovatnoća**

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A). \tag{3.2}$$

Postoji prirodno uopštenje formule (3.2). Naime

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}),$$

uz pretpostavku da su vjerovatnoće događaja iz uslova pozitivne.

Definicija 3.1 *Konačna ili prebrojiva familija $H_i, i \in I$ događaja u prostoru vjerovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je* **potpuni sistem događaja** *ako je $P(H_i) > 0$ za svako $i \in I$ i $\sum\limits_{i \in I} H_i = \Omega$.*

Sljedeće dvije teoreme se često primjenjuju prilikom rješavanja zadataka.

Teorema 3.2 (Formula potpune vjerovatnoće.) *Neka je $H_i, i \in I$ potpuni sistem događaja u vjerovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada za svako $A \in \mathcal{F}$ važi*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i).$$

Dokaz. Za proizvoljno $A \in \mathcal{F}$ važi

$$\begin{aligned} P(A) = P(A\Omega) = P\left(A\sum_{i\in I} H_i\right) = P\left(\sum_{i\in I}(AH_i)\right) \\ = \sum_{i\in I} P(AH_i) = \sum_{i\in I} P(A|H_i)P(H_i).\blacklozenge \end{aligned}$$

Teorema 3.3 (Bajesova formula.) *Neka je $H_i, i \in I$ potpuni sistem događaja u vjerovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$. Tada za svako $i_0 \in I$ važi*

$$P(H_{i_0}|A) = \frac{P(A|H_{i_0})P(H_{i_0})}{\sum\limits_{i\in I} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Dokaz. Iz formule proizvoda vjerovatnoća i formule potpune vjerovatnoće slijedi

$$P(H_{i_0}|A) = \frac{P(AH_{i_0})}{P(A)} = \frac{P(A|H_{i_0})P(H_{i_0})}{\sum\limits_{i\in I} P(A|H_i)P(H_i)}.\blacklozenge$$

Budući da događaji iz sistema $H_i, i \in I$ čine jednu potpunu kolekciju mogućih događaja, govorićemo da su H_i **hipoteze**.

Definicija 3.2 *Događaji A i B su* **nezavisni** *ako je*

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{3.3}$$

Teorema 3.4 *Neka je $P(B) > 0$. Događaji A i B su nezavisni ako i samo ako je $P(A|B) = P(A)$.*

Neka je $P(AB) = P(A)P(B)$. Uz ovaj uslov dobijamo $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$. Obrnuto, uz uslov $P(A|B) = P(A)$ imamo $P(A|B) = P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B).\blacklozenge$

Dakle, uz uslov $P(A) > 0, P(B) > 0$ nezavisnost događaja A i B je ekvivalentna sa $P(A|B) = P(A)$, $P(B|A) = P(B)$. Jednakost $P(A|B) = P(A)$ se odnosi na slučaj kada je vjerovatnoća realizacije događaja A uz uslov da je ostvaren događaj B jednaka bezuslovnoj. Dakle, realizacija događaja B nije "uticala" na vjerovatnoću realizacije događaja A. Primijetimo, definicija 3.2 nije opterećena uslovom $P(A) > 0, P(B) > 0$.

Svi pojmovi koje smo do uvođenja pojma nezavisnosti pomenuli, imaju svoje analogone u Teoriji mjere. Nezavisnost je izvorno vjerovatnosni pojam. Pojavom pojma nezavisnosti, Vjerovatnoća je izašla iz okrilja Teorije mjere.

Kod rješavanja praktičnih vjerovatnosnih zadataka, nezavisnost se obično prihvata na osnovu naših intuitivnih predstava o opitu. Prirodno je smatrati da u opitu u kome bacamo dva novčića, pojava, recimo grba kod jednog novčića nema uticaja na pojavu, recimo, grba na drugom novčiću (osim ako novčići nisu fizički povezani npr. tankom žicom). Takođe, to što je neka žena rodila sina nema uticaja na pol djeteta koje će roditi neka druga žena te je vjerovatnoća da su dva slučajno odabrana novorođenčeta dječaci $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

Postoje situacije kada nezavisnost događaja nije očigledna i ustanovljava se tek nakon provjere važenja jednakosti (3.3) (pogledati primjere (3.12) i (3.13)).

U vjerovatnoći se pojavljuje potreba za razmatranjem nezavisnosti familije događaja. Formalizujmo.

Definicija 3.3 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *vjerovatnosni prostor i* $A_i \in \mathcal{F}, i \in I$ *proizvoljna familija događaja. Kažemo da je to* **familija nezavisnih događaja** *ako za svaki konačni podskup različitih indeksa* $i_1, i_2, ..., i_k \in I$ *važi*

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Do za sada izloženu teoriju ćemo ilustrovati primjerima.

Primjer 3.3 *Profesor je za ispit pripremio* n *dobrih i* m *loših cedulja. Kolika je vjerovatnoća da student koji cedulju izvlači kao* $l+1$ *po redu,* $0 \leqslant l \leqslant m+n-1$, *izvuče dobru cedulju?*

►Neka je A događaj čiju vjerovatnoću tražimo, a B_k, $0 \vee (l-m) \leqslant k \leqslant n \wedge l$, događaj da prvih l studenata izvuku k dobrih cedulja. Na osnovu formule potpune vjerovatnoće dobijamo

$$P(A) = \sum_{k=0\vee(l-m)}^{(n-1)\wedge l} P(A|B_K)P(B_k) = \sum_{k=0\vee(l-m)}^{(n-1)\wedge l} \frac{n-k}{n+m-l} \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}}{\binom{m+n}{l}}.$$

Kad smo zadavali B_k, maksimalna vrijednost za k je bila $n \wedge l$. Primijetimo, ako je $n \leqslant l$ tada za $k = n \wedge l = n$ važi $P(A|B_k) = P(A|B_n) = 0$ te nema potrebe da u sumi računamo član sa indeksom $n \wedge l$. Dakle sumiranje završavamo sa $k = (n-1) \wedge l$. Ako je $l < n$ tada je najveći indeks u sumi l i on se dobija bez obzira da li je najveći indeks zadat kao $n \wedge l$ ili $(n-1) \wedge l$. Ovim smo opravdali korektnost sumiranja do indeksa $k = (n-1) \wedge l$.

Nakon sređivanja opšteg člana u sumi, dobijamo

$$P(A) = \frac{n}{n+m} \sum_{k=0\vee(l-m)}^{(n-1)\wedge l} \frac{\binom{n-1}{k}\binom{m}{l-k}}{\binom{n+m-1}{l}} = \frac{n}{n+m}.$$

Naime, suma je jednaka 1. Objasnimo zbog čega. U slučaju $l = 0$ jednakost je očigledna. A sada se za trenutak skoncetrišimo na model sa $n-1$ dobrih i m loših cedulja, i cedulje izvlači l, $1 \leqslant l \leqslant n+m-1$ studenata. Ako sa k označimo broj izvučenih dobrih cedulja, tada je $0 \vee (l-m) \leqslant k \leqslant (n-1) \wedge l$, a vjerovatnoće da se izvuče k dobrih cedulja se nalaze u sumi. Sumirajući te vjerovatnoće dobijamo 1. Vidimo da u rezultatu ne figuriše l. Dakle, bez obzira na poziciju studenta u "redu", vjerovatnoća izvlačenja dobre cedulje je $\frac{n}{m+n}$.

Naš model sa ceduljama je ekvivalentan sa sljedećim. U kutiji se nalazi m bijelih i $n-m$ crnih kuglica. Po modelu bez vraćanja se vade kuglice. Izračunajmo vjerovatnoće da

a) je j-ta izvađena kuglica bijela?

b) su i-ta i j-ta izvađena kuglica bijele, $i \neq j$?

c) je i-ta bijela a j-ta crna, $i \neq j$?

a) Kuglice se mogu izvući na $n!$ načina. Svakom od tih izvlačenja-nizova pridružujemo istu vjerovatnoću (mjeru) $\frac{1}{n!}$. Interesuje nas koliko ima nizova sa bijelom kuglicom na j-tom mjestu. j-to mjesto u nizu popunjava neka od m bijelih, a ostalih $n-1$ mjesta popunjavaju ostalih $n-1$ kuglica. Dakle,

$$p = \frac{m(n-1)(n-2)...1}{n!} = \frac{m}{n}.$$

Možemo rezonovati i ovako. j ta izvađena kuglica može biti bilo koja od n kuglica iz kutije (kuglice su ravnopravne), a nama odgovara bilo koja od m bijelih. Dakle, $p = \frac{m}{n}$.

b) j-to mjesto u nizu popunjava neka od m bijelih, i-to mjesto u nizu popunjava neka od $m-1$ bijelih, a za preostalih $n-2$ mjesta ostaje $n-2$ kuglica. Dakle,

$$p = \frac{m(m-1)(n-2)...1}{n!} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.$$

Možemo rezonovati i ovako. Dvije bijele kuglice koje će biti izvađene u i tom i j tom vađenju možemo izabrati na $\binom{m}{2}$ načina, dvije kuglice koje će biti izvađene u i tom i j tom vađenju možemo izabrati na $\binom{n}{2}$ načina. Dakle,

$$p = \frac{\binom{m}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.$$

c) $p = \frac{m(n-m)}{n(n-1)}$.◀

Primjer 3.4 *Iz kutije u kojoj se se nalazi 10 bijlih, 11 crvenih i 12 crnih kuglica, po modelu a) sa vraćanjem; b) bez vraćanja, vade se kuglica. Kolika je vjerovatnoća da će bijela kugica biti izvađena prije crne?*

Primjer 3.5 *U svakoj od dvije kutije se nalazi po $10B$ i $5C$ kuglica. Iz prve kutije se vadi kuglica,* *prebacuje u drugu, zatim se iz druge vadi kuglica i prebacuje u prvu. Na kraju se iz prve kutije vadi kuglica. Kolika je vjerovatnoća da je ta kuglica bijela?*

▶Uvedimo hipoteze $H_1 : BB$ (u prvom vađenju je iz prve kutije izvučena bijela kuglica, a iz druge kutije je izvučena bijela kuglica), $H_2 : BC$, $H_3 : CB$, $H_4 : CC$. Ako sa W označimo događaj čiju vjerovatnoću tražimo, dobijamo

$$\begin{aligned} P(W) &= P(W|H_1)P(H_1) + P(W|H_2)P(H_2) + P(W|H_3)P(H_3) + \\ &+P(W|H_4)P(H_4) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{16} + \frac{6}{15}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{16} + \frac{11}{15}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{16} + \\ &+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{16} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dakle, vjerovatnoće prije i poslije prebacivanja su iste.◀

Primjer 3.6 *Igrači A i B igraju do bankrota jednog od njih. Na početku igrač A ima a eura, a igrč B ima b eura. U svakoj partiji vjerovatnoća pobjede igrača A je p, a igrača B je q, $p + q = 1$. Kad partiju dobije igrač A tada mu igrač B daje euro, a kad partiju dobije igrač B tada mu igrač A daje euro. Naći vjerovatnoću bankrota za svakog igrača.*

Neka je $p_n, n = 0, 1, ..., a + b$ vjerovatnoća bankrota igrača A kad ima n eura. Jasno, $p_{a+b} = 0, p_0 = 1$. Neka je H_1-u prvoj partiji pobjeđuje A, H_2-u prvoj partiji pobjeđuje B. Sada je

$$\begin{aligned} p_n &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = pp_{n+1} + qp_{n-1} \Rightarrow \\ &(p+q)p_n = pp_{n+1} + qp_{n-1} \Rightarrow q(p_n - p_{n-1}) = p(p_{n+1} - p_n), n = 1, 2, ..., a + b - 1. \\ 1^0 \quad & p = q = \frac{1}{2}, p_{n+1} - p_n = p_n - p_{n-1} = ... = p_1 - p_0 = c \Rightarrow p_n = p_0 + nc, \\ n = \quad & a + b \Rightarrow c = -\frac{1}{a+b} \Rightarrow p_n = 1 - \frac{n}{a+b}, p_a = \frac{b}{a+b}, q_b = \frac{a}{a+b}. \\ 2^0 \quad & p \neq q.\ q^n \prod_{k=1}^{n}(p_k - p_{k-1}) = p^n \prod_{k=1}^{n}(p_{k+1} - p_k) \Rightarrow p_{n+1} - p_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n (p_1 - 1). \\ & p_{a+b} - p_n = \sum_{k=n}^{a+b-1}(p_{k+1} - p_k) = \sum_{k=n}^{a+b-1}\left(\frac{q}{p}\right)^k (p_1 - 1) = (p_1 - 1)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}}. \\ & p_{a+b} = 0 \Rightarrow p_n = (1 - p_1)\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

Stavljajući u posljednjem izrazu $n = 0$ dobijamo $1 - p_1$ i na kraju je

$$p_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} \Rightarrow p_a = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}, q_b = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

Primjer 3.7 *U kutiji se nalaze tri novčića. Dva su "normalna", a treći je iskovan tako da na obje strane ima pismo. Slučajno se bira jedan novčić i baca četiri puta. Naći vjerovatnoću da je uzet "normalni" novčić ako je u sva četiri bacanja palo pismo?*

▶Označimo sa A događaj da je u sva četiri bacanja palo pismo, sa H_1 hipotezu da je uzet "normalni" novčić, a sa H_2 hipotezu da je uzet "felerični" novčić. Primjenom Bajesove formule dobijamo

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \frac{\frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{9}. \blacktriangleleft$$

Primjer 3.8 *U kutiji se nalazi 91 kuglica i svaka može biti bijela ili crna. Iz kutije je po modelu bez vraćanja izvučeno 19 kuglica i među njima je registrovano 7 bijelih i 12 crnih kuglica. Naći najvjerovatniji prvobitni sastav kutije.*

▶Označimo sa H_k hipotezu da je u kutiji k, $k = 0, 1, \ldots, 91$, bijelih kuglica. Naravno, $P(H_k) = \frac{1}{92}$ za svako k. Označimo sa A događaj da je izvučeno 7B i 12C kuglica. Nakon primjene Bajesove formule dobijamo

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=0}^{91} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=0}^{91} P(A|H_i)}.$$

Zadatak traženja maksimuma za $P(H_k|A)$ ekvivalentan je zadatku traženja maksimuma za $P(A|H_k)$. Imamo

$$P(A|H_k) = \frac{\binom{k}{7}\binom{91-k}{12}}{\binom{91}{19}}.$$

Nakon kraće analize se dobija $P(A|H_k) < P(A|H_{k+1})$ za $k \leqslant 32$ i $P(A|H_k) > P(A|H_{k+1})$ za $k \geqslant 33$. Odavde zaključujemo da je najvjerovatniji sastav kutije 33B i 58C. Primijetimo da je $\frac{7}{19} \cdot 91 \approx 33$ te možemo konstatovati da dobijeni rezultat korespondira sa našom intuicijom.◀

Primjer 3.9 *U svakoj od n kutija se nalazi b bijelih i c crnih kuglica. Iz prve se kutije u drugu prebacuje jedna, zatim se iz druge u treću prebacuje jedna,.... Kolika je vjerovatnoća da se iz n-te izvadi bijela kuglica?*

$H_k, k = 1, 2, .., n$ je događaj da se iz $k$te kutije izvadi bijela kuglica.

$$P(H_{k+1}) = P(H_{k+1} \mid H_k)P(H_k) + P(H_{k+1} \mid H_k^c)P(H_k^c) = \frac{b + P(H_k)}{b + c + 1}, k = 1, 2, ..., n-1.$$

Iz $P(H_1) = \frac{b}{b+c}$ slijedi $P(H_2) = ... = P(H_n) = \frac{b}{b+c}$.

Primjer 3.10 *U kutiji je k kuglica, svaka od njih sa vjerovatnoćom $\frac{1}{2}$ (nezavisno od ostalih) može biti bijela ili crna. Iz kutije n puta vadimo kuglicu, model sa vraćanjem. Između izvađenih kuglica m su bijele, $0 < m < n$. Kolika je vjerovatnoća da u kutiji ima tačno s bijelih kuglica ($0 < s < k$)?*

$$
\begin{aligned}
P(H_s \mid W) &= \frac{P(H_s)P(W \mid H_s)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1} P(W \mid H_i)P(H_i)} = \frac{\binom{k}{s}\frac{1}{2^k}\binom{n}{m}\left(\frac{s}{k}\right)^m\left(1-\frac{s}{k}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\binom{n}{m}\left(\frac{i}{k}\right)^m\left(1-\frac{i}{k}\right)^{n-m}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k}} = \\
&= \frac{\binom{k}{s}s^m(k-s)^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}(k-i)^{n-m}}.
\end{aligned}
$$

Primjer 3.11 *Iz skupa $\{1, 2, ..., n\}$ jedan za drugim se biraju dva broja. Kolika je vjerovatnoća da je razlika između prvog i drugog izvađenog broja $\geqslant m, 0 < m < n$?*

$$
P(W) = \sum_{i=m+1}^{n} P(W \mid H_i)P(H_i) = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{n-1} + ... + \frac{n-m}{n-1}\Big) = \frac{(n-m)(n-m+1)}{2(n-1)n}.
$$

Primjer 3.12 *Iz kompleta od 32 karte, slučajno se vadi karta. Neka je A događaj da je izvučena karta as, a B događaj da je izvučena karta krsta. Da li su događaji A i B nezavisni?*

► $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(AB) = \frac{1}{32}$ (postoji samo jedan as krsta). Dakle $P(AB) = P(A)P(B)$ te su događaji A i B nezavisni. Da li se nezavisnost narušava kada se u komplet stavi "prazna" karta?◄

Primjer 3.13 *U kvadratu $K = (0,1) \times (0,1)$ slučajnio se bira tačka. Neka je A događaj da je izabrana tačka iz oblasti $A = \{(x,y) : (x,y) \in K, x > a\}$, $0 < a < 1$ i neka je B događaj da je izabrana tačka iz oblasti $B = \{(x,y) : (x,y) \in K, y > b\}$, $0 < b < 1$. Da li su događaji A i B nezavisni?*

Primjer 3.14 *U kutiji se nalaze četiri kuglice na kojima su zapisani redom brojevi 2, 3, 5, 30. Iz kutije se vadi kuglica. Označimo sa A_k, $k \in \{2, 3, 5, 30\}$ događaj da je broj na izvučenoj kuglici djeljiv sa k.*

Imamo

$$
\begin{aligned}
&P(A_2) = P(A_3) = P(A_5) = \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4} = P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \\
&= P(A_2A_5) = P(A_2)P(A_5) = P(A_3A_5) = P(A_3)P(A_5), \\
&\frac{1}{4} = P(A_2A_3A_5) \neq P(A_2)P(A_3)P(A_5) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Događaji A_2, A_3, A_5 su nezavisni u parovima, ali ne i u ukupnosti.

Primjer 3.15 *Kocka se baca dva puta. Izdvojimo događaje*

$$A = \{(i,j) : j \in \{1,2,5\}\}, \; B = \{(i,j) : j \in \{4,5,6\}\},$$
$$C = \{(i,j) : i + j = 9\}.$$

Imamo,

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{9}, P(AB) = \frac{1}{6}, P(ABC) = \frac{1}{36},$$

pa možemo konstatovati

$$P(AB) \neq P(A)P(B) \text{ i } P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

Primjer 3.16 *U svakom susretu igrači A i B imaju jednake šanse da osvoje bod. Pobjeđuje igrač koji prvi osvoji* 6 *bodova. Naći vjerovatnoću događaja da pobijedi igrač A ako trenutno vodi rezultatom* $4:2$.

►Sa A ćemo simbolički označavati pobjedu igrača A u pojedinačnoj igri, a sa B pobjedu igrača B u pojedinačnoj igri. B će biti ukupni pobjednik ako se ostvari neka od shema BBBB, ABBBB, BABBB, BBABB, BBBAB. Zbog podrazumijevane nezavisnosti između igara, imamo da je vjerovatnoća pobjede igrača B

$$p_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{16},$$

a vjerovatnoća pobjede igrača A je $p_A = \frac{13}{16}$. ◄

Primjer 3.17 *U populaciji je* 2% *oboljelih. Kada se testira oboljela osoba test je pozitivan sa vjerovatnoćom 0,99, a kad se testira zdrava test je pozitivan u* $0,5\%$ *slučajeva.*

a) Kolika je vjerovatnoća da je test pozitivan?

b) Ako je test pozitivan, kolika je vjerovatnoća da je testirana oboljela osoba?

A- test je pozitivan, H_1 - testira se oboljela osoba, H_2 - testira se zdrava osoba. $P(H_1) = 0,02$, $P(H_2) = 0,98$, $P(A|H_1) = 0,99$, $P(A|H_2) = 0,005$. a) Nakon primjene formule potpune vjerovatnoće dobijamo $P(A) = 0,0247$. b) Nakon primjene Bajesove formule dobijamo $P(H_1|A) = 0,8016$.

Završićemo ovu temu sa Borel Kantelijevom lemom II. Za njen dokaz nam je potrebna sljedeća lema

Lema 3.1 *Ako su događaji* $A_1, A_2, ...$ *nezavisni tada su i događaji* $A_1^c, A_2^c, ...$ *takođe nezavisni.*

Dokazaćemo da iz nezavisnosti događaja A_1 i A_2 slijedi nezavisnost događaja A_1^c i A_2^c. Opšti slučaj se dokazuje analogno. Dakle, neka su A_1 i A_2 nezavisni događaji. Sada je

$$P(A_1^c A_2^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1)P(A_2) = P(A_1^c)P(A_2^c).$$

U dokazu najavljene leme ćemo koristiti dobro poznatu nejednakost: $1 - x \leqslant e^{-x}, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

Lema 3.2 (Borel Kantelijeva lema II) *Ako su događaji $A_n, n = 1, 2, ...$ nezavisni i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ tada je $P(A^*) = 1$.*

$$\textbf{Dokaz.} P(A^*) = 1 - P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big)\Big(\text{jer je } \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = B_n \uparrow\Big)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big)\Big(\text{ jer je } \bigcap_{k=n}^{m} A_k^c = C_m \downarrow, m \geqslant n, \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \bigcap_{m=n}^{\infty} C_m\Big)$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} \prod_{k=n}^{m}(1 - P(A_k)) \geqslant 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = 1,$$

jer je zbog divergencije reda $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, $\lim\limits_{m\to\infty} e^{-\sum\limits_{k=n}^{m} P(A_k)} = 0$ za svako n. Dakle, $P(A^*) = 1$.

Primjer 3.18 *Kolika je vjerovatnoća da se u fiktivnom beskonačnom nizu bacanja kocke bar jednom zabilježi 1000 uzastopnih šestica?*

Označimo sa W događaj čiju vjerovatnoću tražimo. Neka je A_1 događaj da šestica stalno pada od prvog do hiljaditog bacanja, A_2 događaj da šestica stalno pada od hiljadu prvog do dvije hiljaditog bacanja, ... Primijetimo, $A^* \subseteq W, \frac{1}{6^{1000}} = P(A_1) = P(A_2) = ...$ i događaji $A_n, n = 1, 2, ..$ su nezavisni. Na osnovu Borel Kantelijeve leme II zaključujemo $P(A^*) = 1$ te je $P(W) = 1$.

Primjer 3.19 *Izvodi se serija nezavisnih opita. Neka je A događaj iz opita, $P(A) = p$ i neka je $A_n, n = 1, 2, ...$ događaj da se između2^n-tog i $2^{n+1} - 1$-og ponavljanja događaj A realizuje n puta uzastopno. Ako je $p < \frac{1}{2}$ tada je $P(A^*) = 0$, ako je $p \geqslant \frac{1}{2}$ tada je $P(A^*) = 1$. Dokazati!*

a) $p < \frac{1}{2}$. Neka je B_i događaj da se počevši od i-tog ponavljanja realizuje n uzastopnih događaja A. Sada je

$$A_n = \bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-n} B_i \Rightarrow P(A_n) \leqslant (2^n - n + 1)p^n \leqslant (2p)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(A^*) = 0.$$

b) $p \geqslant \frac{1}{2}$. $A_n^c \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{\left[\frac{2^n}{n}-1\right]+1} D_i$, gdje je D_i događaj da od $2^n+(i-1)n$-tog do 2^n+in-1-tog ponavljanja nisu realizovani samo događaji A. Koristeći $P(D_i) = 1 - p^n$ dobijamo

$$P(A_n^c) \leqslant (1-p^n)^{\left[\frac{2^n}{n}-1\right]} \Rightarrow P(A_n) \geqslant 1 - (1-p^n)^{\left[\frac{2^n}{n}-1\right]} \sim \frac{(2p)^n}{n}.$$

Iz nezavisnosti događaja u nizu $A_n, n = 1, 2, ...$ i divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2p)^n}{n}$ slijedi $P(A^*) = 1$.

Primjer 3.20 *Neka su događaji $A_n, n = 1, 2, ..$ nezavisni. Dokazati da je $P(A^*) = 0$ ako i samo ako je $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$.*

4 Slučajne promjenljive (veličine)

Sva teorijska razmatranja u tekstu koji slijedi su vezana za vjerovatnosni prostor $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Prirodno je da se sa skupa Ω pređe na, u matematici najbolje izučeni, skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Taj prelazak se ostvaruje uz posredovanje funkcije koja se naziva slučajna promjenljiva.

DEFINICIJA 4.1 *Funkcija $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se naziva* **slučajna promjenljiva** *ako za svaki Borelov skup B važi*

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}. \tag{4.1}$$

Za funkciju kojom je definisana slučajna promjenljiva kaže se da je $(\mathfrak{F}, \mathcal{B}^1)$ mjerljiva. Iz teoreme koja slijedi (nećemo je dokazivati) zaključujemo da se slučajna promjenljiva može definisati tako što će se uslovom (4.1) zamijeniti sa nekim od pet navedenih.

Teorema 4.1 *Svaki od navedenih uslova potreban je i dovoljan da bi funkcija $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bila slučajna promjenljiva.*

a) $X^{-1}(G) = \{\omega : X(\omega) \in G\} \in \mathfrak{F}$ *za svaki otvoreni skup* $G \subset \mathbb{R}$.

b) $X^{-1}((-\infty, x)) = \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F},$ *za svako* $x \in \mathbb{R}$.

c) $X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathfrak{F},$ *za svako* $x \in \mathbb{R}$.

d) $X^{-1}([x, \infty)) = \{\omega : X(\omega) \geqslant x\} \in \mathfrak{F},$ *za svako* $x \in \mathbb{R}$.

e) $X^{-1}((x, \infty)) = \{\omega : X(\omega) > x\} \in \mathfrak{F},$ *za svako* $x \in \mathbb{R}$.

Sljedećom teoremom ćemo zadati jedno značajno σ polje.

Teorema 4.2 *Neka je X slučajna promjenljiva. Tada je familija*

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^1\}$$

σ-polje.

a) $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R}) \in \sigma(X)$.

b) Neka je $A \in \sigma(X)$. Tada postoji skup $B \in \mathcal{B}^1$ takav da je $A = X^{-1}(B)$. Sada imamo

$$A^c = (X^{-1}(B))^c = X^{-1}(B^c) \in \sigma(X).$$

c) Neka je A_n, $n \in \mathbb{N}$, niz skupova iz $\sigma(X)$. Zbog toga što je X slučajna promjenljiva, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji skup $B_n \in \mathcal{B}^1$ takav da je $A_n = X^{-1}(B_n)$. Sada imamo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) = X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \sigma(X).$$

Ovim je dokazano da je $\sigma(X)$ σ polje. $\sigma(X)$ je pod polje σ polja $\mathfrak{F}$ i naziva se σ **polje generisano slučajnom promjenljivom** X.♦

Neka je X slučajna promjenljiva zadata na vjerovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ i neka je P_X : $\mathcal{B}^1 \longrightarrow [0,1]$ funkcija definisana sa

$$P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\} = P(X^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}^1. \tag{4.2}$$

Lema 4.1 *Funkcija $P_X(\cdot)$ je vjerovatnoća na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$.*

a) $P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\} \geqslant 0$, $B \in \mathcal{B}^1$ i $P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$.

b) Neka je B_i, $i \in \mathbb{N}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Sada je

$$P_X(\sum_{i\in\mathbb{N}} B_i) = P(X^{-1}(\sum_{i\in\mathbb{N}} B_i)) = P(\sum_{i\in\mathbb{N}}(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P_X(B_i).♦$$

Definicija 4.2 *Funkcija P_X se naziva* **raspodjela vjerovatnoće slučajne promjenljive** *X ili kraće* **raspodjela slučajne promjenljive** *X. Vjerovatnosni prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ naziva se* **fazni prostor slučajne promjenljive** *X.*

Primjer 4.1 *Novčić se baca dva puta. Prostor ishoda je $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$.*

Slučajna promjenljivačina X koja predstavlja broj palih pisama data je sa:

$$X(GG) = 0,\ X(PG) = X(GP) = 1,\ X(PP) = 2.$$

Slučajna promjenljiva Y koja predstavlja razliku broja palih pisama i grbova data je sa:

$$Y(PP) = 2,\ Y(PG) = Y(GP) = 0,\ Y(GG) = -2.$$

Kao što vidimo iz ovog primjera, na jednom vjerovatnosnom prostoru možemo zadati više slučajnih promjenljivih.◀

Primjer 4.2 *Neka je $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vjerovatnosni prostor,*

$$\Omega = \{a, b, c\},\ \mathfrak{F} = \{\{a, b\}, \{c\}, \Omega, \emptyset\},\ P(\{a, b\}) = \frac{1}{2},\ P(\{c\}) = \frac{1}{2}.$$

Neka je funkcija $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ zadato sa

$$X(a) = X(c) = 0,\ X(b) = 1.$$

Tada je $X^{-1}(1) = \{b\} \notin \mathfrak{F}$. Dakle, X nije slučajna promjenljiva. Ovim primjerom je pokazano da postoje funkcije iz Ω u $\mathbb{R}$ koja nisu slučajne promjenljive.◀

Primjer 4.3 *Kocka se baca jednom. Zadaćemo slučajne promjenljive:*

a) $X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = X(6) = 0,$

b) $Y(1) = Y(3) = Y(5) = 0,\ Y(2) = Y(4) = Y(6) = 1,$

c) $Z(1) = 1,\ Z(2) = 2,\ Z(3) = 3,\ Z(4) = 4,\ Z(5) = 5,\ Z(6) = 6.$

Imamo

$$\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\},\ \sigma(Y) = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega, \emptyset\},\ \sigma(Z) = \mathcal{P}(\Omega).$$ ◀

Primjer 4.4 *Neka je $A \in \mathfrak{F}$ i neka je*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in A^c \\ 1, & \omega \in A \end{cases}.$$

Slučajna promjenljiva I_A se naziva **indikator događaja** A.◀

Definicija 4.3 *Za slučajnu promjenljivu čiji je skup realizacija konačan ili prebrojiv kažemo da je* **diskretnog tipa**. *Ako je kodomen konačan, tada govorimo o* **prostoj slučajnoj promjenljivoj**.

Neka je $W = \{x_i : i \in I\}$, I je konačan ili prebrojiv skup, kodomen diskretne slučajne promjenljive X i $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, i \in I$. Jasno, $\sum\limits_{i\in I} A_i = \Omega$ i

$$X(\omega) = \sum_{i\in I} x_i I_{A_i}(\omega).$$

Važi i obrnuto. Naime, ako su događaji $A_i, i \in I$, I je konačan ili prebrojiv skup, takvi da je $\sum\limits_{i\in I} A_i = \Omega$ i $X(\omega) = \sum\limits_{i\in I} x_i I_{A_i}(\omega)$ gdje su $x_i, i \in I$ realni brojevi, tada je $X(\omega)$ diskretna slučajna promjenljiva.

Neka je $X(\omega) = \sum\limits_{i\in I} x_i I_{A_i}(\omega)$. Ako je $\omega \in A_i$, tada je $X(\omega) = x_i$, $i \in I$. Neka je $p_i = P(A_i), i \in I$. Raspodjela vjerovatnoća P_X slučajne promjenljive X određena je nizom parova brojeva $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots$. Zaista, za svaki Borelov skup B važi $P_X(B) = \sum\limits_{i:x_i\in B} p_i$. Kako je $P_X(R) = 1$, to je $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$. Standardni način bilježenja raspodjele vjerovatnoće diskretne slučajne promjenljive X je dat tabelom

$$X : \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{array}.$$

Primjer 4.5 *Tetraedar na čijim su stranama zapisani brojevi* $1, 2, 3, 4$ *baca se dva puta. Neka je* X *zbir palih brojeva.*

Imamo, $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (4, 4)\}$, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}(\Omega)$ i P je indukovano činjenicom da je $P(\omega) = \frac{1}{16}, \forall\omega \in \Omega$. Formirajmo skupove

$$\begin{aligned} A_1 &= \{X(\omega) = 2\} = \{(1, 1)\}, A_2 = \{X(\omega) = 3\} = \{(1, 2), (2, 1)\}, \\ A_3 &= \{X(\omega) = 4\} = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}, A_5 = \{X(\omega) = 6\} = \{(2, 4), (4, 2), (3, 3)\}, \\ A_6 &= \{X(\omega) = 7\} = \{(3, 4), (4, 3)\}, A_7 = \{X(\omega) = 8\} = \{(4, 4)\} \end{aligned}$$

i neka je $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6, x_6 = 7, x_7 = 8$. Sada je

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{7} x_k I_{A_k}(\omega),$$

a raspodjela slučajne promjenljive X je data shemom

$$X : \begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16}. \end{array}.$$

Naime,

$$p_k = P(A_k), k = 1, 2, ..., 7. \blacktriangleleft$$

Bernulijeva shema i binomna raspodjela

Kao rezultat izučavanja sljedeće jednostavne sheme dobijeno je nekoliko značajnih teorema Teorije vjerovatnoće.

Neka je $(\Omega_0, \mathfrak{F}_0, P_0)$ vjerovatnosni prostor inicijalnog opita. Iz $\mathfrak{F}_0$ izdvajamo dva događaja: $A, P_0(A) = p$ naziva se uspjeh i $A^c, P_0(A^c) = q, p + q = 1$ naziva se neuspjeh. Mi ćemo po završetku inicijalnog opita u slučaju realizacije uspjeha bilježiti 1, u slučaju realizacije neuspjeha bilježiti 0. Matematički model koji prati ovakvo postupanje je vjerovatnosni prostor $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1)$ gdje je $\Omega_1 = \{0, 1\}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathbb{P}(\Omega_1)$ i P_1 je indukovana sa $P_1(\{1\}) = p; P_1(\{0\}) = q$. Dakle, polazeći od inicijalnog opita došli smo do opita u kome postoje samo dva ishoda - uspjeh i neuspjeh.

Definicija 4.4 *Opit u kome se n puta ponavlja opit sa samo dva ishoda u uslovima koji obezbjeđuju nezavisnost ponovljenih opita naziva se* **Bernulijeva shema.**

Vjerovatnosni prostor Bernulijeve sheme je $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ gdje je

$$\Omega = \Omega_1^n = \{\omega : \omega = (\omega_1, ..., \omega_n), \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., n\},\ \mathfrak{F} = \mathbb{P}(\Omega).$$

Ako je $\omega \in \Omega$, tada je

$$P(\omega) = p^k q^{n-k},$$

gdje je k broj jedinica odnosno uspjeha kod ishoda ω, tj. $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$.

Neka je u Bernulijevoj shemi S_n broj uspjeha. Nađimo raspodjelu slučajne promjenljive S_n, tj. nađimo $P\{S_n = k\}, k = 0, 1, ..., n$. Događaju $\{\omega : S_n(\omega) = k\}$ odgovaraju n-torke sa k jedinica a njih ima $\binom{n}{k}$. Vjerovatnoća svake n-torke sa k jedinica je $p^k q^{n-k}$ te je

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, ..., n.$$

Za slučajnu promjenljivu S_n kažemo da ima **binomnu** raspodjelu sa parametrima n i p i koristimo zapis $S_n : \mathcal{B}(n, p)$. Imamo,

$$\sum_{k=0}^{n} P\{S_n = k\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1. \tag{4.3}$$

Jednakost (4.3) pokazuje da je suma vjerovatnoća koje se pojavljuju kod binomne raspodjele jednaka 1. Takođe, iz jednakosti (4.3) se vidi da su vjerovatnoće iz binomne raspodjele jednake članovima Njutnovog razvoja n tog stepena binoma $p + q$.

Primjer 4.6 *Kocka se baca deset puta. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju pojavljivanja brojeva djeljivih sa tri.*

Opit tretiramo kao Bernuilijevu shemu sa 10 ponavljanja (bacanja) opita u kome su ishodi padanje broja koji je djeljiv sa 3-uspjeh i padanje broja koji nije djeljiv sa 3-neuspjeh. Vjerovatnoća uspjeha je $\frac{1}{3}$. Slučajna promjenljiva X prebrojava uspjehe te možemo konstatovati $X : \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$, iza čega stoji

$$P\{X = k\} = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}, \ k = 0, 1, \dots, 10. \blacktriangleleft$$

Primjer 4.7 *r čestica se raspoređuje na n orbita oko atomskog jezgra. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju čestica raspoređenih na orbiti koja je najbliža jezgru.*

Tražimo $P\{X = k\}, k = 0, 1, 2, ..., r$ tj. vjerovatnoću događaja da je na orbiti koja je najbliža jezgru raspoređeno k čestica. r čestica se na n orbita može rasporediti na n^r načina. k čestica koje će biti raspoređene na orbiti koja je najbliža jezgru se može izdvojiti na $\binom{r}{k}$ načina, a preostalih $r - k$ čestica se može razmjestiti na preostalih $n - 1$ orbita na $(n - 1)^{r-k}$ načina. Dobijamo

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r}, k = 0, 1, 2, ..., r.$$

Primijetimo, ako je $r = 2n$ tada

$$P\{X = k\} \to \frac{2^k}{k!}e^{-2}, n \to \infty, k = 0, 1, 2, ...$$

Raspoređivanje čestica na orbite možemo tretirati kao Bernulijevu shemu u kojoj se opit biranja orbite za česticu ponavlja r puta, a uspjehom se smatra izbor orbite koja je najbliža jezgru. Jasno, vjerovatnoća uspjeha je $\frac{1}{n}$. Imamo $X : \mathcal{B}(r, \frac{1}{n})$ te je

$$P\{X = k\} = \binom{r}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-k}, k = 0, 1, 2, ..., r. \blacktriangleleft$$

Primjer 4.8 *U kutiji je n bijelih i m crnih kuglica. Slučajno se a) po modelu sa vraćanjem, b) po modelu bez vraćanja, vadi $k, 1 \leqslant k \leqslant n + m$ kuglica. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju izvađenih bijelih kuglica.*

a) $X : \mathcal{B}(k, \frac{n}{n+m})$ jer je vjerovatnoća vađenja bijele kuglice u svakom vađenju $\frac{n}{n+m}$.

b)

$$P\{X = l\} = \frac{\binom{n}{l}\binom{m}{k-l}}{\binom{n+m}{k}}, \max\{0, k - m\} \leqslant l \leqslant \min\{n, k\}. \tag{4.4}$$

Raspodjela zadata sa (4.4) se naziva **hipergeometrijska** i koristi se notacija $X : H(n,m,k)$.

U slučaju kada $\frac{n}{m+n} \to p$, $0 < p < 1$, $n \to \infty$, tada

$$P\{X = l\} \to \binom{k}{l} p^l q^{k-l}, l = 0, 1, ..., k,\ p = 1 - q,\ n \to \infty.$$

Dakle, granična raspodjela je binomna. ◄

Primjer 4.9 *Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je*

a) jednaka broju ponavljanja neuspjeha (ili prosto broju neuspjeha) do ostvarivanja prvog uspjeha,

b) jednaka broju neuspjeha do ostvarivanja r tog uspjeha, $r \geqslant 1$.

Vjerovatnoća uspjeha je p.

a) $P\{X = k\} = q^k p, k = 0, 1, 2, ...; \sum\limits_{k=0}^{\infty} pq^k = \frac{p}{1-q} = 1.$

b) $P\{X = k\} = \binom{k+r-1}{r-1} q^k p^r, k = 0, 1, 2, ...$

Raspodjela iz a) se naziva **geometrijska** sa parametrom p i koristi se notacija $X : \mathcal{G}(p)$, a iz b) **negativna binomna** sa parametrima r i p i koristi se notacija $X : \mathcal{B}i(r,p)$. U slučaju $r = 1$ dobija se geometrijska raspodjela.

Ako $X : \mathcal{G}(p)$, tada je $P\{X = m + n | X \geqslant n\} = P\{X = m\}, m = 0, 1, ...; n = 1, 2, ...(*)$. Zaista,

$$P\{X = m + n | X \geqslant n\} = \frac{P\{X = m + n\}}{P\{X \geqslant n\}} = \frac{q^{m+n}p}{\sum\limits_{j=n}^{\infty} q^j p} = pq^m = P\{X = m\}.$$

Primijetimo, uslov-događaj $X \geqslant n$ je ekvivalentan događaju da se u prvih n ponavljanja opita registruju neuspjesi. Sa $(*)$ se tvrdi da je nakon registrovanja neuspjeha u prvih n ponavljanja opita, vjerovatnoća registrovanja još m neuspjeha do ostvarivanja uspjeha jednaka vjerovatnoći da se nakon registrovanja neuspjeha u prvih m ponavljanja opita, ostvari uspjeh. Dakle, rezultati su jednaki bez obzira da li brojanje neuspjeha do ostvarivanja uspjeha kreće od početka ili nakon $n, n \in$ N, registrovanih neuspjeha. Svojstvo raspodjele izraženo sa $(*)$ se naziva **svojstvom odsustva pamćenja** ili **svojstvom odsustva posljedice**.

Pokažimo da je geometrijska jedina raspodjela čiji je domen N_0 i koja ima svojstvo odsustva pamćenja $(*)$.. Neka je X slučajna promjenljiva za koju važi $(*)$. Uvedimo oznaku $p_k = P\{X = k\}$, k, $k = 0, 1, ...$ Iz $(*)$ slijedi

$$P\{X = m + n\} = P\{X = m\} P\{X \geqslant n\}.$$

Zamjenom $m = 0$ dobijamo $p_n = p_0 P\{X \geqslant n\}$, odakle slijedi $p_1 = p_0(1-p_0)$, $p_2 = p_0(1-p_0)^2, ..., p_k = p_0(1-p_0)^k, ...$ ◀

Primjer 4.10 *U kutiji se nalazi n bijelih i m crnih kuglica. Iz kutije se po modelu bez vraćanja vade kuglice. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju crnih kuglica koje se izvade prije nego što se izvadi r-ta bijela kuglica.*

$$P\{X=k\} = \frac{\binom{n}{r-1}\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{k+r-1}} \frac{n-r+1}{m+n-k-r+1} = \frac{\binom{k+r-1}{r-1}\binom{m+n-k-r}{n-r}}{\binom{m+n}{n}},\ k = 0, 1, ..., m.$$

Dobijena raspodjela se naziva **negativna hipergeometrijska** i koristi se zapis $Hi(n, m, r)$.

U slučaju kada $\frac{n}{m+n} \to p$, $0 < p < 1$, $n \to \infty$, tada

$$P\{X=k\} \to \binom{k+r-1}{r-1} q^k p^r, k = 0, 1, 2, ...,\ q = 1-p,\ n \to \infty.$$

Dakle, granična raspodjela je negativna binomna. U modelu sa vraćanjem, raspodjela slučajne promjenljive Y koja je jednaka broju crnih kuglica izvađenih prije nego što se izvadi r-ta bijela kuglica je

$$P\{X=k\} = \binom{k+r-1}{r-1}\Big(\frac{m}{m+n}\Big)^k\Big(\frac{n}{m+n}\Big)^r, k = 0, 1, 2, ... \blacktriangleleft$$

Primjer 4.11 *n kuglica na kojima su zapisani brojevi $1, 2, ..., n$ se na slučajan način razmiješta u n kutija koje su označene brojevima $1, 2, ..., n$ i to tako da se u svaku kutiju smjesti tačno jedna kuglica. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju kutija kod kojih je broj kutije jednak broju kuglice koja je smještena u kutiju.*

Iz zadatka o rasijanom dekanu slijedi da je

$$P\{X=0\} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Označimo sa A događaj da su brojevi na r izabranih kuglica jednaki brojevima kutija u koje se kuglice smještaju. Označimo sa B događaj da se ni jedan od preostalih $n-r$ brojeva na kuglicama ne podudara sa brojem kutije u koju se kuglica smješta.

$$P\{X=r\} = \binom{n}{r}P(AB) = \binom{n}{r}P(A)P(B|A) = \binom{n}{r}\frac{(n-r)!}{n!}\Big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\Big),\ r = 0, 1, ..., n.$$

Granični slučajevi binomne raspodjele dovode do dvije značajne raspodjele: Puasonove i normalne.

Teorema 4.3 *Neka je* $S_n : \mathcal{B}(n, p_n), (n \in \mathbb{N})$ *i neka je* $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda, 0 < \lambda < \infty$. *Tada za svako* $k = 0, 1, 2, ...$ *važi*

$$\lim_{n\to\infty} P\{S_n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Uvedimo oznaku $np_n = \lambda_n$. Na osnovu uslova imamo $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Za proizvoljno $k = 0, 1, 2, ..$ imamo

$$\begin{aligned} P\{S_n = k\} &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\Big(\frac{\lambda_n}{n}\Big)^k\Big(1-\frac{\lambda_n}{n}\Big)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!}\Big(1-\frac{\lambda_n}{n}\Big)^n\Big(1-\frac{1}{n}\Big)...\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\Big(1-\frac{\lambda_n}{n}\Big)^{-k} \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, n\to\infty. \blacklozenge \end{aligned}$$

Granične vjerovatnoće iz prethodne teoreme su vezane za realizacije $k, k = 0, 1, 2, ...$, a kako je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 1$ to prethodna teorema sugeriše slučajnu promjenljivačinu X sa raspodjelom

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},\ k = 0, 1, 2, \ldots, \lambda > 0.$$

Za ovako raspodjeljenu slučajnu promjenljivu kažemo da ima **Puasonovu** raspodjelu sa parametrom λ i koristimo zapis $X : \mathcal{P}(\lambda)$. Puasonova raspodjela je rasprostranjena u praksi. Suptilna analiza pokazuje da je po Puasonovom zakonu raspodijeljena slučajna promjenljiva koja prebrojava kosmičke čestice koje padnu na neki lokalitet u toku, recimo jednog sata.

Ako je $S_n : \mathcal{B}(n, p_n)$ tada na osnovu Teoreme (4.3) za promjenljivake n i male p_n važi približna formula

$$P\{S_n = k\} \approx \frac{\lambda_n^k}{k!} e^{-\lambda_n},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n, \lambda_n = np_n.$$

Ova aproksimacija se obično upotrebljava ako je $n \geqslant 20$, $np_n < 10$.

Primjer 4.12 *Kolika je vjerovatnoća da među 1000 slučajno odabranih osoba njih četvoro slavi rođandan prvog januara?*

Slučajna promjenljiva X koja među odabranim "prebrojava" osobe rođene prvog januara ima $\mathcal{B}(1000, \frac{1}{365})$ raspodjelu koja se aproksimira sa $P(2,73)$ raspodjelom. Dakle, tražena vjerovatnoća je

$$\frac{(2,73)^4}{4!} e^{-2,73} = 0,151.$$

Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

DEFINICIJA 4.5 **Funkcija raspodjele vjerovatnoće slučajne promjenljive** X (ili kratko **funkcija raspodjele**) je funkcija $F_X = F : R \longrightarrow [0,1]$ zadata sa

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{\omega : X(\omega) < x\},\, x \in R.$$

Primjer 4.13 *Novčić se baca dva puta. Neka je X broj palih pisama. Imamo:*

$$\Omega = \{(GG),(GP),(PG),(PP)\}, \mathfrak{F} = \mathbb{P}(\Omega)$$

i vjerovatnoća se zadaje tako što se svakom elemntarnom ishodu pridruži vjerovatnoća $\frac{1}{4}$.

Za $x \leqslant 0$ imamo $F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} = P\{\emptyset\} = 0.$

Za $0 < x \leqslant 1$ imamo $F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} = P\{(GG)\} = 1/4.$

Za $1 < x \leqslant 2$ imamo $F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} = P\{(GG),(GP),(PG)\} = 3/4.$

Za $x > 2$ imamo $F(x) = P\{\omega : X(\omega) < x\} = P\{\Omega\} = 1.$

Funkcija raspodjele slučajne promjenljive X je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1/4, & 0 < x \leqslant 1 \\ 3/4, & 1 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Primijetimo da se raspodjela slučajne promjenljiva X može pročitati sa grafika funkcije $F(x)$. Naime, tačke u kojima funkcija $F(x)$ ima skok su vrijednosti slučajne promjenljive, a veličina skoka jednaka je vjerovatnoći sa kojom se uzima odgovarajuća vrijednost. ◀

Navešćemo svojstva funkcije raspodjele.

a) $F(x)$ **je monotono rastuća funkcija.** Dokažimo. Neka su x_1 i x_2 proizvoljni realni brojevi takvi da je $x_1 < x_2$. Imamo

$$\{X < x_1\} \subseteq \{X < x_2\} \Longrightarrow F(x_1) = P\{X < x_1\} \leqslant P\{X < x_2\} = F(x_2).$$

b) $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0,\ F(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1.$
Zbog monotonosti funkcije $F(x)$ dovoljno je dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} F(-n) = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} F(n) = 1.$

Događaji $A_n = \{X < -n\}$, $n \in N$, čine monotono opadajući niz i $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ (ne postoji ishod ω takav da je $X(\omega)$ manji od svih negativnih cijelih brojeva). Iz neprekidnosti vjerovatnoće u odnosu na opadajući niz događaja slijedi

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = F(-\infty) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P\{\emptyset\} = 0.$$

Događaji $A_n = \{X > n\}$, $n \in N$, čine monotono rastućiući niz i $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. Iz neprekidnosti vjerovatnoće u odnosu na rastući niz događaja slijedi

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} F(n) = F(\infty) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P\{\Omega\} = 1.$$

c) **Za** $\forall x \in R$ **važi** $F(x-0) = F(x)$ **tj. funkcija** $F(x)$ **je neprekidna sa lijeve strane u svim tačkama.** Dokažimo ovo tvrđenje.

Neka je x proizvoljan realan broj i neka je $x_n = x - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Za niz događaja $A_n = \{X < x_n\}$ važi $A_n \uparrow$ i $\{X < x\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Na osnovu neprekidnosti vjerovatnoće u odnosu na monotono rastući niz događaja, imamo

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \lim_{n\to\infty} P\{X < x_n\} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x-0).$$

d) **Funkcija raspodjele** $F(x)$ **ima najviše prebrojivo tačaka prekida.** Uspostavićemo 1-1 preslikavanje sa skupa tačaka prekida u skup $\mathbb{Q}$ odakle će slijediti tvrđenje. Neka je x_0 proizvoljna tačka prekida i preslikajmo je u racionalnu tačka q_0 sa polusegmenta $[F(x_0), F(x+0))$. Istovjetno preslikavamo svaku tačku prekida tj slikamo je u neku racionalnu tačku sa polusegmenta "prekida". Zbog disjunktnosti polusegmenata slijedi injektivnost preslikavanja.

e) Neka je $[a,b)$ proizvoljan segment na realnoj pravoj. **Tada je**

$P\{X \in [a,b)\} = F(b) - F(a)$. Dokažimo.

$$\{\omega : X(\omega) \in [a,b)\} = \{a \leqslant X < b\} = \{X < b\} \setminus \{X < a\},$$

dobijamo

$$P\{X \in [a,b)\} = P\{\{X < b\} \setminus \{X < a\}\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a).$$

f) Neka je x_0 proizvoljan realan broj. **Važi:** $P\{X = x_0\} = F(x_0+0) - F(x_0)$. Zaista,

$$P\{X = x_0\} = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x_0 \leqslant X < x_0 + \frac{1}{n}\}\Big) = \lim_{n\to\infty}\big[F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0)\big] = F(x_0+0) - F(x_0).$$

g) Neka je F_X funkcije raspodjele vjerovatnoće slučajne promjenljive X. Neposredno iz f) slijedi: funkcija F_X je neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je $P\{X = x_0\} > 0$.

Primjer 4.14 *Neka je $q_n, n = 1, 2, ...$ jedno nizanje racionalnih brojeva sa $\mathbb{R}$ i neka je X slučajna promjenljiva sa raspodjelom*

$$p_n = P\{X = q_n\} = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, ..$$

Imamo,

$$F(x) = \sum_{n:q_n<x} p_n.$$

Skup tačaka prekida funkcije $F(x)$ je već pomenuto nizanje racionalnih brojeva. Dakle, funkcija $F(x)$ je monotono rastuća i njen skup tačaka prekida je svuda gust na $\mathbb{R}$. ◀

Kratak izvod iz Teorije mjere

Generalni skup ćemo označavati sa S.

Definicija 4.6 *Nenegativna σ aditivna funkcija skupa na σ polju $\mathcal{V}$ se naziva* **mjera**. *Ako na σ polju $\mathcal{V}$ postoji mjera, skupovi sa $\mathcal{V}$ se nazivaju* **mjerljivim**, *a par $(S, \mathcal{V})$* **mjerljivim prostorom**.

Vjerovatnoća je normirana mjera na $(\Omega, \mathfrak{F})$.

Definicija 4.7 *Mjera m na polju $\mathcal{P}$ je nenegativna funkcija skupa takva da za disjunktne skupove $A_n, n \in \mathbb{N}$ za koje je $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}$ važi $m(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$.*

Teorema 4.4 (Karateodorijeva teorema o proširenju mjere) *Za mjeru zadatu na polju $\mathcal{P}$ postoji jedinstveno proširenje na $\sigma(\mathcal{P})$.*

Definicija 4.8 *Funkcija $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$: koja je*

1^0 *monotono rastuća,*

2^0 *neprekidna sa lijeve strane i*

3^0 $F(-\infty) = 0,\ \ F(\infty) = 1$

se naziva **funkcija raspodjele.**

Komentar. Funkcija raspodjele iz (4.5) je bila vezana za konkretnu slučajnu promjenljivu dok se definicijom (4.8) opisuju funkcije koje nazivamo raspodjelama. Upotrebu istog termina objasniće posljedica (4.1).

Teorema 4.5 *a) Ako je P vjerovatnoća na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ tada je*

$$F(x) = P((-\infty, x)),\ x \in \mathbb{R}$$

funkcija raspodjele.

b) Ako je F funkcija raspodjele tada postoji jedinstvena vjerovatnosna mjera (vjerovatnoća) $P = P_F$ (indeksom F naglašavamo da je mjera zadata pomoću F) na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ takva da je

$$P_F((-\infty, x)) = F(x) \ \ za\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posljedica 4.1 *Neka je F funkcija raspodjele. Tada postoji vjerovatnosni prostor $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ i slučajna promjenljiva X na njemu takva da je $F_X = F$.*

Dokaz. Na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P_F)$ definišimo slučajnu promjenljivu $X(\omega) = \omega, \omega \in \Omega$. Imamo

$$F_X(x) = P_F\{\omega : X(\omega) < x\} = P_F\{\omega : \omega < x\} = P_F((-\infty, x)) = F(x) \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posljedica 4.2 *Ako je P normirana mjera na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ tada postoji slučajna promjenljiva X takva da je $P = P_X$. To je slučajna promjenljiva čija je funkcija raspodjele $F(x) = P((-\infty, x)), x \in \mathbb{R}$.*

Posljedica 4.3 *Sa $P = P_X \longrightarrow F_X$ se uspaostavlja biunivoka korespondencija između skupa vjerovatnosnih mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ i skupa funkcija raspodjele.*

Neka je X slučajna promjenljiva sa raspodjelom P_X i funkcijom raspodjele F_X. Neka je za proizvoljni polusegment $[a, b)$, $\mu_{F_X}([a, b)) := F_X(b) - F_X(a)$. Prisjetimo se da je $F_X(b) - F_X(a) = P_X([a, b))$. Funkciju μ_{F_X} koju smo zadali na polusegmentima proširimo do vjerovatnosne mjere na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$. Imamo $\mu_{F_X} = P_X$. Mjera μ_{F_X} se naziva Lebeg-Stiltjesovom. Koristeći uobičajenu notaciju iz teorije Lebegovih integrala imamo

$$P(X^{-1}(S)) = P_X(S) = \int\limits_{X^{-1}(S)} P(d\omega) = \int\limits_S P_X(dx) = \int\limits_S dF_X(x), S \in \mathcal{B}^1.$$

Dakle, zadatak traženja vjerovatnoće sa kojom slučajna promjenljiva "upada" u Borelov skup se može riješiti korišćenjem funkcije raspodjele-treći intagral, u literaturi je poznat kao Lebeg-Stiltjesov. Ovakav postupak je jednostavniji u odnosu na dva prethodna koja podrazumijevaju korišćenje mjera P i P_X (dva prva integrala).

DEFINICIJA 4.9 *Funkcija F je* **funkcija raspodjele diskretnog tipa** *ako za nju važi*

$$F(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i, x \in \mathbb{R},$$

gdje su $p_i, i \in I$, I je konačan ili prebrojiv skup, neki nenegativni brojevi za koje je $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$, a $x_i, i \in I$ su neki realni brojevi.

Lako se provjerava da je diskretna funkcija raspodjele funkcija raspodjele.

Teorema 4.6 *Slučajna promjenljiva X je diskretnog tipa ako i samo ako je njena funkcija raspodjele F_X diskretnog tipa.*

Ako je X diskretna slučajna promjenliva sa raspodjelom $P\{X = x_i\} = p_i$ tada je $F_X(x) = \sum\limits_{i:x_i<x} p_i$. Obrnuto, ako je $F_X(x) = \sum\limits_{i:x_i<x} p_i$ tada je $P\{X = x_i\} = p_i$.

DEFINICIJA 4.10 *Za slučajnu promjenljivu X kažemo da je* **neprekidna** *ako je funkcija F_X neprekidna.*

DEFINICIJA 4.11 *Za slučajnu promjenljivu X kažemo da je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna funkcija g takva da*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Za funkciju raspodjele slučajne promjenljive apsolutno neprekidnog tipa kažemo da je apsolutno neprekidnog tipa.

Slučajne promjenljive apsolutno neprekidnog tipa su neprekidne. Funkcija g se naziva **gustina slučajne promjenljive** X ili prosto **gustina od** X. Jasno, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = F_X(\infty) = 1$. U Analizi se dokazuje da u svim tačkama neprekidnosti funkcije g važi $F'(x) = g(x)$.

Neka je $[a, b)$ proizvoljni polusegment na realnoj pravoj i neka je X slučajna promjenljiva apsolutno neprekidnog tipa sa funkcijom raspodjele F i funkcijom gustine g. Imamo

$$P\{X \in [a, b)\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} g(t)dt - \int_{-\infty}^{a} g(t)dt = \int_{a}^{b} g(t)dt.$$

Takođe, za proizvoljni Borelov skup S važi

$$P\{X \in B\} = \int_B dF(t) = \int_B g(t)dt.$$

Prvi integral je Lebeg Stltjesov, a drugi Lebegov. Znači, raspodjela slučajne promjenljive apsolutno neprekidnog tipa je određena njenom gustinom (ili njenom funkcijom raspodjele, znamo iz opšteg slučaja).

Ako je gustina g slučajne promjenljive X neprekidna, iz teoreme o srednjoj vrijednosti integrala slijedi

$$P\{x_0 \leqslant X < x_0 + \Delta x\} = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0.$$

Ako je

$$P\{x_0 \leqslant X < x_0 + \Delta x\} = h(x_0)\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0,\ \text{za } \forall x_0 \in \mathbb{R},$$

dokazuje se da je F_X apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom h. Isto tvrđenje važi u slučaju promjenljive X čiji je nosač mjere interval (a, b), stim da se u prethodnoj formulaciji $\mathbb{R}$ mijenja sa (a, b).

Teorema 4.7 *Ako za neprekidnu funkciju raspodjele F neke slučajne promjenljive X važi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(t)dt = 1$$

tada je X slučajna promjenljiva apsolutno neprekidnog tipa i njena gustina je F'.

Teorema 4.8 *Funkcija g je funkcija gustine neke slučajne promjenljive X ako i samo ako je nenegativna i $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$.*

Postoje dvije definicije koje su ekvivalentne definiciji (4.11).

Definicija 4.12 *Za slučajnu promjenljivu X kažemo da je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna funkcija g takva da za svaki polusegment $[a, b)$ važi*

$$P_X([a, b)) = \int_a^b g(t)dt.$$

Definicija 4.13 *Za slučajnu promjenljivu X kažemo da je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna funkcija g takva da za svaki Borelov skup S sa $\mathbb{R}$ važi*

$$P_X(S) = \int_S g(t)dt.$$

Primjer 4.15 *Slučajno biramo tačku iz intervala* (a, b). *Odgovarajući vjerovatnosni prostor formiramo u tri koraka. Prvo, za događaje proglašavamo polusegmente sa* (a, b) *(jer je najlakše provjeriti da li se takav događaj realizovao, tj da li izabrana tačka pripada polusegmentu) a za proizvoljni* $[c, d), [c, d) \subset (a, b), P([c, d)) = \frac{d-c}{b-a}$. *Zatim formiramo polje* $\mathcal{C}$ *koje čine konačne unije disjunktnih polusegmenata sa* (a, b), *a vjerovatnoća se zadaje kao zbir vjerovatnoća polusegmenata koji čine uniju. Pokazuje se da je ovako zadata vjerovatnoća-mjera korektno definisana na* $\mathcal{C}$. *I na kraju, formiramo* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *gdje je* $\Omega = (a, b), \mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{(a,b)}$ *i* P *je proširenje (jednoznačno, teorema Karateodori) sa* $\mathcal{C}$ *na* $\sigma(\mathcal{C})$. *Konkretno, ako je* $B \in \mathcal{B}_{(a,b)}$ *tj* B *je Borelov skup sa* (a, b) *tada je* $P(B) = \frac{mes(B)}{b-a}$ *gdje je mes Borelova mjera.*◀

Primjer 4.16 *Slučajno biramo tačku iz* $G \in \mathcal{B}^n$ *tj* G *je Borelov skup sa* $\mathbb{R}^n$. *Po analogiji sa primjerom* (4.15), $\Omega = G, \mathfrak{F} = \mathcal{B}_G$, *a* $P(g) = \frac{mes(g)}{mes(G)}, g \in \mathcal{B}_G$, *mes je Borelova mjera na* $\mathbb{R}^n$. *Ovako zadata vjerovatnoća se naziva geometrijska.*◀

Primjer 4.17 *U slučajnom opitu iz primjera* (4.15), *formirajmo slučajnu promjenljivu* $X(\omega) = \omega$. *Slučajna promjenljiva* X *prati opit slučajnog izbora tačke sa intervala* (a, b). *Realizacije promjenljive* X *čine skup* (a, b) *(nosač mjere-vjerovatnoće). Za proizvoljni interval* $(c, d) \subset (a, b)$ *imamo*

$$P\{c < X < d\} = \frac{mes((c, d) \cap (a, b))}{mes(a, b)} = \int_c^d g(t)dt,$$

gdje je

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in (a, b), \\ 0, & t \notin (a, b). \end{cases}$$

Sada je

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$

Možemo postupiti i drugačije. Naime, imajući u vidu geometriju slučajne promjenljive X *nalazimo* $F(x)$ *a zatim gustinu dobijamo kao izvod od* $F(x)$. *Za slučajnu promjenljivu* X *kažemo da ima ravnomjernu (uniformnu) raspodjelu na intervalu* (a, b) *i koristimo zapis* $X : \mathcal{U}(a, b)$. ◀

Komentar. Funkcija gustine je određena do na skup mjere 0. U prethodnom primjeru smo nenulti dio funkcije gustine zadali na (a, b) ali smo nenulti dio mogli zadati i na $[a, b)$ ili $(a, b]$ ili $[a, b]$.

Primjer 4.18 *Slučajna promjenljiva* X *ima* **eksponencijalnu** *raspodjelu sa parametrom* λ, *ako je njena gustina* $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, $\lambda > 0$. *Koristimo notaciju* $X : \mathcal{E}(\lambda)$.

Navedimo model u kome se pojavljuje slučajna promjenljiva koja ima eksponencijalnu raspodjelu. Sijalica počinje sa radom u moment $t = 0$ i radi neprekidno dok ne pregori. Pretpostavimo da je vjerovatnoća da sijalica pregori u toku vremenskog intervala $(t, t + \Delta t)$ uz uslov da nije pregorila do momenta t jednaka $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Ova pretpostavka je u saglasju sa onim što se u praksi dešava. Označimo sa X vrijeme rada sijalice do momenta kada pregori. Neka je $Q(t) = P\{X \geqslant t\}$. Imamo

$$Q(t + \Delta t) = P\{X \geqslant t\}P\{X \geqslant t + \Delta t | X \geqslant t\} = Q(t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)].$$

Dobijamo

$$\frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = -\lambda Q(t) + Q(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Nakon traženja granične vrijednosti kada $\Delta \to 0$ dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q(t).$$

Nakon rješavanja, uzimajući u obzir da je $Q(0) = 1$, dobijamo $Q(t) = e^{-\lambda t}$. Dakle $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$, i gustina $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$. Lako se provjerava

$$P\{t < X < t + u | X > t\} = P\{X < u\}.(*)$$

Dakle, eksponencijalna raspodjela ima svojstvo odsustva pamćenja. Dokažimo da je eksponencijalna jedina nenegativna apsolutno neprekidna raspodjela sa svojstvom odsustva pamćenja. $(*)$ je ekvivalentno sa

$$\frac{Q(t) - Q(t + u)}{Q(t)} = 1 - Q(u) \Leftrightarrow Q(t + u) = Q(t)Q(u).$$

Uzimajući u obzir da je funkcija $Q(t)$ neprekidna i ograničena, dobijena funkcionalna jednačina ima rješenje $Q(t) = e^{-\lambda t}, \lambda > 0$, $t > 0$. ◀

Primjer 4.19 *Slučajna promjenljiva X ima* **normalnu** *raspodjelu sa parametrima m i σ^2, ako je njena gustina*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in R.$$

Koristimo notaciju $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. ◀

Definicija 4.14 *Slučajna promjenljiva X je* **singularnog tipa** *ako je F_X neprekidna i $F'_X(x) = 0$ skoro svuda na $\mathbb{R}$. Za funkciju raspodjele F_X kažemo da je singularnog tipa.*

Kantorova stepenica τ je funkcija raspodjele singularnog tipa. Jedna značajna teorema analize kaže da funkcija raspodjele F ima prvi izvod skoro svuda na $\mathbb{R}$ i za svaki polusegment $[a, b)$ važi

$$\int_a^b F'(t)dt \leqslant F(b) - F(a).$$

Funkcija raspodjele F je apsolutno neprekidnog tipa ako i samo ako za svaki polusegment $[a, b)$ važi

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Primijetimo, $\int_0^1 \tau'(t)dt = 0 < \tau(1) - \tau(0) = 1$.

Iz do sada izloženog se vidi da se pripadnost slučajne promjenljive nekom od tipova izražava u terminima pripadnosti odgovarajuće funkcije raspodjele odgovarajućem tipu. Vjerovatnosnu mjeru na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ nazivamo diskretnom, apsolutno neprekidnom ili singularnom u zavisnosti od tipa slučajne promjenljive koja tu mjeru generiše. Postoje slučajne promjenljive čija funkcija raspodjele ne pripada ni jednom od tipova.

Teorema 4.9 *Svaka funkcija raspodjele F se na jedinstven način može zapisati u obliku*

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$$

gdje je F_1 funkcija raspodjele diskretnog tipa, F_2 funkcija raspodjele apsolutno neprekidnog tipa a F_3 funkcija raspodjele singularnog tipa, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Primjer 8. Neka je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{2\tau(x)}{3}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

F je funkcija raspodjele i za nju važi

$$F(x) = \frac{1}{3}F_2(x) + \frac{2}{3}F_3(x),$$

gdje je F_2 funkcija raspodjele slučajne veličine koja ima $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodjelu a $F_3(x) = \tau(x)$. Odgovarajuća vjerovatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ je mješavina apsolutno neprekidne i singularne mjere. Primijetimao, F je neprekidna funkcija i $\int_{-\infty}^{\infty} F'(t)dt = \frac{1}{3}$.

5 Slučajni vektori

Skupovi oblika $\mathrm{P} = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ...[a_n, b_n)$ se nazivaju paralelopipedima na prostoru $\mathbb{R}^n$. Sa $\mathcal{P}$ označimo kolekciju paralelopipeda.

Definicija 5.1 *Minimalno σ polje generisano kolekcijom $\mathcal{P}$ nazivamo Borelovim σ poljem na $\mathbb{R}^n$. Uobičajena oznaka je $\mathcal{B}^n$*

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju $\mathcal{B}^n$ se može zadati na više načina. Sljedeći analogiju možemo recimo konstatovati da je $\mathcal{B}^n$ minimalno σ polje generisano otvorenim skupovima sa $\mathbb{R}^n$.

Sva teorijska razmatranja u tekstu koji slijedi su vezana za vjerovatnosni prostor $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Definicija 5.2 *Funkcija $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se naziva* **slučajni vektor** *ako za svaki Borelov skup B važi*

$$\mathbb{X}^{-1}(B) = \{\omega : \mathbb{X}(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}.$$

Kao što znamo iz analize, $\mathbb{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega))$ i $X_i : \Omega \to \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$. Ako želimo da naglasimo dimenziju prostora, govorimo o n dimanzioalnom slučajnom vektoru.

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju postoje ekvivalentne definicije. Recimo,

Definicija 5.3 *Funkcija $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ se naziva* **slučajni vektor** *ako za svaki paralelopiped* P *važi*

$$\mathbb{X}^{-1}(\mathrm{P}) = \{\omega : \mathbb{X}(\omega) \in \mathrm{P}\} \in \mathfrak{F}.$$

Teorema 5.1 *Funkcija $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ je slučajni vektor ako i samo ako je svaka funkcija $X_i, i = 1, 2, ..., n$ slučajna promjenljiva.*

$(\Longrightarrow)$ Dokažimo da je X_1 slučajna promjenljiva. Za ostale funkcije dokaz je identičan. Neka je B prozvoljan Borelov skup sa $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X_1^{-1}(B) &= \{\omega : X_1(\omega) \in B\} \\ &= \{\omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)) \in B \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}\} = \mathbb{X}^{-1}(B \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}) \in \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Neka je $\mathrm{P} = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ...[a_n, b_n)$. Imamo

$$\mathbb{X}^{-1}(\mathrm{P}) = \{\omega : (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_n(\omega)) \in \mathrm{P}\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega : X_i(\omega) \in [a_i, b_i)\} \in \mathfrak{F}.$$

Neka je $\mathbb{X}$ slučajni vektor zadat na vjerovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ i neka je $P_{\mathbb{X}} : \mathcal{B}^n \longrightarrow [0,1]$ funkcija definisana sa

$$P_{\mathbb{X}}(B) = P\{\omega : \mathbb{X}(\omega) \in B\} = P(\mathbb{X}^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}^n.$$

Lema 5.1 *Funkcija $P_{\mathbb{X}}(\cdot)$ je vjerovatnoća na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$.*

Definicija 5.4 *Funkcija $P_{\mathbb{X}}$ se naziva* **raspodjela vjerovatnoće slučajnog vektora** $\mathbb{X}$ *ili kraće* **raspodjela slučajnog vektora** $\mathbb{X}$. *Vjerovatnosni prostor $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_{\mathbb{X}})$ naziva se* **fazni prostor slučajnog vektora** $\mathbb{X}$.

Definicija 5.5 *Neka je $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ slučajni vektor.* **Funkcija raspodjele slučajnog vektora** $\mathbb{X}$ *je funkcija $F_{\mathbb{X}} = F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ definisana sa*

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) &= F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = P_{\mathbb{X}}((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times ...(-\infty, x_n)) \\ &= P\{\omega : \mathbb{X}(\omega) \in (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times ... \times (-\infty, x_n)\} \\ &= P\{\omega : X_1(\omega) < x_1, X_2(\omega) < x_2, ..., X_n(\omega) < x_n\}, \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Pokažimo kako se pomoću funkcije raspodjele računa vjerovatnoća da dvodimenzionalni slučajni vektor $\mathbb{X} = (X_1, X_2)$ "upadne" u paralelopiped $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$.

$$P_{\mathbb{X}}([a_1, b_1) \times [a_2, b_2)) = P\{(X_1, X_2) \in [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)\} = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2).$$

Slijedeći isti postupak računa se vjerovatnoća "upadanja" u paralelopiped u prostoru $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} &P_{\mathbb{X}}([a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times [a_2, b_2)) = P\{(X_1, X_2, X_3) \in [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times [a_3, b_3)\} \\ &= F(b_1, b_2, b_3) - F(b_1, b_2, a_3) - F(b_1, a_2, b_3) - F(a_1, b_2, b_3) + F(b_1, a_2, a_3) + F(a_1, b_2, a_3) \\ &+ F(a_1, a_2, b_3) - F(a_1, a_2, a_3). \end{aligned}$$

Pređimo na opšti slučaj. Paralelopiped $\mathrm{P} = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ...[a_n, b_n)$ ima 2^n tjemena i to su tačke oblika

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), \text{ gdje je } x_i = a_i \text{ ili } x_i = b_i,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Definišimo znak tjemena:

$$z(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1, & \text{ako je broj indeksa } j \text{ za koje važi } x_j = a_j \text{ paran,} \\ -1, & \text{ako je broj indeksa } j \text{ za koje važi } x_j = a_j \text{ neparan.} \end{cases}$$

Za proizvoljnu funkciju $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ označimo sa $\Delta_F(\mathrm{P}) = \sum\limits_{\mathbf{x}} z(\mathbf{x}) F(\mathbf{x})$, sumira se po svim tjemenima paralelopipeda.

Ako je $\mathrm{P} = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ...[a_n, b_n)$, a $\mathbb{X}$ slučajni vektor sa funkcijom raspodjele F tada je

$$P_{\mathbb{X}}(\mathrm{P}) = \Delta_F(\mathrm{P}).$$

Neka je F funkcija raspodjele proizvoljnog n dimenzionalnog slučajnog vektora.

a) Funkcija F je monotono rastuća i neprekidna sa lijeve strane po svakoj koordinati.

b) $F(x_1, x_2, ..., x_n) \to 0$ kad bar jedna od koordinata $x_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ teži ka $-\infty$.

$F(x_1, x_2, ..., x_n) \to 1$ kad $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (\infty, \infty, ..., \infty)$.

Imajući u vidu jednodimenzionalni slučaj, prirodno je postaviti pitanje: Da li je svaka funkcija $F_{\mathbb{X}} = F : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ koja ima svojstva a) i b) funkcija raspodjele nekog vektora? Odgovor je negativan. Funkcija

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in D = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 > 1\}, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

ima svojstva a) i b). Pretpostavimo da je $F(x_1, x_2)$ funkcija raspodjele nekog slučajnog vektora $\mathbb{X}$. Tada je

$$P_{\mathbb{X}}([1/3, 1) \times [1/3, 1)) = F(1, 1) - F(1/3, 1) - F(1, 1/3) + F(1/3, 1/3) = -1.$$

Kontradikcija.

Definicija 5.6 *Funkcija $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$: koja je*

1^0 *neprekidna sa lijeve strane po svakoj koordinati*

i za koju važi

2^0 $F(x_1, x_2, ..., x_n) \to 0$ *kad bar jedna od koordinata* $x_i, i \in \{1, 2, ..., n\}$ *teži ka* $-\infty$.

$F(x_1, x_2, ..., x_n) \to 1$ *kad* $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (\infty, \infty, ..., \infty)$.

3^0 $\Delta_F(\mathrm{P}) \geqslant 0$ *za svaki paralelopiped* P

se naziva **funkcija raspodjele.**

Teorema 5.2 *a) Ako je P vjerovatnoća na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ tada je*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times ... \times (-\infty, x_n))$$

funkcija raspodjele.

b) Ako je F funkcija raspodjele tada postoji jedinstvena vjerovatnosna mjera (vjerovatnoća) $P = P_F$ (indeksom F naglašavamo da je mjera zadata pomoću F) na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ takva da za svaki

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

važi

$$P_F((-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times ... \times (-\infty, x_n)) = F(\mathbf{x}) \;\; za \; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

i za svaki paralelopiped $\mathrm{P} = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ...[a_n, b_n)$ *važi* $P_F(\mathbf{P}) = \Delta_F(\mathbf{P})$.

Posljedica 5.1 *Neka je F n dimenzionalna funkcija raspodjele. Tada postoji vjerovatnosni prostor $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ i slučajni vektor $\mathbb{X}$ na njemu takav da je $F_{\mathbb{X}} = F$.*

Posljedica 5.2 *Ako je P mjera na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ tada postoji slučajni vektor $\mathbb{X}$ takav da je $P = P_{\mathbb{X}}$.*

Posljedica 5.3 *Sa $P = P_{\mathbb{X}} \longrightarrow F_X$ se uspaostavlja biunivoka korespondencija između skupa vjerovatnosnih mjera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ i skupa n dimenzionalnih funkcija raspodjele.*

Neka je $\mathbb{X}$ slučajni vektor sa raspodjelom $P_{\mathbb{X}}$ i funkcijom raspodjele $F_{\mathbb{X}}$. Neka je za proizvoljni paralelopiped $\mathrm{P} = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times ...[a_n, b_n)$, $\mu_{F_{\mathbb{X}}} = \Delta_{F_{\mathbb{X}}}(\mathbf{P})$. Postupkom koji je detaljno opisan u jednodimenzionalnom slučaju, funkciju skupa $\mu_{F_{\mathbb{X}}}$ koju smo zadali na paralelopipedima, proširimo do vjerovatnosne mjere na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Imamo $\mu_{F_{\mathbb{X}}} = P_{\mathbb{X}}$. Mjera $\mu_{F_{\mathbb{X}}}$ se naziva Lebeg-Stiltjesovom.

Po analogiji sa jednodimenzionalnim slučajem imamo:

$$P(\mathbb{X}^{-1}(S)) = P_{\mathbb{X}}(S) = \int\limits_{\mathbb{X}^{-1}(S)} P(d\omega) = \int\limits_S P_{\mathbb{X}}(d\mathbf{x}) = \int\limits_S dF^n_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}), S \in \mathcal{B}^n, \mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ako je $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ slučajni vektor tada je funkcija $\mathbb{W} = (X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_k}), 1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n$ nastala odabirom nekih od funkcija koje čine $\mathbb{X}$ takođe slučajni vektor. Raspodjela slučajnog vektora $\mathbb{W}$ se naziva marginalna.

Definicija 5.7 *Za slučajni vektor čiji je skup realizacija konačan ili prebrojiv kažemo da je* **diskretnog tipa.**

Primjer 5.1 *Inicijalni opit u kome posmatramo događaje*

$$A_i, \sum_{i=1}^{k} A_i = \Omega, 1 \leqslant i \leqslant k, k \geqslant 3, P(A_i) = p_i, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

ponavljamo n puta. Neka je S_1 broj opita u kojima se realizuje događaj A_1, S_2 broj opita u kojima se realizuje događaj A_2, ..., S_k broj opita u kojima se realizuje događaj A_k. Primijetimo, $S_1 + S_2 + ... + S_k = n$. Imamo

$$\begin{aligned} P & \{(S_1, S_2, ..., S_k) = (n_1, n_2, ..., n_k)\} = P\{S_1 = n_1, S_2 = n_2, ..., S_k = n_k\} \\ = & \tfrac{n!}{n_1!n_2!...n_{k-1}!n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}, n_1, n_2, ..., n_k \geqslant 0, n_1 + n_2 + ... + n_k = n. \end{aligned}$$

Znamo da je

$$(p_1 + p_2 + ... + p_k)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+...+n_k=n \\ n_1,n_2,...,n_k \geqslant 0}} \frac{n!}{n_1!n_2!...n_{k-1}!n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k}.$$

Slučajni vektor $(S_1, S_2, ..., S_k)$ ima **polinomnu raspodjelu** *i koristimo zapis*

$$(S_1, S_2, ..., S_k) : \mathbb{M}(n, p_1, p_2, ..., p_k).$$

Na intervalu $(0, 1)$ slučajno biramo n tačaka. Naći raspodjelu slučajnog vekotora (S_1, S_2, S_3) gdje je S_1 broj izabranih tačaka sa $(0, 1/6)$, S_2 broj izabranih tačaka sa $(1/6, 1/2)$, a S_3 broj izabranih tačaka sa $(1/2, 1)$.

$$P\{(S_1, S_2, S_3) = (n_1, n_2, n_3)\} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} (1/6)^{n_1} (1/3)^{n_2} (1/2)^{n_3}, n_1, n_2, n_3 \geqslant 0, n_1 + n_2 + n_3 = n,$$

$(S_1, S_2, S_3) : \mathbb{M}(n, 1/6, 1/3, 1/2)$. ◀

Neka je (X, Y) diskretni slučajni vektor sa raspodjelom

$$P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\} = p_{i,j}, i = 1, 2, .., j = 1, 2, ..., \sum_i \sum_j p_{i,j} = 1.$$

Potražimo marginalne raspodjele.

$$q_i = P\{X = x_i\} = P\{X = x_i, \sum_j \{Y = y_j\}\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_j p_{i,j}.$$

Slično,

$$r_j = P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{i,j}.$$

Definicija 5.8 *Slučajni vektor $\mathbb{X} = (X_1, X_2 \dots, X_n)$ je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji* *nenegativna funkcija* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, naziva se* **gustina***, takva da za funkciju raspodjele vektora* $\mathbb{X}$ *važi*

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} ... \int_{-\infty}^{x_1} g(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n, \text{ za svaku tačku } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Postoji ekvivalentna definicija:

DEFINICIJA 5.9 *Slučajni vektor* $\mathbb{X} = (X_1, X_2 \ldots, X_n)$ *je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna funkcija* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *takva da za svaki skup* $B \in \mathcal{B}^n$ *važi*

$$P\{X \in B\} = \int \underset{B}{\ldots} \int g(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n.$$

U svim tačkama neprekidnosti gustine g važi

$$\frac{\partial^n F(t_1, \ldots, t_n)}{\partial t_1 \ldots \partial t_n} = g(t_1, \ldots, t_n).$$

Teorema 5.3 *Funkcija* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *je gustina nekog slučajnog vektora ako i samo ako je nenegativna i*

$$\int \underset{\mathbb{R}^n}{\ldots} \int g(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n = 1.$$

Ako je gustina g slučajnog vektora $(X_1, X_2, ..., X_n)$ neprekidna, tada je

$$P\{x_1 \leqslant X_1 < x_1 + \triangle x_1, ..., x_n \leqslant X_n < x_n + \triangle x_n\} = g(x_1, ..., x_n) \triangle x_1 ... \triangle x_n + o(\triangle x_1 \cdots \triangle x_n),$$

gdje $\triangle x_1 \to 0, ..., \triangle x_n \to 0$.

Ako je $(X_1, X_2, ..., X_n)$ slučajni vektor za koji važi

$$P\{x_1 \leqslant X_1 < x_1 + \triangle x_1, ..., x_n \leqslant X_n < x_n + \triangle x_n\} = h(x_1, ..., x_n) \triangle x_1 ... \triangle x_n + o(\triangle x_1 \cdots \triangle x_n),$$

gdje je $(x_1, x_2, ..., x_n)$ proizvolјni vektor iz $\mathbb{R}^n$ i $\triangle x_1 \to 0, ..., \triangle x_n \to 0$, tada je h njegova gustina.

Neka je (X, Y) apsolutno neprekidni slučajni vektor sa gustinom $g(u, v)$. Tada je,

$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\{X < x, Y \in R\} = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} g(u, v) dv du$$

te je X apsolutno neprekidna slučajna veličina sa gustinom

$$g_X(u) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u,v)dv.$$

Po analogiji, komponenta Y ima gustinu $g_Y(v) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u,v)du.$

Primjer 5.2 *Slučajno se bira tačka iz oblasti W, $W \in \mathcal{B}^n$. Neka su $X_1, X_2, ..., X_n$ koordinate slučajno izabrane tačke. Za proizvoljni skup $w \in \mathcal{B}^n$ imamo*

$$P\{(X_1, X_2, ..., X_n) \in w\} = \frac{\operatorname{mes}(w \cap W)}{\operatorname{mes} W} = \int\limits_w \dots \int g(t_1, t_2, ..., t_n)dt_1dt_2...dt_n,$$

gdje je

$$g(t_1, t_2, ..., t_n) = \begin{cases} 0, & (t_1, t_2, ..., t_n) \notin W, \\ \frac{1}{\operatorname{mes} W}, & (t_1, t_2, ..., t_n) \in W. \end{cases}$$

Znači, $(X_1, X_2, ..., X_n)$ je apsolutno neprekidni vektor sa gustinom g. Koristi se zapis

$$(X_1, X_2, ..., X_n) : \mathcal{U}(W)$$

i kaže se da vektor $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ima uniformnu (ravnomjernu) raspodijelu na oblasti W.◀

Neka je (X, Y) je slučajni vektor sa gustinom g. Pretpostavimo da je marginalna gustina g_X neprekidna i pozitivna u fiksiranoj tački x. Za svako $h > 0$ važi

$$\begin{aligned} P\{Y < y | x-h \leqslant X < x+h\} &= \frac{P\{Y < y, x-h \leqslant X < x+h\}}{P\{x-h \leqslant X < x+h\}} \\ = \frac{\int_{-\infty}^{y}\int_{x-h}^{x+h} g(u,v)dudv}{\int_{x-h}^{x+h} g_X(u)du} &= \frac{\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}\int_{-\infty}^{y} g(u,v)dvdu}{\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} g_X(u)du}. \end{aligned}$$

Sada je

$$\lim_{h\to 0} P\{Y < y | x-h \leqslant X < x+h\} = \frac{1}{g_X(x)} \int_{-\infty}^{y} g(x,v)dv.$$

Funkcija $F_{Y|X=x} : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ zadata sa

$$F_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{g_X(x)} \int_{-\infty}^{y} g(x,v)dv$$

naziva se **uslovna funkcija raspodjele** slučajne promjenljive Y pri uslovu $X = x$. Funkcija

$$g(y|x) = g_{Y|X=x}(y) = \frac{g(x,y)}{g_X(x)},$$

se naziva **gustina uslovne raspodjele** slučajne promjenljive Y pri uslovu $X = x$.

DEFINICIJA 5.10 *Slučajne promjenljive* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *su nezavisne ako su za svaku kolekciju skupova* $S_1 \in \mathcal{B}^1, \ldots, S_n \in \mathcal{B}^1$ *u potpunosti nezavisni događaji* $X_1^{-1}(S_1), \ldots, X_n^{-1}(S_n)$.

Teorema 5.4 *a) Neka su* $F_1, \ldots, F_n$ *redom, funkcije raspodjele slučajnih promjenljivih* $X_1, \ldots, X_n$ *i neka je* F *funkcija raspodjele slučajnog vektora* $(X_1, \ldots, X_n)$. *Slučajne promjenljive* $X_1, \ldots, X_n$ *su nezavisne ako i samo ako za svaki vektor* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *važi*

$$F(x_1, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n).$$

b) Diskretne slučajne promjenljive $X_1, \ldots, X_n$ *su nezavisne ako i samo ako za svaki vektor* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *važi*

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \{X_k = x_k\}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P\{X_k = x_k\}.$$

c) Neka su $g_1, \ldots, g_n$ *gustine slučajnih promjenljivih* $X_1, \ldots, X_n$ *i neka je* g *gustina slučajnog vektora* $(X_1, \ldots, X_n)$. *Slučajne promjenljive* $X_1, \ldots, X_n$ *su nezavisne ako i samo ako za svaki vektor* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *važi jednakost*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \cdots g_n(x_n).$$

DEFINICIJA 5.11 *Funkcija* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *je* **Borelova** *ako za svaki skup* $S \in \mathcal{B}^1$ *važi* $f^{-1}(S) \in \mathcal{B}^n$.

Lema 5.2 *Neka je* $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *i* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *Borelova funkcija. Tada je* $Y = f(\mathbb{X}) = f((X_1, X_2, ..., X_n)) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *slučajna promjenljiva.*

Neka je S proizvoljan Borelov skup sa $\mathbb{R}$.

$$Y^{-1}(S) = (f(\mathbb{X}))^{-1}(S) = \mathbb{X}^{-1}(f^{-1}(S)) \in \mathfrak{F}.$$

Lema 5.3 *Neka su* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *Borelove funkcije. Ako su* X *i* Y *nezavisne slučajne promjenljive tada su* $f(X)$ *i* $g(Y)$ *nezavisne slučajne promjenljive.*

Neka su S_1 i S_2 proizvoljni Borelovi skupovi sa $\mathbb{R}$. Zbog pretpostavljene nezavisnosti promjenljivih X i Y slijedi nezavisnost događaja $(f(X))^{-1}(S_1) = X^{-1}(f^{-1}(S_1))$ i $(g(Y))^{-1}(S_2) = Y^{-1}(g^{-1}(S_2))$.

Primjer 5.3 *Tri kuglice se na slučajan način razmještaju u tri kutije. Neka je* X *broj kuglica u prvoj kutiji, a* Y *broj zauzetih kutija. Naći raspodjelu slučajnog vektora* (X, Y). *Da li su* X *i* Y *nezavisne slučajne promjenljive?*

▶Kutije ćemo označavati brojevima $1, 2$ i 3, a za ishode ćemo proglasiti trojke kod kojih su "koordinate" određene rednim brojem kutije u koju se smješta redom, prva, druga, treća kuglica. Znači,

$$\Omega = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), \ldots, (3,3,3)\}, \overline{\overline{\Omega}} = 27.$$

Sada je, recimo, $(X,Y)(1,2,1) = (2,2)$. Pokažimo na jednom primjeru kako se dobijaju elementi tabele kojom je zadata raspodjela vektora (X,Y). Npr.

$$\begin{aligned} &P\{\omega : (X,Y)(\omega) = (1,2)\} = \\ &= P\{(1,2,2), (2,1,2), (2,2,1), (1,3,3), (3,1,3), (3,3,1)\} = \frac{6}{27}. \end{aligned}$$

Raspodjela slučajnog vektora (X,Y) se može predstaviti tabelom

$Y \diagdown X$	0	1	2	3
1	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$
2	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0
3	0	$\frac{6}{27}$	0	0

Sada imamo,

$$X : \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \end{array} \text{ i } Y : \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{27} & \frac{18}{27} & \frac{6}{27} \end{array}.$$

Vjerovatnoće sa kojima slučajna promjenljiva X uzima odgovarajuće vrijednosti se dobijaju sumiranjem elemenata iz kolone u kojoj se nalazi odgovarajuća vrijednost. Kad se radi sa slučajnom promjenljivom Y, ulogu kolone preuzima vrsta.

Pokažimo da su komponente X i Y zavisne slučajne promjenljive. Dovoljno je primijetiti da je

$$P\{(X,Y) = (2,2)\} = \frac{6}{27} \neq P\{X = 2\}P\{Y = 2\} = \frac{6}{27}\frac{18}{27} = \frac{4}{27}. \blacktriangleleft$$

Primjer 5.4 *Slučajne promjenljive X i Y su nezavisne, $X : \mathcal{P}(\lambda)$, $Y : \mathcal{P}(\mu)$. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = X + Y$.*

▶ $H_l = \{Y = l\}, l = 0, 1, 2...$ Zbog nezavisnosti komponenti X i Y, nakon primjene formule potpune vjerovatnoće dobijamo

$$\begin{aligned} P\{Z = k\} &= \sum_{l=0}^{k} P\{X + Y = k | Y = l\} P\{Y = l\} = \sum_{l=0}^{k} P\{X = l - k\} P\{Y = l\} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \mu^l \lambda^{k-l} = \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)}, \ k = 0, 1 \ldots \end{aligned}$$

Dakle, $Z : \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. ◄

Primjer 5.5 *Vektor* (X_1, X_2) *i ma* $\mathcal{U}([a_1, b_1) \times [a_2, b_2))$ *raspodjelu. Dokazati da su komponente* X_1 *i* X_2 *nezavisne. Ako su komponente* $X_1 : \mathcal{U}[a_1, b_1)$ *i* $X_1 : \mathcal{U}[a_2, b_2)$ *nezavisne, tada vektor* (X_1, X_2) *i ma* $\mathcal{U}([a_1, b_1) \times [a_2, b_2))$ *raspodjelu. Dokazati! Važi i prirodno uopštenje na slučaj vektora* $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Primjer 5.6 *Vektor* (X, Y) *ima* $\mathcal{U}(\{(x, y) : |u| + |v| < 1\})$ *raspodjelu. Ispitati nezavisnost komponenti* X *i* Y.

Primjer 5.7 *Slučajna promjenljiva* X_1 *ima* $\mathcal{U}(0, 1)$ *raspodjelu, a slučajna promjenljiva* X_2 *pri uslovu* $X_1 = x_1$ *ima* $\mathcal{U}(x_1, 1)$ *raspodjelu (koristi se i zapis* $X_2 : \mathcal{U}(X_1, 1)$*). Naći raspodjelu slučajne promjenljive* X_2.

Primjer 5.8 *Pretpostavimo da se u tački* $(m, a), a > 0$ *nalazi izvor koji po pravoj liniji u smjeru* x *ose zrači* α *čestice. Označimo sa* φ *ugao koji prava linija putanje čestice gradi sa* y *osom. Pretpostavimo da je* $\varphi : \mathcal{U}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *(tj svi pravci kretanja su ravnopravni) i označimo sa* X *tačku presjeka* α *čestice i* x *ose. Kako je* $X = m + atg\varphi$, *imamo*

$$F_X(x) = P\{X < x\} = P\left\{\varphi < arctg\frac{x - m}{a}\right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot arctg\frac{x - m}{a}.$$

Odgovarajuća gustina je

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{(x - m)^2 + a^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Za slučajnu promjenljivu X *kažemo da ima* **Košijevu** *raspodjelu i koristimo zapis* $X : \mathcal{C}(m, a)$. ◄

Neka su $y_1, y_2, ..., y_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ pri čemu je $y_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ najmanja od koordinata $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ je sljedeća po veličini od koordinata $x_1, x_2, ..., x_n$,..., $y_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ je najveća od koordinata $x_1, x_2, ..., x_n$. Neka je $(X_1, X_2, ..., X_n)$ slučajni vektor. Slučajne veličine

$$Y_1 = y_1(X_1, X_2, ..., X_n), Y_2 = y_2(X_1, X_2, ..., X_n), ..., Y_n = y_n(X_1, X_2, ..., X_n)$$

čine varijacioni niz.

Primjer 5.9 *Slučajne promjenljive* $X_1, X_2, ..., X_n$ *su nezavisne, jednako raspodijeljene, sa neprekidnom gustinom* $f(x)$ *i funkcijom raspodjele* $F(x)$ *i neka je* $Y_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, *odgovarajući varijacioni niz.*

a) Naći gustinu slučajne promjenljive Y_k.

b) Naći gustine slučajnih vektora (Y_k, Y_l), $1 \leqslant k < l \leqslant n$ *i* $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.

►a) Izračunajmo vjerovatnoću da Y_k "upadne" u $[t, t+\triangle t)$. Prva mogućnost je da tačno $k-1$ veličina iz kompleksa $X_1, X_2, ..., X_n$ "upadne" u $(-\infty, t)$, jedna "upadne" u $[t, t+\triangle t)$ i $n-k$ veličina "upadne" u $[t+\triangle t, +\infty)$. Vjerovatnoća "upadanja" veličine iz kompleksa u interval $(-\infty, t)$ je $F(t)$, u $[t, t+\triangle t)$ je $f(t)\triangle t + o(\triangle t)$, u $[t+\triangle t, +\infty)$ je $1-F(t+\triangle t)$. Sve ostale mogućnosti podrazumijevaju da u $[t, t+\triangle t)$ "upadnu" bar dvije veličina iz kompleksa, odgovarajuće vjerovatnoće su jednake $(f(t)\triangle t + o(\triangle t))^k = o(\triangle t), k \geqslant 2$.

$$P\{t \leqslant Y_k < t+\triangle t\} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}F^{k-1}(t))(f(t)\triangle t + o(\triangle t))(1-F(t+\triangle t))^{n-k}$$
$$+ o(\triangle t) = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}f(t)F^{k-1}(t)(1-F(t))^{n-k}\triangle t + o(\triangle t), \triangle t \to 0$$

te je $f_{Y_k}(t) = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}f(t)F^{k-1}(t)(1-F(t))^{n-k}$.

b) Izračunajmo vjerovatnoću da Y_k "upadne" u $[u, u+\triangle u)$ a Y_l u $[v, v+\triangle v)$. Prva mogućnost je da $k-1$ veličina "upadne" u $(-\infty, u)$, jedna u $[u, u+\triangle u)$, $l-k-1$ veličina "upadne" u $[u+\triangle u, v)$, jedna veličina "upadne" u $[v, v+\triangle v)$ i $n-l$ veličina "upadne" u $[v+\triangle v, +\infty)$. Vjerovatnoća realizacije preostalih mogućnosti je $o(\triangle u \triangle v)$, $\triangle u, \triangle v \to 0$. Dakle,

$$P\{u \leqslant Y_k < u+\triangle u, v \leqslant Y_l < v+\triangle v\} = \frac{n!}{(k-1)!(n-l)!(l-k-1)!}F^{k-1}(u)f(u)\triangle u f(v)\triangle v$$
$$(F(v) - F(u+\triangle u))^{l-k-1}(1-F(v+\triangle v))^{n-l} + o(\triangle u, \triangle v) = \frac{n!}{(k-1)!(n-l)!(l-k-1)!}f(u)$$
$$f(v)F^{k-1}(u)(F(v)-F(u))^{l-k-1}(1-F(v))^{n-l}\triangle u \triangle v + o(\triangle u \cdot \triangle v),\ \triangle u, \triangle v \to 0,$$

te je tražena gustina vektora (Y_k, Y_l)

$$f_{(Y_k,Y_l)}(u,v) = \frac{n!}{(k-1)!(n-l)!(l-k-1)!}f(u)f(v)F^{k-1}(u)\cdot(F(v)-F(u))^{l-k-1}(1-F(v))^{n-l},$$
$$u < v.$$

Istim rasuđivanjem se dobija da je gustina vektora $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$,

$$f(u_1, u_2, ..., u_n) = n! f(u_1)f(u_2)\cdots f(u_n),\ u_1 < u_2 < ... < u_n. \blacktriangleleft$$

Na temu varijacionog niza uradićemo jedan primjer iz diskretnog modela.

Primjer 5.10 *Iz kutije u kojoj su nalaze kuglice sa brojevima* $1, 2, ..., 100$ *po modelu bez vraćanja se vadi* 10 *kuglica. Naći raspodjelu slučajne promjenljive* Y_6.

$P\{Y_6 = k\} = \frac{\binom{k-1}{5}\binom{100-k}{4}}{\binom{100}{10}}$, $6 \leqslant k \leqslant 96$.

Primjer 5.11 *Slučajne promjenljive X i Y su nezavisne i jednako raspodijeljene, $P\{X = k\} = \frac{1}{n+1}$, $k = 0, 1, ..., n$. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = X + Y$.*

a) $0 \leqslant k \leqslant n$.

$$P\{Z = k\} = \sum_{l=0}^{k} P\{Z = k|Y = l\}P\{Y = l\} = \frac{k+1}{(n+1)^2}.$$

b) $n + 1 \leqslant k \leqslant 2n$.

$$P\{Z = k\} = \sum_{l=k-n}^{n} P\{Z = k|Y = l\}P\{Y = l\} = \frac{2n-k+1}{(n+1)^2}.$$

Ako u koordinantnom sistemu xOy nacrtamo roj tačaka čije su apscise brojevi k, a ordinate odgovarajuće vjerovatnoće $P\{Z = k\}$, primjećujemo da je obris roja trougao. Zbog toga raspodjelu slučajne promjenljive Z nazivamo **trougaonom**.

Primjer 5.12 *Slučajne promjenljive X i Y su nezavisne i $P\{X = k\} = \frac{1}{n+1}$, $k = 0, 1, ..., n$, $P\{Y = k\} = \frac{1}{m+1}$, $k = 0, 1, ..., m$, $m > n$ Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Z = X + Y$.*

a) $0 \leqslant k \leqslant n$.

$$P\{Z = k\} = \sum_{l=0}^{k} P\{Z = k|X = l\}P\{X = l\} = \sum_{l=0}^{k} P\{Y = k - l\}P\{X = l\} = \frac{k+1}{(n+1)(m+1)}.$$

b) $n < k \leqslant m$.

$$P\{Z = k\} = \sum_{l=0}^{n} P\{Z = k|X = l\}P\{X = l\} = \sum_{l=0}^{n} P\{Y = k-l\}P\{X = l\} = \frac{n+1}{(n+1)(m+1} = \frac{1}{m+1}.$$

c) $m + 1 \leqslant k \leqslant m + n$.

$$P\{Z = k\} = \sum_{l=k-m}^{n} P\{Z = k|X = l\}P\{X = l\} = \sum_{l=k-m}^{n} P\{Y = k - l\}P\{X = l\} = \frac{m+n-k+1}{(n+1)(m+1)}.$$

Ako u koordinantnom sistemu xOy nacrtamo roj tačaka čije su apscise brojevi k, a ordinate odgovarajuće vjerovatnoće $P\{Z = k\}$, primjećujemo da je obris roja trapez. Zbog toga raspodjelu slučajne promjenljive Z nazivamo **trapeznom**.

6 Matematičko očekivanje, disperzija i koeficijent korelacije

Često je poželjno imati neku sumarnu informaciju o slučajnoj veličini. Među tim informacijama – karakteristikama, najvažnije je matematičko očekivanje.

Navešćemo primjer u kome će biti sprovedena neformalna analiza. Zaključci će se oslanjati na intuiciju.

Primjer 6.1 *Slučajna promjenljiva X koje je jednaka palom broju u opitu u kome jednom bacamo kocku ima raspodjelu*

$$X : \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}. \end{array}.$$

Pretpostavimo da smo kocku bacili N puta i neka je jedinica pala N_1 puta, dvojka N_2 puta,..., šestica N_6 puta. Potražimo srednju vrijednost palih brojeva. Imamo

$$\frac{1N_1 + 2N_2 \cdots + 6N_6}{N}.$$

Kada $N \to \infty$, tada će, tako nam govori intuicija, $\frac{N_i}{N} \longrightarrow \frac{1}{6}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$ (tj. relativna učestalost svakog od mogućih ishoda teži ka $\frac{1}{6}$). Znači, srednja vrijednost palih brojeva tj. realizacija slučajne promjenljive X konvergira ka broju $1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$. Koristi se zapis $EX = 3,5$ i kaže: matematičko očekivanje slučajne promjenljive X je $3,5$. Mi ćemo, motivisani načinom na koji je izračunat broj $3,5$ u našem primjeru, dati definiciju matematičkog očekivanja za proste slučajne promjenljive. Tačan smisao broju $3,5$ i uopšte matematičkom očekivanju će dati zakon velikih brojeva.◀

Definicija 6.1 *Neka je X prosta slučajna promjenljiva sa raspodjelom $p(x_k), k = 1, 2, \ldots .n$.* **Matematičko očekivanje** EX **slučajne veličine** X *definisaćemo pomoću jednakosti*

$$EX = \sum_{k=1}^{n} x_k p(x_k).$$

Definicija 6.2 *Neka je X slučajna promjenljiva sa raspodjelom $p(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$.* **Matematičko očekivanje** EX **slučajne promjenljive** X *definisaćemo pomoću jednakosti*

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k),$$

ako ovaj red apsolutno konvergira. Ako red ne konvergira apsolutno, tada kažemo da slučajna promjenljiva X nema matematičko očekivanje.

Da bismo objasnili smisao uslova apsolutne konvergencije reda kojim zadajemo matematičko očekivanje, uradićemo jedan primjer iz Analize.

Primjer 6.2 *Ako u razvoju* $\ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$, $-1 < x \leqslant 1$, *stavimo* $x = 1$, *dobijamo*

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \cdots$$

Potražimo

$$(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \cdots = \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \cdots = \frac{\ln 2}{2}.$$

Znači, u redu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *smo ispremještali članove (drugačije ih poređali, drugačije indeksirali) i na taj način smo dobili red koji konvergira ka drugoj vrijednosti. Ovu mogućnost pregrupisavanja članova u red čija je suma različita od sume polaznog reda, daju uslovno konvergentni redovi. Kod apsolutno konvergentnih redova, bez obzira na pregrupisavanje – preindeksiranje članova reda, suma reda je uvijek ista.*◀

Tačni smisao matematičkom očekivanju daćemo kroz zakon velikih brojeva. Tamo će biti pokazano da je matematičko očekivanje granica srednje vrijednosti realizacija slučajne veličine (u kom smislu granica, biće tamo objašnjeno). Kada red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$ uslovno konvergira, tada se članovi mogu preindeksirati tako da novoformirani red ima sumu koja je različita od polazne. Mi indeksiranjem nekoj vrijednosti slučajne promjenljiva dodijelimo indeks 1, nekoj indeks 2 itd., a preindeksiranje znači drugačiju podjelu indeksa. Indeksiranjem smo pripremili članove za sumiranje, a suma treba da predstavlja granicu srednje vrijednosti realizacija. Dakle, kada bi red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$ uslovno konvergirao, granica srednje vrijednosti realizacija (tj. matematičko očekivanje) slučajne promjenljive bi zavisila od toga kako smo indeksirali njene vrijednosti. Imali bismo patološku situaciju da ista karakteristika (tj. granica srednje vrijednosti realizacija) zavisi od čisto formalnog ređanja vrijednosti slučajne promjenljive. U slučaju kada red apsolutno konvergira, suma ne zavisi od načina indeksiranja i zahtjevom da red $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$ apsolutno konvergira obezbjeđuje se stabilnost sume koja predstavlja granicu srednje vrijednosti realizacija.

Iz definicije (6.1) je jasno da svaka prosta slučajna promjenljivaa ima očekivanje (često se prefiks matematičko izostavlja). Navešćemo primjer diskretne slučajne promjenljive koja nema očekivanje.

Primjer 6.3 *Slučajna promjenljiva X ima raspodjelu*

$$X : \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{3}{3^2\pi^2} & \frac{3}{2^2\pi^2} & \frac{3}{\pi^2} & \frac{3}{\pi^2} & \frac{3}{2^2\pi^2} & \frac{3}{3^2\pi^2} & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}.$$

Budući da $\frac{3}{\pi^2}(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\dots)$ ne konvergira apsolutno, možemo konstatovati da slučajna promjenljiva X nema očekivanje.◀

Jednostavno se dokazuju sljedeća svojstva matematičkog očekivanja diskretnih slučajnih promjenljivih. Sva navedena svojstva važe i u opštem slučaju.

S1) $|EX| \leqslant E|X|$.

S2) $Ec = c$, c je konstanta.

S3) Ako je $X \leqslant Y$, tada je $EX \leqslant EY$.

S4) $E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1EX_1 + \cdots + a_nEX_n$.

S5) Neka su X i Y nezavisne diskretne slučajne promjenljive. Tada je $EXY = EXEY$.

Primjer 6.4 *Neka je $S_n : \mathcal{B}(n,p)$. Tada je*

$$\begin{aligned} ES_n &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^kq^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Primjer 6.5 *Naći očekivanu sumu brojeva koji se izvlače u igri LOTO (izvlači se 7 brojeva iz skupa $\{1,2,\dots,39\}$).*

▶Neka je X_1 slučajna promjenljiva koja predstavlja prvoizvučeni broj, neka je X_2 slučajna promjenljiva koja predstavlja drugoizvučeni broj itd. Imamo

$$X_i : \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 39 \\ \frac{1}{39} & \frac{1}{39} & \dots & \frac{1}{39} \end{matrix}, \ i = 1,2,\dots 7.$$

Jednaka raspodijeljenost slučajnih promjenljivih X_i, $i = 1,2,\dots,7$, je posljedica činjenice da je vjerovatnoća da recimo, broj 13 bude izvučen u prvom izvlačenju ista kao i vjerovatnoća da bude izvučen u drugom, trećem itd., dakle uvijek je $\frac{1}{39}$. Situacija je analogna onoj iz primjera 3.3. Tražena suma je $W = X_1 + \cdots + X_7$, pa je

$$EW = EX_1 + \cdots + EX_7 = 7 \cdot \frac{1}{39}(1+2+\cdots+39) = 140.$$

Zahvaljujući aditivnosti očekivanja, očekivanje slučajne promjenljive W smo našli bez prethodnog traženja raspodjele ove slučajne promjenljive. Ista ideja se koristi i u sljedećem primjeru.◀

Primjer 6.6 *Ravan je išrafirana pravima koje obrazuju kvadrate dužine stranice* $2a$. *Na ravan se baca igla dužine* $2l\,(l < a)$. *Naći očekivani broj zasječenih pravih.*

▶Neka je X broj zasječenih horizontalnih pravih, a Y broj zasječenih vertikalnih pravih. Budući da je vjerovatnoća zasijecanja (Bifonov problem igle) $\frac{2l}{a\pi}$, imamo

$$X, Y : \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 - \frac{2l}{a\pi} & \frac{2l}{a\pi} \end{array},$$

pa je traženo očekivanje $E(X+Y) = EX + EY = \frac{4l}{a\pi}$. ◀

Primjer 6.7 *Iz špila od 52 karte slučajno se po modelu bez vraćanja vadi 10 karata. Naći očekivani broj izvađenih asova.*

$A_i, i = 1, 2, ..., 10$, i-ta izvađena karta je as, $P(A_i) = \frac{4}{52}$, $W = I_{A_1} + ... + I_{A_{10}}$ te je $EW = \frac{10}{13}$.

Primjer 6.8 *Deset osoba ulazi u lift u prizemlju sedmospratne zgrade. Naći očekivani broj zaustavljanja lifta.*

Primjer 6.9 *U kutiji se nalazi* M_1 *kuglica sa brojem* 1, M_2 *kuglica sa brojem* 2,..., M_N *kuglica sa brojem* N. *Iz kutije se po modelu bez vraćanja vadi* n *kuglica. Izračunati očekivani broj brojeva koji se ne pojavljuju.*

Primjer 6.10 *U kutiji se nalaze listice na kojima su zapisani brojevi od* 1 *do* 20. *Iz kutije se po modelu sa vraćanjem vadi* 10 *listica. Neka je* X *broj zabilježenih brojeva. Naći* EX.

$A_i, i = 1, 2, ..., 20$, među izvađenim brojevima postoji broj i. $X = I_{A_1} + ... + I_{A_{20}}$.

Definicija 6.3 *Neka je* X *apsolutno neprekidna slučajna promjenljiva sa gustinom* $g(x)$. *Matematičko očekivanje* EX *slučajne promjenljive* X *definisaćemo pomoću jednakosti*

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) \mathrm{d}x,$$

ako ovaj integral apsolutno konvergira. Ako integral ne konvergira apsolutno, tada kažemo da slučajna promjenljiva X *nema matematičko očekivanje.*

Zbog tijesne veze na relaciji sumiranje – integraljenje (sjetimo se da je integral uopštena suma) i veze na relaciji vjerovatnoća – funkcija gustine, ovakva definicija je bila očekivana.

Sljedeća teorema ima veliki teorijski i praktični značaj.

Teorema 6.1 Osnovna teorema za matematičko očekivanje. *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna promjenljiva sa gustinom $g(x)$ i neka je $f : R \longrightarrow R$ Borelova funkcija. Tada je*

$$Ef(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Dakle, očekivanje slučajne promjenljive $Y = f(X)$ možemo dobiti bez prethodnog traženja njene funkcije raspodjele. Preporučujemo čitaocu da vodeći računa o analogijama integral – suma i gustina – vjerovatnoća, formuliše prethodnu teoremu i za diskretne slučajne promjenljive.

Neka je (X, Y) apsolutno neprekidni slučajni vektor sa gustinom $g(x, y)$ i neka je $f : R^2 \longrightarrow R$ Borelova funkcija. Za slučajnu promjenljivu $Z = f(X, Y)$, analogno kao u teoremi (6.1), imamo

$$EZ = \iint_{R^2} f(x, y)g(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.1}$$

Dali smo definicije matematičkog očekivanja za diskretne i apsolutno neprekidne slučajne veličine. U opštem slučaju, očekivanje se identifikuje sa integralom koji se naziva Lebegov integral. Ako je X slučajna promjenljiva sa raspodjelom P_X i funkcijom raspodjele F, tada je

$$EX := \int_{\Omega} X(\omega)P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} xP_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} xdF(x).$$

Teorema (6.1). važi u opštem slučaju uz zapis: $Ef(X) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dF(x)$.

Primjer 6.11 *Slučajna promjenljiva X ima $\mathcal{C}(0, 1)$ raspodjelu. Kako integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x$ ne konvergira, to možemo konstatovati da slučajna promjenljiva X nema očekivanje.*◀

Primjer 6.12 $X : \mathcal{U}(a, b)$, $EX = \int_a^b \frac{x}{a+b}\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}$. ◀

Primjer 6.13 $X : \mathcal{E}(\lambda)$, $EX = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$. ◀

Primjer 6.14 $X:\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $EX=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=$
$=\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}}\mathrm{d}v=m$, *gdje je* $v=\frac{x-m}{\sigma}$. *Koristili smo poznati rezultat* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$. ◀

Primjer 6.15 *Na kružnici poluprečnika* 1 *slučajno se biraju tačke* A *i* B. *Naći* EX *gdje je* $X=|AB|$.

▶ $\alpha:\mathcal{U}(0,\pi)$, $X=|AB|=2\sin\frac{\alpha}{2}$, $EX=\int\limits_0^{\pi}\frac{2}{\pi}\sin\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{d}\alpha=\frac{4}{\pi}$. ◀

Primjer 6.16 *Na kružnici se slučajno bira tačka* T . *Neka je* T' *ortogonalna projekcija tačke* T *na* Ox *osu i neka je slučajna promjenljiva* X *jednaka rastojanju tačke* T' *od koordinatnog početka. Naći gustinu slučajne promjenljive* X *i izračunati* EX.

Primjer 6.17 *U kvadratu dužine stranice* 1 *slučajno se bira tačka* T. *Naći raspodjelu slučajne promjenljive* Z *koja je jednaka rastojanju tačke* T *od najbliže stranice kvadrata. Naći* EZ.

▶ Tjemena kvadrata označimo sa A,B,C,D, a projekciju središta E na stranicu AB sa F. Zbog simetričnosti, ne smanjujući opštost, možemo pretpostaviti da izabrana tačka pripada trouglu AFE. Označimo sa (X,Y) slučajni vektor koji predstavlja koordinate tačke T. Gustina ovog vektora je $\varphi(x,y)=8$, $(x,y)\in\triangle\ AFE$. Očigledno $Z=Y$. Potražimo gustinu komponente Y. Imamo

$$\varphi_Y(y)=8\int\limits_y^{1/2}\mathrm{d}x=4-8y,\ 0<y<\frac{1}{2},\ \text{pa je } EZ=\int\limits_0^{1/2}y(4-8y)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}.$$

Očekivanje smo mogli dobiti i primjenom formule (6.1). Naime,

$$EZ=\iint\limits_{\triangle AFE}8y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^{1/2}\mathrm{d}x\int\limits_0^{x}8y\mathrm{d}y=\frac{1}{6}.\ ◀$$

Primjer 6.18 *Strijelac kružnu metu poluprečnika* 3 *pogađa sa vjerovatnoćom* $0,7$. *Ako promaši metu gubi euro, ako pogodi dobija iznos* $3-d$ *eura, gdje je* d *rastojanje od pogođene tačke do centra mete. Naći* EX *gdje je* X *dobitak u jednom gađanju.*

▶ H_1 meta je pogođena; H_2 meta je promašena.

$F(t)=0,t\leqslant -1$.

$F(t)=P\{X<t\}=P\{X<t|H_1\}P\{H_1\}+P\{X<t|H_2\}P\{H_2\}=0,3,-1<t\leqslant 0$.

$F(t) = 0,7P\{3 - d < t\} + 0,3 = 0,7P\{d > 3 - t\} + 0,3 = 0,7\frac{9-(3-t)^2}{9} + 0,3, 0 < t \leqslant 3.$

$F(t) = 1, t > 3.$

$EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} tdF(t) = -0,3 + 0,7\int\limits_{0}^{3} \frac{2t(3-t)}{9}dt = 0,4.$ ◀

Primjer 6.19 *Osobe A i B su dogovorile susret koji će pratiti sljedeći uslovi. Mjesto susreta je fiksirano, svaka osoba na mjesto susreta dolazi u slučajnom momentu između 12 i 13 sati i drugu osobu čeka najviše 20 minuta. Neka je T vrijeme koje u čekanju provede osoba A. Naći funkciju raspodjele slučajne promjenljive T i ET.*

Neka je X vrijeme koje protekne od 12 sati do momenta dolaska osobe A, a Y vrijeme koje protekne od 12 sati do momenta dolaska osobe B. Jasno, $(X, Y) : \mathcal{U}((0,1) \times (0,1))$, mjerna jedinica je sat.

1^0 $P\{T = 0\} = P\{X - \frac{1}{3} < Y < X\} = \frac{5}{18}.$

2^0 $P\{T < t\} = P\{\{T = 0\} \vee \{X < Y < X + t\} \vee \{Y < X - \frac{1}{3} \wedge X > 1 - t\}\} = \frac{5}{18} + \frac{5}{3}t - t^2, 0 < t \leqslant \frac{1}{3}.$

3^0 $P\{T = \frac{1}{3}\} = P\{\{Y > X + \frac{1}{3}\} \vee \{Y + \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\}\} = \frac{5}{18}$, $P\{T < t\} = 1, t > 1.$

$ET = 0P\{T = 0\} + \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} t(\frac{5}{3} - 2t)dt + \frac{1}{3}P\{T = \frac{1}{3}\} = \frac{13}{81}.$ ◀

Zadržimo se za trenutak na slučajnim prmjenljivim

$$X : \begin{matrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{matrix} -100 & 100 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}.$$

Očigledno, $EX = EY = 0$ iako su X i Y bitno različite slučajne promjenljive (i na ovom primjeru se vidi da je matematičko očekivanje manje informativno od funkcije raspodjele). Značenja slučajne promjenljive X su "bliska" očekivanoj vrijednosti, a značenja slučajne promjenljive Y su "daleko" od očekivane vrijednosti. Veličina koja mjeri stepen koncentracije slučajne promjenljive oko njenog očekivanja naziva se **disperzija**.

Definicija 6.4 *Disperzija DX slučajne promjenljive X se zadaje pomoću jednakosti*

$$DX = E(X - EX)^2.$$

Jednakost iz definicije disperzije potencira da je ova karakteristika mjera odstupanja slučajne promjenljive od njenog očekivanja. Neposredno računanje disperzije je ponekad jednostavnije sprovesti pomoću jedne od dvije jednakosti.

$DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - 2E(XEX) + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2.$

$DX = EX(X-1) + EX - (EX)^2.$

Evidentiraćemo svojstva disperzije.

a) $DX \geqslant 0$, $D(cX) = c^2 DX$, $D(X+c) = DX$, c je konstanta.

b) **Bijenemeova jednakost**: Ako su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promjenljive, tada je $D\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} DX_i$. Zaista, zbog nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} E(X_i - EX_i)^2 + \\ \sum_{i \neq j} E((X_i - EX_i)(X_j - EX_j)) &= \sum_{i=1}^{n} DX_i + \sum_{i \neq j}(EX_i - EX_i)(EX_j - EX_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} DX_i. \end{aligned}$$

Indikator $I_A : \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{matrix}, p = P(A), q = 1-p.$

$EI_A = p$; $DI_A = p - p^2 = pq.$

Binomna raspodjela. $S_n : \mathcal{B}(n,p)$; $P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, ..., n.$

$S_n = I_{A_1} + I_{A_2} + ... + I_{A_n}$, gdje je $A_i, i = 1, 2, ..., n$ događaj da se u i-opitu ostvari uspjeh. Događaji A_i su zbog nezavisnosti opita nezavisni a samim tim su nezavisni i odgovarajući indikatori. I na kraju

$ES_n = EI_{A_1} + EI_{A_2} + ... + EI_{A_n} = np.$

$DS_n = DI_{A_1} + DI_{A_2} + ... + DI_{A_n} = npq.$

U analizi koja slijedi, koristićemo:

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\Big)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2},\ -1 < x < 1.$$

$$b)\ \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \Big(\sum_{k=2}^{\infty} x^k\Big)'' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3},\ -1 < x < 1.$$

Geometrijska raspodjela. $X : \mathcal{G}(p)$; $P\{X = k\} = q^k p, k = 0, 1, 2, ...$

$EX = pq\sum\limits_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{q}{p}.$

$DX = EX(X-1) + EX - (EX)^2 = pq^2\sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$

Negativna binomna raspodjela. $X : \mathcal{B}i(r,p), r \geqslant 2;$

$$P\{X = k\} = \binom{k+r-1}{r-1} q^k p^r, k = 0, 1, 2, ...$$

$X = X_1 + X_2 + ... + X_r$, gdje je $X_i, 1 \leqslant i \leqslant r$, broj neuspjeha od ostvarivanja $i-1$-og uspjeha do ostvarivanja i tog uspjeha. Promjenljive X_i su nezavisne i svaka ima $\mathcal{G}(p)$ raspodjelu pa je $EX = \frac{rq}{p}$, $DX = \frac{rq}{p^2}$.

Hipergeometrijska raspodjela. $X : H(n,m,k)$

$$P\{X = l\} = \frac{\binom{n}{l}\binom{m}{k-l}}{\binom{n+m}{k}}, \max\{0, k-m\} \leqslant l \leqslant \min\{n,k\}.$$

$$X = I_{A_1} + I_{A_2} ... + I_{A_k};\ I_{A_j} : \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{m}{n+m} & \frac{n}{m+n} \end{array};\ I_{A_i}I_{A_j} : \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ .... & \frac{\binom{n}{2}}{\binom{m+n}{2}} \end{array},\ i \neq j,$$

gdje $A_j, 1 \leqslant j \leqslant k$ događaj da se u j-tom izvlačenu izvadi bijela kuglica. Imamo:

$EX = \frac{kn}{m+n}.$

$EX^2 = \frac{kn}{m+n} + (k^2 - k)\frac{\binom{n}{2}}{\binom{m+n}{2}}.$

$DX = \frac{kmn(m+n-k)}{(m+n)^2(m+n-1)}.$

Negativna hipergeometrijska raspodjela $Hi(n,m,r)$. Označimo sa $c_i, i = 1, ..., m$ crne kuglice, a sa $C_i, i = 1, ..., m$ događaj da je kuglica c_i izvađena prije nego što je izvađena r-ta bijela. Primijetimo $X = I_{C_1} + ... + I_{C_m}$. Izračunajmo $P(C_i)$. Iz skupa kog čine sve bijele kuglice i kuglica c_i izaberimo r članova. Događaja C_i se realizuje ako i samo ako se među r izabranih kuglica nalazi kuglica c_i. Dakle, $P(C_i) = \frac{\binom{n}{r-1}\binom{1}{1}}{\binom{n+1}{r}} = \frac{r}{n+1}$ te je $EX = \frac{rm}{n+1}$.

Puasonova raspodjela. $X : \mathcal{P}(\lambda)$; $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, ...$

$EX = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda.$

$DX = EX(X-1) + EX - (EX)^2 = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$

Primjer 6.20 *Neka je T boj bacanja kocke do padanja desete šestice. Naći raspodjelu slučajne promjenljive T kao i ET i DT.*

Primjer 6.21 *Neka je T boj bacanja kocke do padanja svih brojeva. Naći ET i DT.*

Primjer 6.22 *Evidentiramo datume kada slučajno odabrani prolaznici slave rođendan (jednostavnosti radi, datum 29. februar ne računamo). Slučajna promjenljiva X je jednaka broju prolaznika koje smo anketirali da bi dobili sve datume u godini. Naći EX i DX.*

Primjer 6.23 *Deset pisama se nasumce stavlja u deset koverata. Neka jw W broj osoba koje su dobile odgovarajuće pismo. Izračunati EW i DW.*

Primjer 6.24 *Dvadeeset kuglica se stavlja u deset kutija. Neka je W broj slobodnih kutija. Izračunati EW i DW.*

Primjer 6.25 $X : \mathcal{U}(a,b)$, $DX = \int\limits_a^b \frac{x^2}{a+b}\,\mathrm{d}x - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$. ◀

Primjer 6.26 $X : \mathcal{E}(\lambda),\ DX = \int\limits_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}x - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$. ◀

Primjer 6.27 *Neka je $X : \mathcal{N}(m,\sigma^2)$. Imamo*

$$DX = E(X-m)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-m)^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x = \sigma^2. \blacktriangleleft$$

Teorema 6.2 (Čebišovljeva nejednakost.) *Ako slučajna promjenljiva X ima EX^2, tada je za svako $\varepsilon > 0$*

$$P\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{EX^2}{\varepsilon^2}.$$

Dokaz. Definišimo slučajnu promjenljivu

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{ako je } |X| < \varepsilon \\ \varepsilon, & \text{ako je } |X| \geqslant \varepsilon \end{cases}.$$

Očigledno, $Y \leqslant |X| \Longrightarrow Y^2 \leqslant X^2$, pa je

$$EX^2 \geqslant EY^2 = \varepsilon^2 P\{|X| \geqslant \varepsilon\}.\blacklozenge$$

Posljedica 1. $P\{|X - EX| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{DX}{\varepsilon^2}$, za svako $\varepsilon > 0$.

Teorema 6.3 (Bernulijev zakon velikih brojeva.) *Neka je $S_n : \mathcal{B}(n,p)$. Tada*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}=0 \left(\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\leqslant\varepsilon\right\}=1.\right) \tag{6.2}$$

Dokaz. Primjenom Posljedice 1. i korišćenjem činjenica $E\frac{S_n}{n}=\frac{np}{n}=p$, $D\frac{S_n}{n}=\frac{npq}{n^2}=\frac{pq}{n}$, dobijamo

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{D\frac{S_n}{n}}{\varepsilon^2}=\frac{pq}{n\varepsilon^2}\longrightarrow 0,\ n\to\infty.\blacklozenge$$

Stepen zavisnosti između slučajnih promjenljivih se računa pomoću koeficijenta korelacije.

Definicija 6.5 **Kovarijacija** *između slučajnih promjenljivih X i Y je $cov(X,Y)=EXY-EXEY$, a* **koeficijent korelacije** *između slučajnih promjenljivih X i Y je*

$$\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DXDY}}=\frac{EXY-EXEY}{\sqrt{DXDY}}.$$

Pokazuje se da je $|\rho_{X,Y}|\leqslant 1$ i $\rho_{X,Y}=\pm 1$ ako i samo ako je $Y=aX+b$. Takođe, ako su slučajne promjenljive X i Y nezavisne, tada je $EXY=EXEY$, te je $\rho_{X,Y}=0$. Obrnuto, kao što pokazuje sljedeći primjer, ne važi.

Primjer 6.28 *Novčić se baca dva puta. Pojavi pisma pridružujemo 0 poena, a pojavi grba jedan poen. Neka je X suma poena kod bacanja, a Y razlika poena kod drugog i prvog bacanja. Naći $\rho_{X,Y}$.*

►Raspodjela vektora (X,Y) je data tabelom

$Y\diagdown X$	0	1	2
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

$$X:\begin{array}{ccc}0&1&2\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{array},\ Y:\begin{array}{ccc}-1&0&1\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{array},\ XY:\begin{array}{ccc}-1&0&1\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\end{array},$$

$$EX=1,\ EY=0,\ \rho_{X,Y}=0,\ P\{(X,Y)=(0,0)\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}.$$

Dakle, X i Y su zavisne slučajne promjenljive iako je $\rho_{X,Y}=0$. ◄

Primjer 6.29 *Kocka se baca n puta. Neka je X broj palih šestica, a Y broj palih jedinica. Naći $\rho_{X,Y}$.*

▶ $X = \sum\limits_{i=1}^{n} I_{A_i}$, A_i je događaj da u i-tom bacanju padne šestica.

$Y = \sum\limits_{j=1}^{n} I_{B_j}$, B_j je događaj da u j-tom bacanju padne jedinica.

$EX = EY = \frac{1}{6} \cdot n,\ DX = DY = \frac{5}{36} \cdot n,$

$$\begin{aligned} EXY &= E\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} I_{A_i} I_{B_j} = \sum_{i=1}^{n} EI_{A_i} I_{B_i} + \sum\sum_{i \neq j} EI_{A_i} I_{B_j} \\ &= \frac{n^2 - n}{36}, \end{aligned}$$

jer su članovi u prvoj sumi jednaki nuli (ne možemo istovremeno registrovati i 1 i 6), u drugu sumu ulazi $n^2 - n$ članova (odbacujemo one kod kojih je $i = j$), a vjerovatnoća da u i-tom bacanju padne šestica, a u j-tom jedinica je $\frac{1}{36}$. Nakon ove analize ostaje da objedinimo podatke i zaključimo da je $\rho_{X,Y} = -\frac{1}{5}$. ◀