1 Slučajni opit

Eksperiment-opit je moćan metod za spoznaju stvarnosti. Opitom se ispituje odnos između uslova-uzroka i posljedice. Deterministički opit-isti uslovi uvijek dovode do istog rezultata. Kod slučajnog opita ostvarivanje određenih uslova ne dovodi do determinističkog rezultata. Teorija vjerovatnoće izučava matematički model slučajnog opita.

Primjer 1.1 *Novčić se baca jednom.* **Ishodi-elementarni događaji** *koji se mogu desiti u ovom opitu su: palo je pismo P; pao je grb G.* **Prostor ishoda**, *koristi se oznaka Ω je skup skup čiji su elementi ishodi koji se mogu desiti u opitu. U našem slučaju $\Omega = \{P, G\}$.*

Primjer 1.2 *Novčić se baca četiri puta.* $\Omega = \{PPPP, PPPG, ..., GGGG\}$.

Primjer 1.3 *Kocka se baca jednom.* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Primjer 1.4 *Kocka se baca dva puta.* $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\}$.

Primjer 1.5 *Novčić se baca do prvog padanja pisma.* $\Omega = \{P, GP, GGP, ...\}$.

Primjer 1.6 *Strijelac gađa u kružnu metu.*

Primjer 1.7 *Braunovo kretanje.*

Rezultati slučajnih opita se nazivaju **slučajnim događajima**, ubuduće ćemo govoriti o događajima. Realizacija događaja, što je prirodno, je ekvivalentna sa realizacijom nekog ishoda koji događaju odgovara te se događaj identifikuje sa skupom ishoda koji tom događaju odgovaraju. Po završenom opitu, ako se ostvari ishod koji odgovara događju, konstatujemo da se događaj realizovao, a u suprotnom da se nije realizovao. U opitu u kome dva puta bacamo kocku možemo govoriti o događaju A da je zbir palih brojeva 5. Skup ishoda koji odgovaraju događaju A ćemo takođe označiti sa A i $A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$.

Neka su A i B skupovi-događaji iz Ω.

$A \bigcup B = \{\omega : \omega \in A \text{ ili } \omega \in B\}$. Iz ovog zapisa zaključujemo: $A \bigcup B$ je događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje ili događaj A ili događaj B (ili ekvivalentno rečenom, $A \bigcup B$ je događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja A ili B). Dakle, $A \bigcup B$ je događaj da se realizuje ili događaj A ili događaj B ($A \bigcup B$ je događaj da se realizuje bar jedan od događaja A ili B).

$A\bigcap B=\{\omega:\ \omega\in A \text{ i } \omega\in B\}$. Iz ovog zapisa zaključujemo: $A\bigcap B$ je događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje i događaj A i događaj B (ili ekvivalentno rečenom, $A\bigcap B$ je događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuju oba događaja A i B). Dakle, $A\bigcap B$ je događaj da se realizuje i događaj A i događaj B ($A\bigcap B$ je događaj da se realizuju oba događaja A i B). Ako je $AB=\emptyset$, tada kažemo da se događaji A i B uzajamno isključuju.

$A\backslash B=\{\omega:\ \omega\in A,\ \omega\notin B\}$ je događaj da se realizuje događaj A i ne realizuje događaj B.

$A^c=\{\omega:\ \omega\notin A\}$ je događaj (događaj suprotan događaju A) da se u opitu ne realizuje događaj A.

Ako je $A\subset B$ tada kažemo da događaj A implicira (povlači) događaj B. Naime, iz realizacije događaja A slijedi da je realizovan neki ishod iz A, a zbog $A\subset B$, taj ishod je iz B. Zaključujemo, realizovan je događaj B. Relacija $A\subset B$ se može interpretirati i na sljedeći način: događaj A se ne može ostvariti ako se ne ostvari događaj B. Osoba ne može biti majka ako nije žena.

Ω je izvjestan događaj. $\emptyset$ je nemoguć događaj.

Primjer 1.8 *U opitu u kome se kocka baca dva puta A je događaj da je zbir palih brojeva $\leqslant 3$, B je događaj da u drugom bacanju padne paran broj, C je događaj da u drugom bacanju padne šestica. Naći $A\bigcup B, A\bigcap B, A^c, B\backslash A$ i dokazati da je $C\subseteq B$.*

U tekstu je bm skraćenica za beskonačno mnogo, a ss za skoro svi.

$$A^*=\limsup_{n\to\infty}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{\omega \text{ se nalazi u bm članova niza} A_n, n=1,2,...\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k.$$

Na jeziku Teorije vjerovatnoće A^* je događaj da se realizuje bm događaja iz niza događaja $A_n, n=1,2,....$ Dokažimo da je zapis $A^*=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ korektan.

Pretpostavimo da je $\omega\in A^*$ tj. ω se nalazi u bm članova niza $A_n, n=1,2,...\Rightarrow\omega\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$ (u suprotnom se ne bi nalazilo u $A_1,A_2,A_3...$ a samim tim ni u bm članova niza $A_n, n=1,2,....$), $\omega\in\bigcup_{k=2}^{\infty}A_k$ (u suprotnom se ne bi nalazilo u $A_2,A_3...$ a samim tim ni u bm članova niza $A_n, n=1,2,....$), ...$\Rightarrow\omega\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$.

$\omega\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\Rightarrow\omega\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\ \omega\in\bigcup_{k=2}^{\infty}A_k,\ ....\ \Rightarrow$ iz $\omega\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$, zaključujemo da se ω nalazi u bar jednom od skupova iz niza $A_1,A_2,...$, neka je $k_1\in\mathrm{N}$ indeks prvog skupa iz niza u kome se nalazi ω; iz $\omega \in \bigcup_{k=k_1+1}^{\infty} A_k$, slijedi da se ω nalazi u bar jednom od skupova iz niza $A_{k_1+1}, A_{k_1+2}, ...$, neka je $k_2 \in \mathrm{N}$ (jasno $k_1 < k_2$) indeks prvog skupa iz niza u kome se nalazi $\omega \Rightarrow$

$$\omega \in A_{k_1}, \omega \in A_{k_2}, \omega \in A_{k_3}, ..., k_1 < k_2 < k_3, ... \Rightarrow$$

ω se nalazi u bm članova niza $A_n, n = 1, 2, ...$

$$A_* = \liminf_{n\to\infty} A_n = \varliminf_{n\to\infty} A_n =$$

$= \{\omega$ se nalazi u ss članovima niza$A_n, n = 1, 2, ...$ (u svim osim u eventualno njih konačno mnogo)$\}$
$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

Na jeziku Teorije vjerovatnoće A_* je događaj da se realizuju ss članovi niza $A_n, n = 1, 2, ...$ (svi osim eventualno njih konačno mnogo).

Ako je $A_* = A^* = A$ tada se A naziva graničnim skupom niza $A_n, n = 1, 2, ...$ i koristi se zapis $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Ako je niz A_n monotono opadajući tada je $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Ako je niz A_n monotono rastući tada je $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Primjer 1.9 *Naći* $\lim_{n\to\infty} A_n$. *a)* $A_n = [0, \frac{n}{n+1}), n = 1, 2, ...$ *b)* $A_n = (0, \frac{1}{n}), n = 1, 2, ...$

Primjer 1.10 *Ako je* $A_{2j} = B; A_{2j-1} = C, j = 1, 2, 3, ...$ *naći* A_* *i* A^*.

Primjer 1.11 *Ako je* $A_n = K((\frac{(-1)^n}{n}, 0), 1), n = 1, 2, 3, ...$ *naći* A_* *i* A^*.

Pokažimo da je $K((0,0),1) \subseteq A_*$. Neka je $T(x,y), x^2+y^2 < 1, x > 0$. Biramo n tako da je $\frac{1}{2n} < x$ i dobijamo da je $\mid C_{2n}T \mid<\mid OT \mid< 1$ gdje je $C_{2n} = (\frac{1}{2n}, 0)$.

Biramo n tako da je $\frac{1}{2n+1} < 1 - |OT|$. Koristimo oznaku $C_{2n+1} = (-\frac{1}{2n+1}, 0)$. Na osnovu relacije trougla imamo $|C_{2n+1}T| < |C_{2n+1}O| + |OT| < 1$. U slučaju $T(x,y), x^2 + y^2 < 1, x = 0$. lako se dokazuje da se izborom dovoljno velikog n dobija da je $|C_{2n+1}T| < 1$ i $|C_{2n}T| < 1$. Uraditi!

Neka je $T(x,y), x^2 + y^2 = 1, x > 0$. Biramo n tako da je $\frac{1}{2n} < x \Rightarrow |C_{2n}T| < |OT| = 1$ i ovo važi za sve centre sa parnim indeksima većim od $2n$. Međutim, za svako n važi $|C_{2n+1}T| > 1$. Tačke sa koordinatama $(0,1)$ i $(0,-1)$ su van domašaja naših skupova.

Neka je $T(x,y), x^2+y^2>1, x>0$. Biramo n tako da je $\frac{1}{2n}<|OT|-1$. Na osnovu relacije trougla imamo $|OT|<|OC_{2n+1}|+|C_{2n+1}T|$ te zaključujemo da je $|C_{2n+1}T|>1$. Slučaj $T(x,y), x^2+y^2=1, x=0$. se lako analizira. Dakle, $A_*=K((0,0),1)$, dok je A^* zatvoreni centralni jedinični krug bez tačaka $(0,1)$ i $(0,-1)$.

Primjer 1.12 *Neka je $q_n, n=1,2...$ jedno nizanje racionalnih brojeva sa segmenta $[0,1]$ i neka je zadat niz skupova $A_n=[0,q_n], n=1,2,...$. Naći A_* i A^*. ($A_*=\{0\}; A^*=[0.1)$.)*

Neke od podskupova prostora ishoda Ω ćemo nazivati događajima. Prirodno je zahtijevati da kolekciji događaja pripada izvjestan događaj Ω, nemoguć događaj $\emptyset$ i da je ta kolekcija zatvorena u odnosu na skupovne operacije. Kolekciju događaja ćemo označavati sa $\mathfrak{F}$.

Definicija 1.1 *Kolekcija događaja $\mathfrak{F}$ je polje ako važi:*

(A1) $\Omega \in \mathfrak{F}$.

(A2) Ako $A \in \mathfrak{F}$ tada $A^c \in \mathfrak{F}$.

(A3) Ako $A \in \mathfrak{F}$ i $B \in \mathfrak{F}$ tada $A \bigcup B \in \mathfrak{F}$.

Definicija 1.2 *Kolekcija događaja $\mathfrak{F}$ je σ polje ako važe (A1), (A2), (A3) i*

(A4) Ako $A_1 \in \mathfrak{F}$, $A_2 \in \mathfrak{F}$,... tada $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$.

σ polje je zatvoreno u odnosu na prebrojivo presjecanje. Zaista, ako $A_1 \in \mathfrak{F}$, $A_2 \in \mathfrak{F}$,... tada je $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c\big)^c \in \mathfrak{F}$. Lako se dokazuje da je σ polje zatvoreno u odnosu na operaciju razlike skupova. Dokazuje se da je presjek σ polja takođe σ polje.

Primjeri

1.) $\Omega=\{1,2,3,...\}$ i kolekciju $\mathfrak{F}$ čine skupovi iz Ω koji su konačni ili su njihovi komplementi konačni. Kolekcija $\mathfrak{F}$ je polje koje nije σ polje. Ako kolekciju $\mathfrak{W}$ čine skupovi koji su prebrojivi ili su njihovi komplementi prebrojivi, tada je kolekcija $\mathfrak{F}$ σ polje.

2.) Neka je

$$[a,b)=\{x \in \mathbf{R}:\ a \leqslant x < b\},\ -\infty < a < b \leqslant \infty$$

i za potrebe primjera smatraćemo da je $[-\infty,b)=(-\infty,b)$ (ovo radimo da bi komplement skupa $[a,\infty)$ bio skup istog tipa). Kolekcija $\mathcal{C}$ koju čine konačne unije disjunktnih upravo formiranih skupova tipa $[a,b)$ je polje.

Neka je $\mathcal{C}$ kolekcija događaja koja nije σ polje. Označimo sa $\mathcal{A}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ familiju sigma polja koja sadrže $\mathcal{C}$. Pomenuta familija nije prazna, u njoj se nalazi $\mathbb{P}(\Omega)$. Koristeći tvrđenje da je presjek σ polja takođe σ polje, zaključujemo da je

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$$

minimalno σ polje koje sadrži $\mathcal{C}$. Naime, σ polje $\sigma(\mathcal{C})$ je kao presjek sadržano u svim σ poljima koja sadrže $\mathcal{C}$ te je minimalno. Minimalno σ polje koje sadrži $\mathcal{C}$ se takođe naziva minimalnim σ poljem generisanim kolekcijom $\mathcal{C}$

Borelovo σ polje na $\mathbf{R}$. Neka je $\Omega = \mathbf{R}$, neka je $\mathcal{C}_1$ kolekcija intervala (a, b), neka je $\mathcal{C}_2$ kolekcija polusegmenata $[a, b)$, neka je $\mathcal{C}_3$ kolekcija polusegmenata $(a, b]$, neka je $\mathcal{C}_4$ kolekcija segmenata $[a, b]$, neka je $\mathcal{C}_5$ kolekcija intervala $(-\infty, a)$, neka je $\mathcal{C}_6$ kolekcija intervala (a, ∞), neka je $\mathcal{C}_7$ kolekcija otvorenih skupova i neka je $\mathcal{C}_8$ kolekcija zatvorenih skupova. Tada je

$$\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2) = ... = \sigma(\mathcal{C}_8),$$

a ovo sigma polje se naziva Borelovo σ polje na $\mathbf{R}$ i označava se sa $\mathcal{B}^1$.

Dokažimo da je $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_3)$.

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(\mathcal{C}_3) \Rightarrow \mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_3) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_3).$$

$$(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right) \in \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow \mathcal{C}_3 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_3) \subset \sigma(\mathcal{C}_1).$$

2 Vjerovatnosni prostor

U slučaju opita u kom je skup Ω konačan ili prebrojiv, uobičajeno, σ polje događaja $\mathfrak{F}$ je $\mathbb{P}(\Omega)$. Svakom ishodu ω_i, $i \in I$, pridružujemo masu $p(\omega_i), i \in I$, koju nazivamo vjerovatnoća ishoda ω_i i od vjerovatnoća zahtijevamo da važi:

a) $0 \leqslant p(\omega_i) \leqslant 1, i \in I$,

b) $\sum_{i \in I} p(\omega_i) = 1$.

Vjerovatnoća svakog događaja $A \in \mathfrak{F}$ se računa po formuli

$$P(A) = \sum_{i : \omega_i \in A} p(\omega_i).$$

Lako se dokazuje da važi:

1) $P(\emptyset)=0$; 2) $P(\Omega)=1$; 3) $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$; 4) $P(A^c)=1-P(A)$.

Trojka $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ predstavlja matematički model opita i naziva se vjerovatnosni prostor opita. U našem slučaju, riječ je o **diskretnom vjerovatnosnom prostoru**.

U praksi se često susreću opiti sa konačno mnogo ravnopravnih-simetričnih ishoda. Zbog ravnopravnosti ishoda u slučaju kada je $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_N\}$ razumno je svakom ishodu pridružiti vjerovatnoću $\frac{1}{N}$ tj. $p(\omega_1)=...=p(\omega_1)=\frac{1}{N}$ odakle zaključujemo da je za svako $A\in\mathfrak{F}$

$$P(A)=\frac{\mid A\mid}{\mid N\mid} \tag{2.1}$$

Dakle vjerovatnoća događaja A je količnik broja ishoda koji odgovaraju događaju A i broja svih mogućih ishoda. Formulom (**??**) je data tzv. klasična definicija vjerovatnoće.

U sljedeća dva primjera ishodi nisu ravnopravni.

Primjer 2.1 *Novčić se baca do prvog padanja grba ali najviše dva puta.*

$\Omega=\{P,GP,GG\};P(P)=0,5;P(GP)=P(GG)=0,25.$

Primjer 2.2 *Novčić se baca do prvog padanja pisma.* $\Omega=\{P,GP,GGP,...\},P(P)=0,5;P(GP)=0,25;P(GGP)=0,125,....$

Zapaža se da se u dugim serijama opita relativna učestalost događaja ponaša stabilno. Ta stabilnost učestalosti ukazuje na to da se objektivno prisutna slučajnost realizacije događaja može kvantitativno mjeriti. Matematička formalizacija gore pomenutog zapažanja se ostvaruje kroz zakon velikih brojeva. Teorija vjerovatnoće se ne bavi zadatkom pravilnog zadavanja vjerovatnoća $p_i, i=1,2,...,N$. Pri zadavanju ovih vjerovatnoća vodi se računa o intuitivnoj predstavi broja p_i kao relativnoj učestalosti ishoda ω_i u dugoj seriji opita. Jedan od glavnih vjerovatnosnih zadataka je da na osnovu vjerovatnoća ishoda tražimo vjerovatnoće složenih događaja.

Primjer 2.3 *Komplet u kome je* 36 *karata se na slučajan način dijeli na dva jednakobrojna dijela. Kolika je vjerovatnoća da se u oba dijela nalazi po* 9 *crnih i crvenih karata?*

►Broj podjela je određen izborom 18 karata iz kompleta od 36 karata, a tih izbora ima $\binom{36}{18}$. Iz skupa od 18 crnih karata, 9 karata možemo izabrati na $\binom{18}{9}$ načina. Isti rezon primjenjujemo i za crvene karte. Koristeći princip proizvoda, dobijamo

$$p=\frac{\binom{18}{9}\binom{18}{9}}{\binom{36}{18}}\approx 0,26.$$

Prilikom računanja je korišćena Stirlingova formula

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}.$$

Navešćemo neke relativne frekvencije događaja čiju smo vjerovatnoću izračunali. Podaci potiču iz jedne serije od 100 ponavljanja opita – podjela karata. Nakon 5 podjela relativna frekvencija je bila $0,4$, nakon 10 podjela je bila $0,3$, nakon 26 podjela je bila $0,23$, nakon 50 podjela je bila $0,24$, a nakon svih 100 podjela relativna frekvencija je $0,24$. Znači, na početku serije relativna frekvencija ima veliku fluktuaciju, a zatim se sa rastom serije relativna frekvencija stabilizuje.◀

Primjer 2.4 *U kutiji se nalaze cedulje na kojima su brojevi od* 1 *do* 10. *Iz kutije se po modelu bez vraćanja vadi* 5 *cedulja. Kolika je vjerovatnoća da brojevi na izvađenim ceduljama obrazuju rastući niz? R:*$\frac{1}{5!}$.

Primjer 2.5 *U kutiji se nalazi b bijelih i c crnih kuglica. Dva igrača jedan za drugim vade kuglicu i pobjeđuje onaj koji prvi izvuče bijelu kuglicu. Kolika je vjerovatnoća pobjede igrača koi započinje igru? Uraditi oba modela.*

a) Model sa vraćanjem. $\frac{b+c}{b+2c}$. b) Model bez vraćanja.

$$\begin{aligned} c \text{ parno}, \quad & p = b\sum_{l=0}^{c} \frac{c^{[l]}}{(b+c)^{[l+1]}}, n^{[k]} = n(n-1)...(n-k+1), \text{sumira se po parnim indeksima},\\ c \text{ neparno}, \quad & p = b\sum_{l=0}^{c-1} \frac{c^{[l]}}{(b+c)^{[l+1]}}, \text{sumira se po parnim indeksima.} \end{aligned}$$

Primjer 2.6 *Izračunati vjerovatnoću da za* 30 *osoba između* 12 *mjeseci u godini ,* 6 *mjeseci sadrži po* 2, *a ostalih* 6 *mjeseci po* 3 *njihova rođendana. R:* $p = \binom{12}{6}\frac{30!}{2^6 6^6 12^{30}} \approx 0,00035$.

Primjer 2.7 *r kuglica se razmješta u n kutija. Izračunati vjerovatnoću da*

a) u svakoj od prvih r kutija bude tačno jedna kuglica ($n \geqslant r$), R: $p = \frac{r!}{n^r}$.

b) u prvoj kutiji bude tačno r_1 kuglica, u drugoj kutiji bude tačno r_2 kuglica,..., u n-toj kutiji bude tačno r_n kuglica, $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = r$, R: $p = \frac{r!}{n^r \prod\limits_{i=1}^{n} r_i!}$.

c) u jednoj od kutija bude r_1, u nekoj drugoj r_2 itd pri čemu su brojevi $r_1, r_2, ..., r_n$ među sobom različiti, $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i = r$. R: $p = \frac{r!n!}{n^r \prod\limits_{i=1}^{n} r_i!}$.

Primjer 2.8 *U kutiji se nalazi $n-1$-na bijela i jedna crvena kuglica. Iz kutije se po modelu bez vraćanja vadi $k, 1 \leqslant k \leqslant n$ kuglica. Kolika je vjerovatnoća da među njima bude crvena?*

$p = \frac{\binom{1}{1}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}.$

Primjer 2.9 *m muškaraca i n žena sjedaju u red. Kolika je vjerovatnoća da sve žene sjede jedna pored druge?*

$p = \frac{m+1}{\binom{m+n}{n}}.$

Primjer 2.10 *Na četiri strane kocke A utisnute su po 2 tačke, a na dvije strane utisnuto je po 5 tačaka. Na svim stranama kocke B utisnute su po 3 tačke. Na četiri strane kocke C utisnute su po 4 tačke, a na dvije po jedna tačka. Biraju se dvije kocke, istovremeno se bacaju i "pobjeđuje" ona kocka na kojoj padne više tačaka (padne veći broj).*

Analizirajmo varijante. Ako igraju kocke A i B, B pobjeđuje ako na A padne 2. Dakle, pobjedu kocke B povlače parovi 2 na A i 6 na B, a tih parova ima $4 \cdot 6 = 24$. Kako mogućih ishoda ima $6 \cdot 6 = 36$ (6 je broj strana i na A i na B), to je vjerovatnoća pobjede kocke B, $p_B = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$, a vjerovatnoća pobjede kocke A, $p_A = \frac{1}{3}$. Ako igraju kocke B i C, vjerovatnoća pobjede kocke C je $p_C = \frac{2}{3}$ (kocka C pobjeđuje ako na njoj padne 4), dok je $p_B = \frac{1}{3}$. Ako igraju A i C, imamo $p_A = \frac{4 \cdot 2 + 2 \cdot 6}{36} = \frac{5}{9}$ (A pobjeđuje u varijantama 1^0 : 2 na A, 1 na C, 2^0 : 5 na A) i $p_C = \frac{4}{9}$.

Primijetimo, u igri kocaka A i B, bolja je kocka B – ima veću šansu (vjerovatnoću) na pobjedu; u igri B i C, bolja je kocka C; u igri A i C, bolja je kocka A. Dakle, relacija "biti bolji (bolja)" u našem slučaju nije tranzitivna.

Ako svaka od dvije osobe odabere po jednu kocku sa namjerom da otpočnu opisanu igru, u boljoj je poziciji osoba koja kocku bira nakon što je svoju kocku već odabrala prva osoba. Naime, ako je prva osoba odabrala A, druga će odabrati B; ako je prva odabrala B, druga će odabrati C; ako je prva odabrala C, druga će odabrati A. Prirodno, druga osoba uvijek bira kocku za koju je vjerovatnoća pobjede veća.◄

Primjer 2.11 *Iz skupa od n osoba koje sjede za okruglim stolom, na slučajan način bira se k osoba, $k \leqslant \frac{n}{2}$. Kolika je vjerovatnoća da nikoje dvije izabrane osobe ne sjede jedna do druge?*

Numerišimo stolice sa $1, 2, ..., n$, koristimo numeraciju koja prati kretanje kazaljke na satu, a zatim sto "presjecanjem" između stolica n i 1 pretvorimo u pravougaoni (stolice $1, 2, .., n$ se nalaze na jednoj strani pravougaonog stola). Tokom analize, stolice na kojima sjede odabrane osobe ćemo obilježiti sa a, a neodabrane sa b. U procesu računanja broja povoljnih ishoda razmotrimo dvije varijante.

Prva. Na stolici sa rednim brojem 1 sjedi neka od k odabranih osoba. Na stolicama 2 i n moraju sjedjeti neodabrane osobe. Isključimo stolicu n i stolice na kojima sjede odabrane osobe. Ostala je $n-k-1$ stolica na kojima sjede neodabrane osobe. Da bi rekonstruisali raspored koji nam je generisao stolice koje su ostale, treba odabrati $k-1$ od preostalih stolica i na prvoj desnoj poziciji smjestiti odabranu. Recimo, $n=8, k=3$. Ostale su 4 stolice, dakle rekonstrukcija kreće od *bbbb*. Imajući u vidu da je u ovoj varijanti poznato da je stolica 1 obilježena sa a, a stolice 2 i 8 sa b, jedan od rekonstrukcija je recimo *abbabbab*. Mi smo iz četvorke *bbbb* odabrali prvi i četvrti član.

Druga. Razmatra se slučaj kada na stolici 1 sjedi neodabrana osoba.

$$p = \frac{\binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k}}{\binom{n}{k}}$$

Primjer 2.12 *Za okrugli sto sijedaju osobe iz grupe od n bračnih parova. Kolika je vjerovatnoća da svaka od $k, 1 \leqslant k \leqslant n$ fiksiranih žena sjedi pored svog supruga?*

Izdvojićemo jednu od k fiksiranih žena i od nje počinje permutacija. Suprug moze zauzeti jednu od dvije susjedne pozicije. Stolice na kojima sjede supružnici iz preostalih $k-1$ parova (parova koje formiraju preostalih $k-1$ fiksiranih žena) tretiraćemo jedan element tj. blok. $k-1$ blok i $2n-2k$ osoba koje nisu članovi k izdvojenih parova se mogu poređati na $(2n-k-1)!$ načina. U svakom bloku svoje stolice supružnici mogu odabrati na 2 načina. Dakle,

$$p_k = \frac{2^k(2n-k-1)!}{(2n-1)!}.$$

Primjer 2.13 *n nula i n jedinica formira slučajan niz. Kolika je vjerovatnoća da su parovi u nizu napravljeni od 0 i 1?*

Primjeri nizova: U nizu 00101101 parovi su $00; 10; 11; 01$. U nizu 01101010 parovi su $01; 10; 10; 10$ te niz odgovara uslovu.

Niz od n nula i n jedinica je određen pozicijama koje su zauzele recimo nule (ostale pozicije zauzimaju jedinice). Broj načina da se od $2n$ pozicija odabere n za nule je $\binom{2n}{n}$. Niz koji nama odgovara je onaj kod koga u svakom paru imamo nulu. Nula se u svakom paru može naći na jednoj od dvije pozicije u paru. Dakle $p = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}}$.

Ekvivalentan je sljedeći zadatak.

n osoba je izulo svoje cipele, a zatim je sa police na kojima su cipele bile ostavljene, svaka osoba nasumce uzela po dvije cipele. Kolika je vjerovatnoća da je svaka osoba uzela po jednu lijevu i jednu desnu cipelu?

Primjer 2.14 *Na dva polja šahovske table su postavljene dame. Kolika je vjerovatnoća da se dame napadaju?*

Dame će se napadati ako su na istoj horizontali ili istoj vertikali ili istoj dijagonali. Ima po 8 horizontala i vertikala, po 4 dijagonale dužine $2, 3, 4, 5, 6, 7$ i dvije dijagonale dužine 8. Dakle

$$p = \frac{8\binom{8}{2} + 8\binom{8}{2} + 2\binom{8}{2} + 4\binom{2}{2} + 4\binom{3}{2} + 4\binom{4}{2} + 4\binom{5}{2} + 4\binom{6}{2} + 4\binom{7}{2}}{\binom{64}{2}} = \frac{81}{224}.$$

Definicija 2.1 *Neka je $\mathfrak{F}$ σ-polje na prostoru ishoda Ω. Uređeni par $(\Omega, \mathfrak{F})$ se naziva* **mjerljivi prostor**.

Definicija 2.2 *Neka je $(\Omega, \mathfrak{F})$ mjerljivi prostor. Funkcija $P : \mathfrak{F} \longrightarrow R$ je* **vjerovatnoća** na $\mathfrak{F}$ *ako važi:*

P1. $P(A) \geqslant 0$ *za svaki* $A \in \mathfrak{F}$; $P(\Omega) = 1$.

P2. Ako su $A_i \in \mathfrak{F}, i \in N$ *i* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ *tada je* $P\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Definicija 2.3 *Uređena trojka $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, gdje je $\mathfrak{F}$ σ-polje na Ω i P vjerovatnoća na $\mathfrak{F}$, naziva se* **vjerovatnosni prostor**.

Vjerovatnosni prostor je osnovni objekat u Teoriji vjerovatnoća. Svojstvo $P(A) \geqslant 0, A \in \mathfrak{F}$, je svojstvo nenegativnosti vjerovatnoće, a svojstvo $P(\Omega) = 1$ je svojstvo normiranosti vjerovatnoće. Svojstvo iz aksiome P2 je svojstvo σ–aditivnosti vjerovatnoće.

Neka je $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vjerovatnosni prostor. Elementi σ–polja $\mathfrak{F}$ su **događaji**, a broj $P(A)$, $A \in \mathfrak{F}$, se naziva **vjerovatnoća događaja** A.

Dokazaćemo dvije teoreme koje slijede iz definicije vjerovatnoće. U tim teoremama će biti evidentirana neka značajna svojstva vjerovatnoće.

Teorema 2.1 *Neka je $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vjerovatnosni prostor. Tada vrijedi:*
(a) $P(\emptyset) = 0$.
(b) Ako su $A_1, \ldots, A_n$ događaji tada je
$P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$
(svojstvo **konačne aditivnosti vjerovatnoće**).
(c) Ako su A i B događaji, $A \subseteq B$ tada je $P(A) \leqslant P(B)$
(svojstvo **monotonosti vjerovatnoće**).

(d) Ako je A događaj tada je $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(e) Ako je A događaj tada je $P(A^c) = 1 - P(A)$

(**vjerovatnoća suprotnog događaja** A^c).

(f) Ako su A i B događaji tada je $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

(g) Ako su A_n, $n \in N$, događaji, tada je $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

($\sigma-$ **poluaditivnost vjerovatnoće**).

(h) Ako su A_n, $n \in N$, događaji, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ i

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *tada je* $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

(**neprekidnost vjerovatnoće u odnosu na rastući niz događaja**).

(i) Ako us $A_n, n \in N$, događaji, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ i

$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *tada je* $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

(**neprekidnost vjerovatnoće u odnosu na opadajući niz događaja**).

(j) Ako us $A_n, n \in N$, događaji, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ i

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ *tada je* $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$

(**neprekidnost vjerovatnoće u nuli**).

Dokaz.

(a) U aksiomi P2 stavimo $A_1 = \Omega$ i $A_i = \emptyset$, $i \geqslant 2$. Dobijamo

$$1 = 1 + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \ldots \Longrightarrow P(\emptyset) = 0$$

(b) U P2 stavimo $A_i = \emptyset$, $i > n$ i iskoristimo (a).

(c) $A \subseteq B \Longrightarrow B = A \cup (B \setminus A)$. Zbog (b) je

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geqslant P(A).$$

(d) Za svaki događaj A važi: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ odakle iz monotonosti vjerovatnoće slijedi tvrđenje.

(e) $A + A^c = \Omega \Longrightarrow P(A) + P(A^c) = 1$.

(f) Imamo $A \cup B = A + (B \setminus A)$, $(A \cap B) + (B \setminus A) = B$. Odavde, zbog (b), dobijamo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A),\ P(A \cap B) + P(B \setminus A) = P(B).$$

Nakon sabiranja jednakosti i sređivanja dobijamo tvrđenje.

(g) Neka je $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $n \geqslant 2$. Tada je B_n, $n \in N$, niz disjunktnih događaja,

$B_n \subseteq A_n$, $n \in N$ i $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Zato imamo

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

(h) Stavimo $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Tada je $B_n \in \mathfrak{F}$, $n \in N$ i $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Osim toga vrijedi $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i$, $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, pa imamo

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(i) Stavimo $C_n = A_1 \setminus A_n$, $n \in N$. Tada je $C_n \in \mathfrak{F}$, $C_n \subseteq C_{n+1}$, $n \in N$ i $A_1 \setminus A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Sada imamo $P(C_n) = P(A_1) - P(A_n)$, pa iz (h) slijedi

$$P(A_1) - P(A) = P(A_1 \setminus A) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) = P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

odakle dobijamo $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.
(j) Ovo tvrđenje je specijalni slučaj tvrđenja (i).$\lhd$

Teorema 2.2 *Neka je $(\Omega, \mathfrak{F})$ mjerljivi prostor i $P : \mathfrak{F} \longrightarrow R$ funkcija koja je konačno aditivna, neprekidna u nuli i ima svojstvo $(P1)$. Tada funkcija P ima i svojstvo σ aditivnosti.*

Dokaz. Neka su A_n, $n \in N$, disjunktni događaji i $A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Na osnovu konačne aditivnosti važi

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty} A_i\Big). \tag{2.2}$$

Neka je $B_n = \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i$. Primijetimo, $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots$ i $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Na osnovu neprekidnosti u nuli funkcije P slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = 0$. Puštajući $n \to \infty$ u (**??**) dobijamo $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. $\lhd$

Borel Kantelijeva lema I Neka je $A_n, n \in \mathbb{N}$, niz događaja. Ako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ konvergira tada je $P(A^*) = 0$.

Dokaz. Prisjetimo se, $A^* = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Neka je $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Primijetimo, $B_n \downarrow$. Iz svojstava (g) i (i) i pretpostavljene konvergencije reda dobijamo

$$P(A^*) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0. \lhd$$

Silvesterova formula. Neka je $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ vjerovatnosni prostor i $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tada važi

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po n. Za $n = 1$ tvrđenje je očigledno, a za $n = 2$ to je tvrđenje (f) iz Teoreme 1. Pretpostavimo da tvrđenje vrijedi za sve familije od najviše $n - 1$ događaja. Stavimo

$$B = \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i,\ C_i = A_i A_n,\ i < n.$$

Tada vrijedi

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(B \cup A_n) = P(B) + P(A_n) - P(BA_n). \tag{2.4}$$

Osim toga je $BA_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} C_i$ pa zbog induktivne pretpostavke imamo

$$P(B) = \sum_{1 \leqslant i < n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j < n} P(A_i A_j) + ... + (-1)^n P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \tag{2.5}$$

i

$$\begin{aligned} P(BA_n) &= \sum_{1 \leqslant i < n} P(C_i) - \sum_{1 \leqslant i < j < n} P(C_i C_j) + ... + (-1)^n P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} C_i\right) \\ &= \sum_{1 \leqslant i < n} P(A_i A_n) - \sum_{1 \leqslant i < j < n} P(A_i A_j A_n) + ... + (-1)^n P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Iz (**??**),(**??**),(**??**) slijedi (**??**).$\triangleleft$

Primijetimo da u desnoj strani jednakosti (**??**) prva suma ima $\binom{n}{1}$ članova, druga $\binom{n}{2}$ članova,..., a n–ta $\binom{n}{n}$ član.

Primjer 2.15 (Zadatak o rasijanom dekanu.) *Na svečanoj dodjeli diploma bilo je n studenata i dekan im je nasumce podijelio diplome. Kolika je vjerovatnoća da je bar jedan student dobio svoju diplomu?*

Numerišimo studente brojevima od 1 do n. Označimo sa A_1 događaj da prvi student dobije svoju diplomu, sa A_2 događaj da drugi student dobije svoju diplomu,..., sa A_n događaj da n–ti student dobije svoju diplomu. Ako sa W označimo događaj čiju vjerovatnoću tražimo, tada je

$W = A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n$. Da bismo našli $P(W)$ primijenićemo Silvesterovu formulu. Nakon primjene ove formule, treba izračunati vjerovatnoće presjeka raznih događaja iz kolekcije $A_1, \dots, A_n$. Kako je ideologija u računanju ovih vjerovatnoća ista, demonstriraćemo račun, recimo na primjeru $P(A_1 A_2)$. n diploma se n–torici studenata može podijeliti na $n!$ načina. Kada prvi i drugi student dobiju svoje diplome, preostalih $n-2$ diplome preostalim studentima (ima ih $n-2$) može biti podijeljeno na $(n-2)!$ načina. Dakle, $P(A_1, A_2) = \frac{(n-2)!}{n!}$. Imamo

$$P(W) \;=\; 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Ako $n \to \infty$, dobijeni zbir teži ka $1 - e^{-1} \approx 0,6322$. Zbog brze konvergencije niza – zbira, u slučaju kada je $n \geqslant 20$, dobijena vjerovatnoća se odlično aproksimira sa $0,6322$. Iz istog razloga, rezultati se zanemarljivo razlikuju ako je, recimo, $n = 100$ ili $n = 200$.

Ovaj zadatak se može formulisati u mnogo varijanti. Navedimo jednu. Složili smo 100 listova, zaduvao je vjetar i razbacao listove. Zatim smo listove nasumce ponovo složili. Kolika je vjerovatnoća da će se bar jedan list naći na rednom mjestu na kojem je bio i ranije?◀

Primjer 2.16 *Kolika je vjerovatnoća da u seriji od 20 bacanja kocke ne budu zabilježeni svi brojevi?*

A_1 u seriji nije zabilježena jedinica,..., A_6 u seriji nije zabilježena šestica.

$$P(\bigcup_{i=1}^{6} A_i) = 6\frac{5^{20}}{6^{20}} - \binom{6}{2}\frac{4^{20}}{6^{20}} + \dots + \binom{6}{5}\frac{1}{6^{20}}. \blacktriangleleft$$

Primjer 2.17 *Iz grupe od* 8 *bračnih parova bira se* 6 *osoba. Kolika je vjerovatnoća da među izabranima ne postoji bračni par?*

Numerišimo bračne parove sa $1, 2, ..., 8$. Neka je A_1 događaj da je među izabranim osobama bračni par 1 (tj. oba supružnika), A_2 bračni par 2,... Tražena vjerovatnoća je

$$p = 1 - P\Big(\bigcup_{i=1}^{8} A_i\Big) = 1 - \binom{8}{1}\frac{\binom{14}{4}}{\binom{16}{6}} + \binom{8}{2}\frac{\binom{14}{2}}{\binom{16}{6}} - \binom{8}{3}\frac{1}{\binom{16}{6}}.$$

Primjer 2.18 *Neka je* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *vjerovatnosni prostor i* $A_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \dots, n$. *Tada važi*

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \;&=\; \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cup A_j) \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i \cup A_j \cup A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\;) \end{aligned}$$

U rješavanju nekih važnih vjerovatnosnih zadataka koristi se sljedeća dobro poznata teorema iz Kombinatorike (Teorema 1, zbirka str 37).

Teorema 2.3 *Neka je prostor ishoda Ω konačan skup, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}(\Omega)$ i $A_1, A_2, ..., A_n$ su događaji. Tada je*

$$|A_1 A_2..A_n| = |\Omega| - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i^c| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i^c A_j^c| - ... + (-1)^{n-1}|A_1^c...A_n^c|.$$

Primjer 2.19 *Kocka se baca do pojave svih šest strana. Izračunati vjerovatnoću događaja da će biti izvedeno tačno $n, n \geqslant 6$, bacanja.*

Ω je skup n torki čiji su elementi iz $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, |\Omega| = 6^n$. Odgovaraju n torke koje se završavaju sa nekim brojem iz S (6 mogućnosti), a na prvih $n-1$ mjesta se nalaze **svi** brojevi iz S sa izuzetkom broja koji je na n tom mjestu. $n-1$ torki napravljenih od 5 brojeva (svi učestvuju) ima

$$5^{n-1} - \binom{5}{1}4^{n-1} + \binom{5}{2}3^{n-1} - \binom{5}{3}2^{n-1} + \binom{5}{4}.$$

(vidi Teoremu (prilagođavamo je slučaju kada se kocka baca $n-1$ puta), ako je na n tom mjestu recimo 6, tada $n-1$ torke pravimo sa brojevima $1, 2, 3, 4, 5$; skup - događaj A_1 - učestvuje 1 u $n-1$ torki, skup - događaj A_2 - učestvuje 2 u $n-1$ torki itd). Dakle,

$$\begin{aligned} p &= \frac{6\big[5^{n-1} - \binom{5}{1}4^{n-1} + \binom{5}{2}3^{n-1} - \binom{5}{3}2^{n-1} + \binom{5}{4}\big]}{6^n} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - 5\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} + 10\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1} - 10\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Primjer 2.20 *r kuglica se razmješta u n kutija, $r \geqslant n$. Kolika je vjerovatnoća da tačno $m, 0 \leqslant m \leqslant n-1$ kutija bude prazno?*

Zapisujemo redni broj kutije u koju ide kuglica $1, 2, ..., r$ i dobijamo r torku čiji su članovi iz $S = \{1, 2, ..., n\}, |\Omega| = n^r$. Odgovaraju sve r torke napravljene od $n-m$ brojeva iz S (svi ti brojevi učestvuju). $n-m$ brojeva iz S možemo izabrati na $\binom{n}{m}$ načina. Izabrane brojeve označimo sa $s_1, s_2, ..., s_{n-m}$. Izračunajmo koliko ima r torki koje nam odgovaraju. Neka je A_1 događaj-skup s_1 učetvuje; ..., A_{n-m} događaj-skup s_{n-m} učetvuje. Sada je

$$\begin{aligned} |A_1...A_{n-m}| &= (n-m)^r - \binom{n-m}{1}(n-m-1)^r + \binom{n-m}{2}(n-m-2)^r... \\ &\quad +(-1)^{n-m-1}\big[n-m-(n-m-1)\big]^r \end{aligned}$$

te je

$$p = \frac{\binom{n}{m}|A_1...A_{n-m}|}{n^r} = \binom{n}{m}\sum_{\nu=o}^{n-m-1}(-1)^\nu\binom{n-m}{\nu}\big(1-\frac{m+\nu}{n}\big)^r. \blacktriangleleft$$

Primjer 2.21 *Kocka se baca 7 puta. Kolika je vjerovatnoća da je suma palih brojeva 27?*

$x_1 + ... + x_7 = 27, 1 \leqslant x_i \leqslant 6$. $y_i = x_i - 1; y_1 + ... + y_7 = 20, 0 \leqslant y_i \leqslant 5$.

$y_1 + ... + y_7 = 20, 0 \leqslant y_i$ ima $\binom{26}{6}$ rješenja. Koristićemomo formulu uključenja isključenja. Tražimo koliko ima rješenja takvih da je jedna nepoznata $\geqslant 6$, $z_7 = y_7 - 6; y_1 + ... + y_6 + z_7 = 14$ nenegativnih rješenja ima $\binom{20}{6}$. Dvije nepoznate $\geqslant 6$, $y_1 + ... + y_5 + z_6 + z_7 = 8$ ima ih $\binom{14}{6}$ i na kraju tri nepoznate $\geqslant 6$, $y_1 + ... y_4 + z_5 + z_6 + z_7 = 2$ ima ih $\binom{8}{6}$. Dakle,

$$p = \frac{1}{6^7}\left[\binom{26}{6} - \binom{20}{6}\binom{7}{1} + \binom{14}{6}\binom{7}{2} - \binom{8}{6}\binom{7}{3}\right].$$

Ovaj zadatak se može uraditi i metodom funkcije izvodnica. Metod ćemo usvojiti u toku jedne kasnije faze učenja stohastike.

3 Uslovna vjerovatnoća i nezavisnost događaja

Neka je A događaj iz slučajnog opita koji je matematički modeliran trojkom $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ako osim kompleksa uslova koji generišu opit nema drugih ograničenja koja mogu uticati na računanje vjerovatnoće događaja A, tada kažemo da je $P(A)$ bezuslovna vjerovatnoća događaja A.

Međutim, praksa često nameće potrebu za računanjem vjerovatnoće događaja A pri dopunskom uslovu da je ostvaren neki događaj B. Takve vjerovatnoće se zovu **uslovne**. Koristićemo zapis $P(A|B)$; njime je označena vjerovatnoća događaja A pri uslovu B (ili preciznije, pri uslovu da je ostvaren događaj B).

Da bismo približili motive za definiciju kroz koju se ukazuje na postupak računanja uslovne vjerovatnoće, navešćemo dva primjera.

Primjer 3.1 *Kocka za igru se baca dva puta. Neka je A događaj da je u oba bacanja pao paran broj, a B događaj da je zbir brojeva u oba bacanja $\leqslant 6$.*

Konstatujmo

$$\begin{aligned}
&A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\},\\
&B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),\\
&(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\},
\end{aligned}$$

odakle slijedi $P(A) = \frac{9}{36}$, $P(B) = \frac{15}{36}$. Kako računati $P(A|B)$? Izvjesno je, B je ostvareno pa se skup ishoda sužava i redukuje na skup koji ima 15 elemenata. Među tim elementima – ishodima nađimo one koji odgovaraju događaju A. Ti elementi su $\{(2,2),(2,4),(4,2)\}$, a ovim pretraživanjem je u stvari nađen skup – događaj AB. Slijedeći ideju iz klasične definicije vjerovatnoće imamo

$$P(A|B) = \frac{3}{15} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \blacktriangleleft$$

Primjer 3.2 *Slučajno se bira tačka iz kvadrata K dužine stranice 1. Neka su A i B dva podskupa sa K. Neka je A događaj da je slučajno izabrana tačka iz A, a B događaj da je slučajno izabrana tačka iz B. Nađimo $P(A|B)$.*

Budući da je B izvjesno ostvareno, tj. slučajno izabrana tačka pripada skupu B, skup ishoda se svodi na B. Tražeći među elementima skupa B one koji pripadaju skupu A, mi dobijamo skup AB. Slijedeći ideju iz geometrijske vjerovatnoće, sada imamo

$$P(A|B) = \frac{\text{mes } AB}{\text{mes } B} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Posljednja jednakost slijedi iz činjenice mes $K = 1$.

Vratimo se izlaganju teorije. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor vjerovatnoće i neka je $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$. Definišimo preslikavanje $P_B : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$ sa:

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)},\ A \in \mathcal{F}. \tag{3.1}$$

Lako se provjerava da je P_B vjerovatnoća na $\mathcal{F}$. Nazivamo je uslovna vjerovatnoća uz uslov B. Druga jednakost u formuli (**??**) služi kao obrazac za računanje uslovne vjerovatnoće. Budući da su primjeri (**??**) i (**??**) u svježem sjećanju, jasno je odakle potiče motiv za drugu jednakost u (**??**).

Znači, svaki događaj B za koji je $P(B) > 0$ generiše prostor vjerovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P_B)$.

Zato što je P_B vjerovatnoća na $\mathcal{F}$, neposredno slijedi

Teorema 3.1 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor vjerovatnoće i neka je $B \in \mathcal{F}$, $P(B)$ > 0. Tada je*

(a) $P(\emptyset|B) = 0$.

(b) $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$, $A \in \mathcal{F}$.

(c) $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$.

(d) $A_1, A_2 \in \mathcal{F},\ A_1 \subseteq A_2 \Longrightarrow P(A_1|B) \leqslant P(A_2|B)$.

(e) $A_n \in \mathcal{F}, n \in N \Longrightarrow P\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n|B\right) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$.

Iz jednakosti (**??**) slijedi da uz uslove $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ važi **formula množenja vjerovatnoća**

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A). \tag{3.2}$$

Postoji prirodno uopštenje formule (**??**). Naime

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}),$$

uz pretpostavku da su vjerovatnoće događaja iz uslova pozitivne.

DEFINICIJA 3.1 *Konačna ili prebrojiva familija $H_i, i \in I$ događaja u prostoru vjerovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je* **potpuni sistem događaja** *ako je $P(H_i) > 0$ za svako $i \in I$ i $\sum\limits_{i \in I} H_i = \Omega$.*

Sljedeće dvije teoreme se često primjenjuju prilikom rješavanja zadataka.

Teorema 3.2 (Formula potpune vjerovatnoće.) *Neka je $H_i, i \in I$ potpuni sistem događaja u vjerovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada za svako $A \in \mathcal{F}$ važi*

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i).$$

Dokaz. Za proizvoljno $A \in \mathcal{F}$ važi

$$\begin{aligned} P(A) = P(A\Omega) &= P\left(A \sum_{i \in I} H_i\right) = P\left(\sum_{i \in I} (AH_i)\right) \\ &= \sum_{i \in I} P(AH_i) = \sum_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i). \blacklozenge \end{aligned}$$

Teorema 3.3 (Bajesova formula.) *Neka je $H_i, i \in I$ potpuni sistem događaja u vjerovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $A \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$. Tada za svako $i_0 \in I$ važi*

$$P(H_{i_0}|A) = \frac{P(A|H_{i_0})P(H_{i_0})}{\sum\limits_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

Dokaz. Iz formule proizvoda vjerovatnoća i formule potpune vjerovatnoće slijedi

$$P(H_{i_0}|A) = \frac{P(AH_{i_0})}{P(A)} = \frac{P(A|H_{i_0})P(H_{i_0})}{\sum\limits_{i \in I} P(A|H_i)P(H_i)}. \blacklozenge$$

Budući da događaji iz sistema $H_i, i \in I$ čine jednu potpunu kolekciju mogućih događaja, govorićemo da su H_i **hipoteze**.

Definicija 3.2 *Događaji A i B su* **nezavisni** *ako je*

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{3.3}$$

Teorema 3.4 *Neka je $P(B) > 0$. Događaji A i B su nezavisni ako i samo ako je $P(A|B) = P(A)$.*

Neka je $P(AB) = P(A)P(B)$. Uz ovaj uslov dobijamo $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$. Obrnuto, uz uslov $P(A|B) = P(A)$ imamo $P(A|B) = P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$.♦

Dakle, uz uslov $P(A)P(B) > 0$ važi

$$P(AB) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = P(B).$$

Jednakost $P(A|B) = P(A)$ se odnosi na slučaj kada je vjerovatnoća realizacije događaja A uz uslov da je ostvaren događaj B jednaka bezuslovnoj. Dakle, realizacija događaja B nije "uticala" na vjerovatnoću realizacije događaja A. Ako je $P(A) = 0$, tada je za $\forall B \in \mathcal{F}, P(AB) = P(A)P(B)$ tj. događaji A i B su nezavisni. Takođe, za $\forall B \in \mathcal{F}$, događaji B i Ω su nezavisni. Primijetimo, definicija 3.2 nije opterećena uslovom $P(A) > 0, P(B) > 0$.

Svi pojmovi koje smo do uvođenja pojma nezavisnosti pomenuli, imaju svoje analogone u Teoriji mjere. Nezavisnost je izvorno vjerovatnosni pojam. Pojavom pojma nezavisnosti, Vjerovatnoća je izašla iz okrilja Teorije mjere.

Kod rješavanja praktičnih vjerovatnosnih zadataka, nezavisnost se obično prihvata na osnovu naših intuitivnih predstava o opitu. Prirodno je smatrati da u opitu u kome bacamo dva novčića, pojava, recimo grba kod jednog novčića nema uticaja na pojavu, recimo, grba na drugom novčiću (osim ako novčići nisu fizički povezani npr. tankom žicom). Takođe, to što je neka žena rodila sina nema uticaja na pol djeteta koje će roditi neka druga žena te je vjerovatnoća da su dva slučajno odabrana novorođenčeta dječaci $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

Postoje situacije kada nezavisnost događaja nije očigledna i ustanovljava se tek nakon provjere važenja jednakosti (**??**) (pogledati primjere (**??**) i (**??**)).

U vjerovatnoći se pojavljuje potreba za razmatranjem nezavisnosti familije događaja. Formalizujmo.

Definicija 3.3 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, vjerovatnosni prostor i $A_i \in \mathcal{F}, i \in I$ proizvoljna familija događaja. Kažemo da je to* **familija nezavisnih događaja** *ako za svaki konačni podskup različitih indeksa $i_1, i_2, ..., i_k \in I$ važi*

$$P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Do za sada izloženu teoriju ćemo ilustrovati primjerima.

Primjer 3.3 *Profesor je za ispit pripremio n dobrih i m loših cedulja. Kolika je vjerovatnoća da student koji cedulju izvlači kao $l+1$ po redu, $0 \leqslant l \leqslant m+n-1$, izvuče dobru cedulju?*

►Neka je A događaj čiju vjerovatnoću tražimo, a B_k, $0 \vee (l-m) \leqslant k \leqslant n \wedge l$, događaj da prvih l studenata izvuku k dobrih cedulja. Na osnovu formule potpune vjerovatnoće dobijamo

$$P(A) = \sum_{k=0\vee(l-m)}^{(n-1)\wedge l} P(A|B_K)P(B_k) = \sum_{k=0\vee(l-m)}^{(n-1)\wedge l} \frac{n-k}{n+m-l} \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{l-k}}{\binom{m+n}{l}}.$$

Kad smo zadavali B_k, maksimalna vrijednost za k je bila $n \wedge l$. Primijetimo, ako je $n \leqslant l$ tada za $k = n \wedge l = n$ važi $P(A|B_k) = P(A|B_n) = 0$ te nema potrebe da u sumi računamo član sa indeksom $n \wedge l$. Dakle sumiranje završavamo sa $k = (n-1) \wedge l$. Ako je $l < n$ tada je najveći indeks u sumi l i on se dobija bez obzira da li je najveći indeks zadat kao $n \wedge l$ ili $(n-1) \wedge l$. Ovim smo opravdali korektnost sumiranja do indeksa $k = (n-1) \wedge l$.

Nakon sređivanja opšteg člana u sumi, dobijamo

$$P(A) = \frac{n}{n+m} \sum_{k=0\vee(l-m)}^{(n-1)\wedge l} \frac{\binom{n-1}{k}\binom{m}{l-k}}{\binom{n+m-1}{l}} = \frac{n}{n+m}.$$

Naime, suma je jednaka 1. Objasnimo zbog čega. U slučaju $l = 0$ jednakost je očigledna. Skoncetrišimo se na model sa $n-1$ dobrih i m loših cedulja, i cedulje izvlači l, $1 \leqslant l \leqslant n+m-1$ studenata. Ako sa k označimo broj izvučenih dobrih cedulja, tada je $0 \vee (l-m) \leqslant k \leqslant (n-1) \wedge l$, a vjerovatnoće da se izvuče k dobrih cedulja se nalaze u sumi. Sumirajući te vjerovatnoće dobijamo 1. Vidimo da u rezultatu ne figuriše l. Dakle, bez obzira na poziciju studenta u "redu", vjerovatnoća izvlačenja dobre cedulje je $\frac{n}{m+n}$.

Naš model sa ceduljama je ekvivalentan sa sljedećim. U kutiji se nalazi m bijelih i $n-m$ crnih kuglica. Po modelu bez vraćanja se vade kuglice. Izračunajmo vjerovatnoće da

a) je j-ta izvađena kuglica bijela?

b) su i-ta i j-ta izvađena kuglica bijele, $i \neq j$?

c) je i-ta bijela a j-ta crna, $i \neq j$?

a) Kuglice se mogu izvući na $n!$ načina. Svakom od tih izvlačenja-nizova pridružujemo istu vjerovatnoću (mjeru) $\frac{1}{n!}$. Interesuje nas koliko ima nizova sa bijelom kuglicom na j-tom mjestu. j-to mjesto u nizu popunjava neka od m bijelih, a ostalih $n-1$ mjesta popunjavaju ostalih $n-1$ kuglica.

Dakle,

$$p = \frac{m(n-1)(n-2)...1}{n!} = \frac{m}{n}.$$

Možemo rezonovati i ovako. j ta izvađena kuglica može biti bilo koja od n kuglica iz kutije (kuglice su ravnopravne), a nama odgovara bilo koja od m bijelih. Dakle, $p = \frac{m}{n}$.

b) j-to mjesto u nizu popunjava neka od m bijelih, i-to mjesto u nizu popunjava neka od $m-1$ bijelih, a za preostalih $n-2$ mjesta ostaje $n-2$ kuglica. Dakle,

$$p = \frac{m(m-1)(n-2)...1}{n!} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.$$

Možemo rezonovati i ovako. Dvije bijele kuglice koje će biti izvađene u i tom i j tom vađenju možemo izabrati na $\binom{m}{2}$ načina, dvije kuglice koje će biti izvađene u i tom i j tom vađenju možemo izabrati na $\binom{n}{2}$ načina. Dakle,

$$p = \frac{\binom{m}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{m(m-1)}{n(n-1)}.$$

c) $p = \frac{m(n-m)}{n(n-1)}$.◀

Primjer 3.4 *Iz kutije u kojoj se se nalazi 10 bijlih, 11 crvenih i 12 crnih kuglica, po modelu a) sa vraćanjem; b) bez vraćanja, vade se kuglica. Kolika je vjerovatnoća da će bijela kugica biti izvađena prije crne?*

Primjer 3.5 *U svakoj od dvije kutije se nalazi po* $10B$ *i* $5C$ *kuglica. Iz prve kutije se vadi kuglica, prebacuje u drugu, zatim se iz druge vadi kuglica i prebacuje u prvu. Na kraju se iz prve kutije vadi kuglica. Kolika je vjerovatnoća da je ta kuglica bijela?*

▶Uvedimo hipoteze $H_1 : \ BB$ (u prvom vađenju je iz prve kutije izvučena bijela kuglica, a iz druge kutije je izvučena bijela kuglica), $H_2 : \ BC$, $H_3 : \ CB$, $H_4 : \ CC$. Ako sa W označimo događaj čiju vjerovatnoću tražimo, dobijamo

$$\begin{aligned} P(W) &= P(W|H_1)P(H_1) + P(W|H_2)P(H_2) + P(W|H_3)P(H_3) + \\ &\quad + P(W|H_4)P(H_4) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{11}{16} + \frac{6}{15}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{16} + \frac{11}{15}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{16} + \\ &\quad + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{16} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dakle, vjerovatnoće prije i poslije prebacivanja su iste.◀

Primjer 3.6 *Igrači* A *i* B *igraju do bankrota jednog od njih. Na početku igrač* A *ima* a *eura, a igrč* B *ima* b *eura. U svakoj partiji vjerovatnoća pobjede igrača* A *je* p, *a igrača* B *je* q, $p + q = 1$. *Kad* *partiju dobije igrač A tada mu igrač B daje euro, a kad partiju dobije igrač B tada mu igrač A daje euro. Naći vjerovatnoću bankrota za svakog igrača.*

Neka je $p_n, n = 0, 1, ..., a+b$ vjerovatnoća bankrota igrača A kad ima n eura. Jasno, $p_{a+b} = 0, p_0 = 1$. Neka je H_1-u prvoj partiji pobjeđuje A, H_2-u prvoj partiji pobjeđuje B. Sada je

$$\begin{aligned}
p_n &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = pp_{n+1} + qp_{n-1} \Rightarrow \\
& (p+q)p_n = pp_{n+1} + qp_{n-1} \Rightarrow q(p_n - p_{n-1}) = p(p_{n+1} - p_n), n = 1, 2, ..., a+b-1. \\
1^0 \quad & p = q = \frac{1}{2}, \, p_{n+1} - p_n = p_n - p_{n-1} = ... = p_1 - p_0 = c \Rightarrow p_n = p_0 + nc, \\
n = \quad & a+b \Rightarrow c = -\frac{1}{a+b} \Rightarrow p_n = 1 - \frac{n}{a+b}, p_a = \frac{b}{a+b}, q_b = \frac{a}{a+b}. \\
2^0 \quad & p \neq q. \; q^n \prod_{k=1}^{n} (p_k - p_{k-1}) = p^n \prod_{k=1}^{n} (p_{k+1} - p_k) \Rightarrow p_{n+1} - p_n = \left(\frac{q}{p}\right)^n (p_1 - 1). \\
& p_{a+b} - p_n = \sum_{k=n}^{a+b-1} (p_{k+1} - p_k) = \sum_{k=n}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k (p_1 - 1) = (p_1 - 1) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}}. \\
& p_{a+b} = 0 \Rightarrow p_n = (1 - p_1) \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \frac{q}{p}}.
\end{aligned}$$

Stavljajući u posljednjem izrazu $n = 0$ dobijamo $1 - p_1$ i na kraju je

$$p_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1} \Rightarrow p_a = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}, q_b = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}.$$

Primjer 3.7 *U kutiji se nalaze tri novčića. Dva su "normalna", a treći je iskovan tako da na obje strane ima pismo. Slučajno se bira jedan novčić i baca četiri puta. Naći vjerovatnoću da je uzet "normalni" novčić ako je u sva četiri bacanja palo pismo?*

►Označimo sa A događaj da je u sva četiri bacanja palo pismo, sa H_1 hipotezu da je uzet "normalni" novčić, a sa H_2 hipotezu da je uzet "felerični" novčić. Primjenom Bajesove formule dobijamo

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)} = \frac{\frac{1}{16} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{9}. ◄$$

kuglica

Primjer 3.8 *U svakoj od dvije kutije se nalazi po N kuglica, u prvoj kutiji je M_1 bijelih, u drugoj je M_2 bijelih. Slučajno se bira kutija, a zatim se iz nje po modelu sa vraćanjem vadi n kuglica. Sa H_1 označimo hipotezu da je izabrana prva, a sa H_2 hipotezu da je izabrana druga kutija. Neka je W događaj da su sve izvađene kuglice bijele. Izračunati $P(H_k|W), k = 1, 2$.*

$$P(H_k|W) = \frac{0,5\left(\frac{M_k}{N}\right)^n}{0,5\left(\frac{M_1}{N}\right)^n + 0,5\left(\frac{M_2}{N}\right)^n} = \frac{M_1^n}{M_1^n + M_2^n}, k = 1, 2.$$

Ako je $M_2 < M_1$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} P(H_1|W) = 1$. U ovom slučaju, znanje o realizaciji događaja W suštinski mijenja našu apriornu informaciju o hipotezama H_1 i H_2.

Primjer 3.9 *U kutiji se nalazi* 91 *kuglica i svaka može biti bijela ili crna. Iz kutije je po modelu bez vraćanja izvučeno* 19 *kuglica i među njima je registrovano* 7 *bijelih i* 12 *crnih kuglica. Naći najvjerovatniji prvobitni sastav kutije.*

►Označimo sa H_k hipotezu da je u kutiji k, $k = 0, 1, \ldots, 91$, bijelih kuglica. Naravno, $P(H_k) = \frac{1}{92}$ za svako k. Označimo sa A događaj da je izvučeno 7B i 12C kuglica. Nakon primjene Bajesove formule dobijamo

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=0}^{91} P(H_i)P(A|H_i)} = \frac{P(A|H_k)}{\sum\limits_{i=0}^{91} P(A|H_i)}.$$

Zadatak traženja maksimuma za $P(H_k|A)$ ekvivalentan je zadatku traženja maksimuma za $P(A|H_k)$. Imamo

$$P(A|H_k) = \frac{\binom{k}{7}\binom{91-k}{12}}{\binom{91}{19}}.$$

Nakon kraće analize se dobija $P(A|H_k) < P(A|H_{k+1})$ za $k \leqslant 32$ i $P(A|H_k) > P(A|H_{k+1})$ za $k \geqslant 33$. Odavde zaključujemo da je najvjerovatniji sastav kutije 33B i 58C. Primijetimo da je $\frac{7}{19} \cdot 91 \approx 33$ te možemo konstatovati da dobijeni rezultat korespondira sa našom intuicijom.◄

Primjer 3.10 *U svakoj od n kutija se nalazi b bijelih i c crnih kuglica. Iz prve se kutije u drugu prebacuje jedna, zatim se iz druge u treću prebacuje jedna,.... Kolika je vjerovatnoća da se iz n-te izvadi bijela kuglica?*

$H_k, k = 1, 2, .., n$ je događaj da se iz $k$te kutije izvadi bijela kuglica.

$$P(H_{k+1}) = P(H_{k+1} \mid H_k)P(H_k) + P(H_{k+1} \mid H_k^c)P(H_k^c) = \frac{b + P(H_k)}{b + c + 1}, k = 1, 2, ..., n-1.$$

Iz $P(H_1) = \frac{b}{b+c}$ slijedi $P(H_2) = ... = P(H_n) = \frac{b}{b+c}$.

Primjer 3.11 *U kutiji je k kuglica, svaka od njih sa vjerovatnoćom $\frac{1}{2}$ (nezavisno od ostalih) može biti bijela ili crna. Iz kutije n puta vadimo kuglicu, model sa vraćanjem. Između izvađenih kuglica m su bijele, $0 < m < n$. Kolika je vjerovatnoća da u kutiji ima tačno s bijelih kuglica $(0 < s < k)$?*

$$
\begin{aligned}
P(H_s \mid W) &= \frac{P(H_s)P(W \mid H_s)}{\sum\limits_{i=1}^{k-1} P(W \mid H_i)P(H_i)} = \frac{\binom{k}{s}\frac{1}{2^k}\binom{n}{m}\left(\frac{s}{k}\right)^m\left(1-\frac{s}{k}\right)^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\binom{n}{m}\left(\frac{i}{k}\right)^m\left(1-\frac{i}{k}\right)^{n-m}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k}} = \\
&= \frac{\binom{k}{s}s^m(k-s)^{n-m}}{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\binom{k}{i}(k-i)^{n-m}}.
\end{aligned}
$$

Primjer 3.12 *Iz skupa $\{1,2,...,n\}$ jedan za drugim se biraju dva broja. Kolika je vjerovatnoća da je razlika između prvog i drugog izvađenog broja $\geqslant m, 0 < m < n$?*

$$
P(W) = \sum_{i=m+1}^{n} P(W \mid H_i)P(H_i) = \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{n-1} + ... + \frac{n-m}{n-1}\Big) = \frac{(n-m)(n-m+1)}{2(n-1)n}.
$$

Primjer 3.13 *Iz kompleta od 32 karte, slučajno se vadi karta. Neka je A događaj da je izvučena karta as, a B događaj da je izvučena karta krsta. Da li su događaji A i B nezavisni?*

► $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(AB) = \frac{1}{32}$ (postoji samo jedan as krsta). Dakle $P(AB) = P(A)P(B)$ te su događaji A i B nezavisni. Da li se nezavisnost narušava kada se u komplet stavi "prazna" karta?◄

Primjer 3.14 *U kvadratu $K = (0,1)\times(0,1)$ slučajnio se bira tačka. Neka je A događaj da je izabrana tačka iz oblasti $A = \{(x,y) : (x,y) \in K, x > a\}$, $0 < a < 1$ i neka je B događaj da je izabrana tačka iz oblasti $B = \{(x,y) : (x,y) \in K, y > b\}$, $0 < b < 1$. Da li su događaji A i B nezavisni?*

Primjer 3.15 *U kutiji se nalaze četiri kuglice na kojima su zapisani redom brojevi $2,3,5,30$. Iz kutije se vadi kuglica. Označimo sa A_k, $k \in \{2,3,5,30\}$ događaj da je broj na izvučenoj kuglici djeljiv sa k.*

Imamo

$$
\begin{aligned}
&P(A_2) = P(A_3) = P(A_5) = \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} = P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3) \\
&= P(A_2A_5) = P(A_2)P(A_5) = P(A_3A_5) = P(A_3)P(A_5), \\
&\frac{1}{4} = P(A_2A_3A_5) \neq P(A_2)P(A_3)P(A_5) = \frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

Događaji A_2, A_3, A_5 su nezavisni u parovima, ali ne i u ukupnosti.

Primjer 3.16 *Kocka se baca dva puta. Izdvojimo događaje*

$$
\begin{aligned}
&A = \{(i,j) : j \in \{1,2,5\}\},\ B = \{(i,j) : j \in \{4,5,6\}\}, \\
&C = \{(i,j) : i + j = 9\}.
\end{aligned}
$$

Imamo,

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{9}, P(AB) = \frac{1}{6}, P(ABC) = \frac{1}{36},$$

pa možemo konstatovati

$$P(AB) \neq P(A)P(B) \text{ i } P(ABC) = P(A)P(B)P(C).$$

Primjer 3.17 *U svakom susretu igrači A i B imaju jednake šanse da osvoje bod. Pobjeđuje igrač koji prvi osvoji* 6 *bodova. Naći vjerovatnoću događaja da pobijedi igrač A ako trenutno vodi rezultatom* $4:2$.

►Sa A ćemo simbolički označavati pobjedu igrača A u pojedinačnoj igri, a sa B pobjedu igrača B u pojedinačnoj igri. B će biti ukupni pobjednik ako se ostvari neka od shema BBBB, ABBBB, BABBB, BBABB, BBBAB. Zbog podrazumijevane nezavisnosti između igara, imamo da je vjerovatnoća pobjede igrača B

$$p_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{16},$$

a vjerovatnoća pobjede igrača A je $p_A = \frac{13}{16}$. ◄

Primjer 3.18 *U populaciji je* 2% *oboljelih. Kada se testira oboljela osoba test je pozitivan sa vjerovatnoćom 0,99, a kad se testira zdrava test je pozitivan u* $0,5\%$ *slučajeva.*

a) Kolika je vjerovatnoća da je test pozitivan?

b) Ako je test pozitivan, kolika je vjerovatnoća da je testirana oboljela osoba?

A- test je pozitivan, H_1 - testira se oboljela osoba, H_2 - testira se zdrava osoba. $P(H_1) = 0,02$, $P(H_2) = 0,98$, $P(A|H_1) = 0,99$, $P(A|H_2) = 0,005$. a) Nakon primjene formule potpune vjerovatnoće dobijamo $P(A) = 0,0247$. b) Nakon primjene Bajesove formule dobijamo $P(H_1|A) = 0,8016$.

Završićemo ovu temu sa Borel Kantelijevom lemom II. Za njen dokaz nam je potrebna sljedeća lema

Lema 3.1 *Ako su događaji* $A_1, A_2, ...$ *nezavisni tada su i događaji* $A_1^c, A_2^c, ...$ *takođe nezavisni.*

Dokazaćemo da iz nezavisnosti događaja A_1 i A_2 slijedi nezavisnost događaja A_1^c i A_2^c. Dakle, neka su A_1 i A_2 nezavisni događaji. Sada je

$$P(A_1^cA_2^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1) - P(A_2) + P(A_1)P(A_2) = P(A_1^c)P(A_2^c).$$

Opšti slučaj se dokazuje analogno tj. računanjem vjerovatnoće suprotnog događaja i primjenom Silvesterove formule.

U dokazu najavljene leme ćemo koristiti dobro poznatu nejednakost: $1 - x \leqslant e^{-x}, 0 \leqslant x \leqslant 1$.

Lema 3.2 (Borel Kantelijeva lema II) *Ako su događaji $A_n, n = 1, 2, ...$ nezavisni i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ tada je $P(A^*) = 1$.*

$$P(A^*) = 1 - P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big)\Big(\text{jer je } \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = B_n \uparrow\Big)$$

$$j = 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big)\Big(\text{ jer je } \bigcap_{k=n}^{m} A_k^c = C_m \downarrow, m \geqslant n, \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \bigcap_{m=n}^{\infty} C_m\Big)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\prod_{k=n}^{m}(1 - P(A_k)) \geqslant 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = 1 - e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = 1,$$

jer je zbog divergencije reda $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{m} P(A_k) = \infty$ za svako n. Dakle, $P(A^*) = 1$.

Primjer 3.19 *Kolika je vjerovatnoća da se u fiktivnom beskonačnom nizu bacanja kocke bar jednom zabilježi 1000 uzastopnih šestica?*

Označimo sa W događaj čiju vjerovatnoću tražimo. Neka je A_1 događaj da šestica stalno pada od prvog do hiljaditog bacanja, A_2 događaj da šestica stalno pada od hiljadu prvog do dvije hiljaditog bacanja, ... Primijetimo, $A^* \subseteq W$, $\frac{1}{6^{1000}} = P(A_1) = P(A_2) = ...$ i događaji $A_n, n = 1, 2, ..$ su nezavisni. Na osnovu Borel Kantelijeve leme II zaključujemo $P(A^*) = 1$ te je $P(W) = 1$.

Primjer 3.20 *Izvodi se serija nezavisnih opita. Neka je A događaj iz opita, $P(A) = p$ i neka je $A_n, n = 1, 2, ...$ događaj da se između2^n-tog i $2^{n+1} - 1$-og ponavljanja događaj A realizuje n puta uzastopno. Ako je $p < \frac{1}{2}$ tada je $P(A^*) = 0$, ako je $p \geqslant \frac{1}{2}$ tada je $P(A^*) = 1$. Dokazati!*

a) $p < \frac{1}{2}$. Neka je B_i događaj da se počevši od i-tog ponavljanja realizuje n uzastopnih događaja A. Sada je

$$A_n = \bigcup_{i=2^n}^{2^{n+1}-n} B_i \Rightarrow P(A_n) \leqslant (2^n - n + 1)p^n \leqslant (2p)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(A^*) = 0.$$

b) $p \geqslant \frac{1}{2}$. $A_n^c \subseteq \bigcap_{i=1}^{\left[\frac{2^n}{n}-1\right]+1} D_i$, gdje je D_i događaj da od $2^n+(i-1)n$-tog do 2^n+in-1-tog ponavljanja nisu realizovani samo događaji A. Koristeći $P(D_i)=1-p^n$ dobijamo

$$P(A_n^c) \leqslant (1-p^n)^{\left[\frac{2^n}{n}-1\right]} \Rightarrow P(A_n) \geqslant 1-(1-p^n)^{\left[\frac{2^n}{n}-1\right]} \sim \frac{(2p)^n}{n}.$$

Iz nezavisnosti događaja u nizu $A_n, n=1,2,...$ i divergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2p)^n}{n}$ slijedi $P(A^*)=1$.

Primjer 3.21 *Neka su događaji $A_n, n=1,2,..$ nezavisni. Dokazati da je $P(A^*)=0$ ako i samo ako je $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$.*

4 Slučajne promjenljive (veličine)

Sva teorijska razmatranja u tekstu koji slijedi su vezana za vjerovatnosni prostor $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Prirodno je da se sa skupa Ω pređe na, u matematici najbolje izučeni, skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Taj prelazak se ostvaruje uz posredovanje funkcije koja se naziva slučajna promjenljiva.

Definicija 4.1 *Funkcija $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ se naziva* **slučajna promjenljiva** *ako za svaki Borelov skup B važi*

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in \mathfrak{F}. \tag{4.1}$$

Za funkciju kojom je definisana slučajna promjenljiva kaže se da je $(\mathfrak{F}, \mathcal{B}^1)$ mjerljiva. Iz teoreme koja slijedi (nećemo je dokazivati) zaključujemo da se slučajna promjenljiva može definisati tako što će se uslov (**??**) zamijeniti sa nekim od pet navedenih.

Teorema 4.1 *Svaki od navedenih uslova potreban je i dovoljan da bi funkcija $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bila slučajna promjenljiva.*

a) $X^{-1}(G) = \{\omega : X(\omega) \in G\} \in \mathfrak{F}$ za svaki otvoreni skup $G \subset \mathbb{R}$.

b) $X^{-1}((-\infty, x)) = \{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

c) $X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega : X(\omega) \leqslant x\} \in \mathfrak{F}$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

d) $X^{-1}([x, \infty)) = \{\omega : X(\omega) \geqslant x\} \in \mathfrak{F}$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

e) $X^{-1}((x, \infty)) = \{\omega : X(\omega) > x\} \in \mathfrak{F}$, za svako $x \in \mathbb{R}$.

f) $X^{-1}([a, b)) = \{\omega : a \leqslant X(\omega) < b\}$, za svaki polusegment $[a, b)$.

Ako je ω_0 fiksirani element iz Ω i $X:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ slučajna promjenljiva, tada $X(\omega_0)$ nazivamo slikom ishoda ω_0 ili realizacijom od X po ishodu ω_0. Neki autori $X(\omega_0)$ nazivaju rezultatom mjerenja ishoda ω_0, a upotrebljava se i naziv faza slučajne promjenljive.

Sljedećom teoremom ćemo zadati jedno značajno σ polje.

Teorema 4.2 *Neka je X slučajna promjenljiva. Tada je familija*

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^1\}$$

σ-polje.

a) $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R}) \in \sigma(X)$.

b) Neka je $A \in \sigma(X)$. Tada postoji skup $B \in \mathcal{B}^1$ takav da je $A = X^{-1}(B)$. Sada imamo

$$A^c = (X^{-1}(B))^c = X^{-1}(B^c) \in \sigma(X).$$

c) Neka je A_n, $n \in \mathbb{N}$, niz skupova iz $\sigma(X)$. Zbog toga što je X slučajna promjenljiva, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji skup $B_n \in \mathcal{B}^1$ takav da je $A_n = X^{-1}(B_n)$. Sada imamo

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) = X^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \sigma(X).$$

Ovim je dokazano da je $\sigma(X)$ σ polje. $\sigma(X)$ je pod polje σ polja $\mathfrak{F}$ i naziva se σ **polje generisano slučajnom promjenljivom** X.$\blacklozenge$

Neka je X slučajna promjenljiva zadata na vjerovatnosnom prostoru $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ i neka je $P_X : \mathcal{B}^1 \longrightarrow [0,1]$ funkcija definisana sa

$$P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\} = P(X^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}^1. \tag{4.2}$$

Lema 4.1 *Funkcija $P_X(\cdot)$ je vjerovatnoća na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$.*

a) $P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\} \geqslant 0$, $B \in \mathcal{B}^1$ i $P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$.

b) Neka je B_i, $i \in \mathbb{N}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$. Sada je

$$P_X(\sum_{i\in\mathbb{N}} B_i) = P(X^{-1}(\sum_{i\in\mathbb{N}} B_i)) = P(\sum_{i\in\mathbb{N}}(X^{-1}(B_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} P_X(B_i).\blacklozenge$$

DEFINICIJA 4.2 *Funkcija P_X se naziva* **raspodjela vjerovatnoće slučajne promjenljive** X *ili kraće* **raspodjela slučajne promjenljive** X. *Vjerovatnosni prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ naziva se* **fazni prostor slučajna promjenljive** X.

Primijetimo, $P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\}, B \in \mathcal{B}^1$, je vjerovatnoća da slika-realizacija slučajne promjenljive X "upadne" u $\mathcal{B}$. U vjerovatnosnom žargonu se koristi neprecizna ali rasprostranjena fraza: $P_X(B)$ je vjerovatnoća da slučajna promjenljiva X "upadne" u $\mathcal{B}$.

Primjer 4.1 *Novčić se baca dva puta. Prostor ishoda je* $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$.

Slučajna promjenljivačina X koja predstavlja broj palih pisama data je sa:

$$X(GG) = 0,\ X(PG) = X(GP) = 1,\ X(PP) = 2.$$

Slučajna promjenljiva Y koja predstavlja razliku broja palih pisama i grbova data je sa:

$$Y(PP) = 2,\ Y(PG) = Y(GP) = 0,\ Y(GG) = -2.$$

Kao što vidimo iz ovog primjera, na jednom vjerovatnosnom prostoru možemo zadati više slučajnih promjenljivih.◀

Primjer 4.2 *Neka je* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *vjerovatnosni prostor,*

$$\Omega = \{a, b, c\},\ \mathfrak{F} = \{\{a, b\}, \{c\}, \Omega, \emptyset\},\ P(\{a, b\}) = \frac{1}{2},\ P(\{c\}) = \frac{1}{2}.$$

Neka je funkcija $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *zadato sa*

$$X(a) = X(c) = 0,\ X(b) = 1.$$

Tada je $X^{-1}(1) = \{b\} \notin \mathfrak{F}$. Dakle, X nije slučajna promjenljiva. Ovim primjerom je pokazano da postoje funkcije iz Ω u $\mathbb{R}$ koja nisu slučajne promjenljive.◀

Primjer 4.3 *Kocka se baca jednom. Zadaćemo slučajne promjenljive:*

a) $X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = X(5) = X(6) = 0$,

b) $Y(1) = Y(3) = Y(5) = 0$, $Y(2) = Y(4) = Y(6) = 1$,

c) $Z(1) = 1$, $Z(2) = 2$, $Z(3) = 3$, $Z(4) = 4$, $Z(5) = 5$, $Z(6) = 6$.

Imamo

$$\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\},\ \sigma(Y) = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega, \emptyset\},\ \sigma(Z) = \mathcal{P}(\Omega).\ ◀$$

Primjer 4.4 *Neka je* $A \in \mathfrak{F}$ *i neka je*

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \in A^c \\ 1, & \omega \in A \end{cases}.$$

Slučajna promjenljiva I_A se naziva **indikator događaja** A.◀

Definicija 4.3 *Za slučajnu promjenljivu čiji je skup realizacija konačan ili prebrojiv kažemo da je* **diskretnog tipa**. *Ako je kodomen konačan, tada govorimo o* **prostoj slučajnoj promjenljivoj**.

Neka je $W = \{x_i : i \in I\}$, I je konačan ili prebrojiv skup, kodomen diskretne slučajne promjenljive X i $A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, i \in I$. Jasno, $\sum\limits_{i\in I} A_i = \Omega$ i

$$X(\omega) = \sum_{i\in I} x_i I_{A_i}(\omega).$$

Neka je $X(\omega) = \sum\limits_{i\in I} x_i I_{A_i}(\omega)$. Ako je $\omega \in A_i$, tada je $X(\omega) = x_i$, $i \in I$. Neka je $p_i = P(A_i), i \in I$. Raspodjela vjerovatnoća P_X slučajne promjenljive X određena je nizom parova brojeva $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots$. Zaista, za svaki Borelov skup B važi $P_X(B) = \sum\limits_{i:x_i\in B} p_i$. Kako je $P_X(R) = 1$, to je $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$. Standardni način bilježenja raspodjele vjerovatnoće diskretne slučajne promjenljive X je dat tabelom

$$X : \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & . & . & . \\ p_1 & p_2 & p_3 & . & . & . \end{array}.$$

Primjer 4.5 *Tetraedar na čijim su stranama zapisani brojevi* $1, 2, 3, 4$ *baca se dva puta. Neka je* X *zbir palih brojeva.*

Imamo, $\Omega = \{(1,1), (1,2), ..., (4,4)\}$, $\mathfrak{F} = \mathbb{P}(\Omega)$ i P je indukovano činjenicom da je $P(\omega) = \frac{1}{16}, \forall\omega \in \Omega$. Formirajmo skupove

$$\begin{aligned} A_1 &= \{X(\omega) = 2\} = \{(1,1)\}, A_2 = \{X(\omega) = 3\} = \{(1,2),(2,1)\}, \\ A_3 &= \{X(\omega) = 4\} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}, A_5 = \{X(\omega) = 6\} = \{(2,4),(4,2),(3,3)\}, \\ A_6 &= \{X(\omega) = 7\} = \{(3,4),(4,3)\}, A_7 = \{X(\omega) = 8\} = \{(4,4)\} \end{aligned}$$

i neka je $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 5, x_5 = 6, x_6 = 7, x_7 = 8$. Sada je

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{7} x_k I_{A_k}(\omega),$$

a raspodjela slučajne promjenljive X je data shemom

$$X: \begin{array}{ccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16}. \end{array}.$$

Naime,

$$p_k = P(A_k), k = 1, 2, ..., 7. \blacktriangleleft$$

Bernulijeva shema i binomna raspodjela

Kao rezultat izučavanja sljedeće jednostavne sheme dobijeno je nekoliko značajnih teorema Teorije vjerovatnoće.

Neka je $(\Omega_0, \mathfrak{F}_0, P_0)$ vjerovatnosni prostor inicijalnog opita. Iz $\mathfrak{F}_0$ izdvajamo dva događaja: $A, P_0(A) = p$ naziva se uspjeh i $A^c, P_0(A^c) = q, p + q = 1$ naziva se neuspjeh. Mi ćemo po završetku inicijalnog opita u slučaju realizacije uspjeha bilježiti 1, u slučaju realizacije neuspjeha bilježiti 0. Matematički model koji prati ovakvo postupanje je vjerovatnosni prostor $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1)$ gdje je $\Omega_1 = \{0, 1\}$, $\mathfrak{F}_1 = \mathbb{P}(\Omega_1)$ i P_1 je indukovana sa $P_1(\{1\}) = p; P_1(\{0\}) = q$. Dakle, inicijalni opit se u zavisnosti od toga što registrujemo kao ishod modelira sa $(\Omega_0, \mathfrak{F}_0, P_0)$ ili $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, P_1)$. Navedimo dva primjera. Bacamo kocku, padanje, recimo, broja koji je djeljiv sa 3 proglašavamo uspjehom, broja koji nije djeljiv sa 3, neuspjehom. Kada kao ishod registrujemo pali broj, imamo

$$\Omega_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathfrak{F}_0 = \mathcal{P}(\Omega_0), P_0(1) = \frac{1}{6}, ..., P_0(6) = \frac{1}{6},$$

dok je vjerovatnoća uspjeha $p = \frac{1}{3}$. Biramo tačku sa intervala $(0, 1)$, izbor tačke sa, recimo, intervala $(0,3; 0,7)$ proglašavamo uspjehom. Jasno, $p = 0,4$, dok je vjerovatnosni prostor kada kao ishod registrujemo slučajno izabranu tačku dat u primjeru (**??**).

Definicija 4.4 *n nezavisnih ponavljanja opita sa dva ishoda, uspjeh-neuspjeh, se naziva* **Bernulijeva shema.**

Trag koji ostaje nakon realizovane Bernulijeve sheme je $n$torka napravljena od 0 i 1 koje smo bilježili nakon svakog ponavljanja. Vjerovatnosni prostor Bernulijeve sheme je $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ gdje je

$$\Omega = \Omega_1^n = \{\omega : \omega = (\omega_1, ..., \omega_n), \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, ..., n\},\ \mathfrak{F} = \mathbb{P}(\Omega).$$

Ako je $\omega \in \Omega$, tada je

$$P(\omega) = p^k q^{n-k},$$

gdje je k broj jedinica odnosno uspjeha kod ishoda ω, tj. $k = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i$.

Neka je u Bernulijevoj shemi S_n broj uspjeha. Nađimo raspodjelu slučajne promjenljive S_n, tj. nađimo $P\{S_n = k\}, k = 0, 1, ..., n$. Događaju $\{\omega : S_n(\omega) = k\}$ odgovaraju n-torke sa k jedinica a njih ima $\binom{n}{k}$. Vjerovatnoća svake n-torke sa k jedinica je $p^k q^{n-k}$ te je

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, k = 0, 1, ..., n.$$

Za slučajnu promjenljivu S_n kažemo da ima **binomnu** raspodjelu sa parametrima n i p i koristimo zapis $S_n : \mathcal{B}(n,p)$. Imamo,

$$\sum_{k=0}^{n} P\{S_n = k\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1. \tag{4.3}$$

Jednakost (**??**) pokazuje da je suma vjerovatnoća koje se pojavljuju kod binomne raspodjele jednaka 1. Takođe, iz jednakosti (**??**) se vidi da su vjerovatnoće iz binomne raspodjele jednake članovima Njutnovog razvoja n tog stepena binoma $p+q$.

Primjer 4.6 *Kocka se baca deset puta. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju pojavljivanja brojeva djeljivih sa tri.*

Opit tretiramo kao Bernuilijevu shemu sa 10 ponavljanja (bacanja) opita u kome su ishodi padanje broja koji je djeljiv sa 3-uspjeh i padanje broja koji nije djeljiv sa 3-neuspjeh. Vjerovatnoća uspjeha je $\frac{1}{3}$. Slučajna promjenljiva X prebrojava uspjehe te možemo konstatovati $X : \mathcal{B}(10, \frac{1}{3})$, iza čega stoji

$$P\{X = k\} = \binom{10}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}, \ k = 0, 1, \ldots, 10. \blacktriangleleft$$

Primjer 4.7 *r čestica se raspoređuje na n orbita oko atomskog jezgra. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju čestica raspoređenih na orbiti koja je najbliža jezgru.*

Tražimo $P\{X = k\}, k = 0, 1, 2, ..., r$ tj. vjerovatnoću događaja da je na orbiti koja je najbliža jezgru raspoređeno k čestica. r čestica se na n orbita može rasporediti na n^r načina. k čestica koje će biti raspoređene na orbiti koja je najbliža jezgru se može izdvojiti na $\binom{r}{k}$ načina, a preostalih $r-k$ čestica se može razmjestiti na preostalih $n-1$ orbita na $(n-1)^{r-k}$ načina. Dobijamo

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r}, k = 0, 1, 2, ..., r.$$

Primijetimo, ako je $r = 2n$ tada

$$P\{X = k\} \to \frac{2^k}{k!} e^{-2}, n \to \infty, k = 0, 1, 2, ...$$

Raspoređivanje čestica na orbite možemo tretirati kao Bernulijevu shemu u kojoj se opit biranja orbite za česticu ponavlja r puta, a uspjehom se smatra izbor orbite koja je najbliža jezgru. Jasno, vjerovatnoća uspjeha je $\frac{1}{n}$. Imamo $X : \mathcal{B}(r, \frac{1}{n})$ te je

$$P\{X = k\} = \binom{r}{k}\Big(\frac{1}{n}\Big)^k\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{r-k}, k = 0, 1, 2, ..., r. \blacktriangleleft$$

Primjer 4.8 *U kutiji je n bijelih i m crnih kuglica. Slučajno se a) po modelu sa vraćanjem, b) po modelu bez vraćanja, vadi $k, 1 \leqslant k \leqslant n + m$ kuglica. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju izvađenih bijelih kuglica.*

a) $X : \mathcal{B}(k, \frac{n}{n+m})$ jer je vjerovatnoća vađenja bijele kuglice u svakom vađenju $\frac{n}{n+m}$.

b)

$$P\{X = l\} = \frac{\binom{n}{l}\binom{m}{k-l}}{\binom{n+m}{k}}, \max\{0, k - m\} \leqslant l \leqslant \min\{n, k\}. \tag{4.4}$$

Raspodjela zadata sa (**??**) se naziva **hipergeometrijska** i koristi se notacija $X : H(n, m, k)$.

U slučaju kada $\frac{n}{m+n} \to p$, $0 < p < 1$, $n \to \infty$, tada

$$P\{X = l\} \to \binom{k}{l}p^l q^{k-l}, l = 0, 1, ..., k,\ p = 1 - q,\ n \to \infty.$$

Dakle, granična raspodjela je binomna. ◀

Primjer 4.9 *Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je*

a) jednaka broju ponavljanja neuspjeha (ili prosto broju neuspjeha) do ostvarivanja prvog uspjeha,

b) jednaka broju neuspjeha do ostvarivanja r tog uspjeha, $r \geqslant 1$.

Vjerovatnoća uspjeha je p.

a) $P\{X = k\} = q^k p, k = 0, 1, 2, ...; \sum\limits_{k=0}^{\infty} pq^k = \frac{p}{1-q} = 1.$

b) $P\{X = k\} = \binom{k+r-1}{r-1} q^k p^r, k = 0, 1, 2, ...$

Raspodjela iz a) se naziva **geometrijska** sa parametrom p i koristi se notacija $X : \mathcal{G}(p)$, a iz b) **negativna binomna** sa parametrima r i p i koristi se notacija $X : \mathcal{B}i(r, p)$. U slučaju $r = 1$ dobija se geometrijska raspodjela.

Ako $X : \mathcal{G}(p)$, tada je $P\{X = m + n | X \geqslant n\} = P\{X = m\}, m = 0, 1, ...; n = 1, 2, ...(*)$. Zaista,

$$P\{X = m + n | X \geqslant n\} = \frac{P\{X = m + n\}}{P\{X \geqslant n\}} = \frac{q^{m+n}p}{\sum\limits_{j=n}^{\infty} q^j p} = pq^m = P\{X = m\}.$$

Primijetimo, uslov-događaj $X \geqslant n$ je ekvivalentan događaju da se u prvih n ponavljanja opita registruju neuspjesi. Sa $(*)$ se tvrdi da je nakon registrovanja neuspjeha u prvih n ponavljanja opita, vjerovatnoća registrovanja još m neuspjeha do ostvarivanja uspjeha jednaka vjerovatnoći da se nakon registrovanja neuspjeha u prvih m ponavljanja opita, ostvari uspjeh. Dakle, rezultati su jednaki bez obzira da li brojanje neuspjeha do ostvarivanja uspjeha kreće od početka ili nakon $n, n \in$ N, registrovanih neuspjeha. Svojstvo raspodjele izraženo sa $(*)$ se naziva **svojstvom odsustva pamćenja** ili **svojstvom odsustva posljedice**.

Pokažimo da je geometrijska jedina raspodjela čiji je domen N_0 i koja ima svojstvo odsustva pamćenja $(*)$. Neka je X slučajna promjenljiva za koju važi $(*)$. Uvedimo oznaku $p_k = P\{X = k\}$, k, $k = 0, 1, ...$ Iz $(*)$ slijedi

$$P\{X = m + n\} = P\{X = m\}P\{X \geqslant n\}.$$

Zamjenom $m = 0$ dobijamo $p_n = p_0 P\{X \geqslant n\}$, odakle slijedi $p_1 = p_0(1 - p_0)$, $p_2 = p_0(1 - p_0)^2, ..., p_k = p_0(1 - p_0)^k, ...$ ◀

Primjer 4.10 *U kutiji se nalazi n bijelih i m crnih kuglica. Iz kutije se po modelu bez vraćanja vade kuglice. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju crnih kuglica koje se izvade prije nego što se izvadi r-ta bijela kuglica.*

$$P\{X = k\} = \frac{\binom{n}{r-1}\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{k+r-1}} \frac{n - r + 1}{m + n - k - r + 1} = \frac{\binom{k+r-1}{r-1}\binom{m+n-k-r}{n-r}}{\binom{m+n}{n}}, \ k = 0, 1, ..., m.$$

Dobijena raspodjela se naziva **negativna hipergeometrijska** i koristi se zapis $Hi(n, m, r)$.

U slučaju kada $\frac{n}{m+n} \to p$, $0 < p < 1$, $n \to \infty$, tada

$$P\{X = k\} \to \binom{k + r - 1}{r - 1} q^k p^r, k = 0, 1, 2, ..., \ q = 1 - p, \ n \to \infty.$$

Dakle, granična raspodjela je negativna binomna. U modelu sa vraćanjem, raspodjela slučajne promjenljive Y koja je jednaka broju crnih kuglica izvađenih prije nego što se izvadi r-ta bijela kuglica je

$$P\{X = k\} = \binom{k + r - 1}{r - 1}\left(\frac{m}{m + n}\right)^k \left(\frac{n}{m + n}\right)^r, k = 0, 1, 2, ... ◀$$

Primjer 4.11 *n kuglica na kojima su zapisani brojevi $1, 2, ..., n$ se na slučajan način razmiješta u n kutija koje su označene brojevima $1, 2, ..., n$ i to tako da se u svaku kutiju smjesti tačno jedna kuglica. Naći raspodjelu slučajne promjenljive X koja je jednaka broju kutija kod kojih je broj kutije jednak broju kuglice koja je smještena u kutiju.*

Iz zadatka o rasijanom dekanu slijedi da je

$$P\{X=0\}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+...+\frac{(-1)^n}{n!},\ n\geqslant 2,\ P\{X=0\}=0,\ n=1.$$

Označimo sa A događaj da su brojevi na r izabranih kuglica jednaki brojevima kutija u koje se kuglice smještaju. Označimo sa B događaj da se ni jedan od preostalih $n-r$ brojeva na kuglicama ne podudara sa brojem kutije u koju se kuglica smješta.

$$P\{X=r\}=\tbinom{n}{r}P(AB)=\tbinom{n}{r}P(A)P(B|A)=\tbinom{n}{r}\tfrac{(n-r)!}{n!}\Big(\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+...+\tfrac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\Big)=$$
$$=\tfrac{1}{r!}\Big(\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+...+\tfrac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}\Big)\ r=0,1,...,n-2;\ P\{X=n-1\}=0;\ P\{X=n\}=\tfrac{1}{n!}.$$

Granični slučajevi binomne raspodjele dovode do dvije značajne raspodjele: Puasonove i normalne.

Teorema 4.3 *Neka je* $S_n:\mathcal{B}(n,p_n),(n\in\mathbb{N})$ *i neka je* $\lim\limits_{n\to\infty}np_n=\lambda, 0<\lambda<\infty$. *Tada za svako* $k=0,1,2,...$ *važi*

$$\lim_{n\to\infty}P\{S_n=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Uvedimo oznaku $np_n=\lambda_n$. Na osnovu uslova imamo $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$. Za proizvoljno $k=0,1,2,..$ imamo

$$\begin{aligned}P\{S_n=k\} &= \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\Big(\frac{\lambda_n}{n}\Big)^k\Big(1-\frac{\lambda_n}{n}\Big)^{n-k}=\\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!}\Big(1-\frac{\lambda_n}{n}\Big)^n\Big(1-\frac{1}{n}\Big)...\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big)\Big(1-\frac{\lambda_n}{n}\Big)^{-k}\to\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, n\to\infty.\blacklozenge\end{aligned}$$

Granične vjerovatnoće iz prethodne teoreme su vezane za realizacije $k, k=0,1,2,...$, a kako je $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=1$ to prethodna teorema sugeriše slučajnu promjenljivu X sa raspodjelom

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\ldots,\lambda>0.$$

Za ovako raspodjeljenu slučajnu promjenljivu kažemo da ima **Puasonovu** raspodjelu sa parametrom λ i koristimo zapis $X:\mathcal{P}(\lambda)$. Puasonova raspodjela je rasprostranjena u praksi. Suptilna analiza pokazuje da je po Puasonovom zakonu raspodijeljena slučajna promjenljiva koja prebrojava kosmičke čestice koje padnu na neki lokalitet u toku, recimo jednog sata.

Ako je $S_n:\mathcal{B}(n,p_n)$ tada na osnovu Teoreme (**??**) za velike n i male p_n važi približna formula

$$P\{S_n=k\}\approx\frac{\lambda_n^k}{k!}e^{-\lambda_n},\ k=0,1,2,\ldots,n,\lambda_n=np_n.$$

Ova aproksimacija se obično upotrebljava ako je $n \geqslant 20$, $np_n < 10$.

Primjer 4.12 *Kolika je vjerovatnoća da među 1000 slučajno odabranih osoba njih četvoro slavi rođendan prvog januara?*

Slučajna promjenljiva X koja među odabranim "prebrojava" osobe rođene prvog januara ima $\mathcal{B}(1000, \frac{1}{365})$ raspodjelu koja se aproksimira sa $P(2,73)$ raspodjelom. Dakle, tražena vjerovatnoća je

$$\frac{(2,73)^4}{4!}e^{-2,73} = 0,151.$$

Funkcija raspodjele slučajne promjenljive

Definicija 4.5 **Funkcija raspodjele vjerovatnoće slučajne promjenljive** X (ili kratko **funkcija raspodjele**) je funkcija $F_X = F : R \longrightarrow [0,1]$ zadata sa

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{\omega :\ X(\omega) < x\},\ x \in R.$$

Primjer 4.13 *Novčić se baca dva puta. Neka je X broj palih pisama. Imamo:*

$$\Omega = \{(GG),(GP),(PG),(PP)\}, \mathfrak{F} = \mathbb{P}(\Omega)$$

i vjerovatnoća se zadaje tako što se svakom elemntarnom ishodu pridruži vjerovatnoća $\frac{1}{4}$.

Za $x \leqslant 0$ imamo $F(x) = P\{\omega :\ X(\omega) < x\} = P\{\emptyset\} = 0$.

Za $0 < x \leqslant 1$ imamo $F(x) = P\{\omega :\ X(\omega) < x\} = P\{(GG)\} = 1/4$.

Za $1 < x \leqslant 2$ imamo $F(x) = P\{\omega :\ X(\omega) < x\} = P\{(GG),(GP),(PG)\} = 3/4$.

Za $x > 2$ imamo $F(x) = P\{\omega :\ X(\omega) < x\} = P\{\Omega\} = 1$.

Funkcija raspodjele slučajne promjenljive X je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1/4, & 0 < x \leqslant 1 \\ 3/4, & 1 < x \leqslant 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Primijetimo da se raspodjela slučajne promjenljiva X može pročitati sa grafika funkcije $F(x)$. Naime, tačke u kojima funkcija $F(x)$ ima skok su vrijednosti slučajne promjenljive, a veličina skoka jednaka je vjerovatnoći sa kojom se uzima odgovarajuća vrijednost. ◀

Navešćemo svojstva funkcije raspodjele.

a) $F(x)$ **je monotono rastuća funkcija.** Dokažimo. Neka su x_1 i x_2 proizvoljni realni brojevi takvi da je $x_1 < x_2$. Imamo

$$\{X < x_1\} \subseteq \{X < x_2\} \Longrightarrow F(x_1) = P\{X < x_1\} \leqslant P\{X < x_2\} = F(x_2).$$

b) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ F(\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$
Zbog monotonosti funkcije $F(x)$ dovoljno je dokazati da je $\lim\limits_{n \to \infty} F(-n) = 0$ i $\lim\limits_{n \to \infty} F(n) = 1$. Događaji $A_n = \{X < -n\}$, $n \in N$, čine monotono opadajući niz i $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ (ne postoji ishod ω takav da je $X(\omega)$ manji od svih negativnih cijelih brojeva). Iz neprekidnosti vjerovatnoće u odnosu na opadajući niz događaja slijedi

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} F(-n) = F(-\infty) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P\{\emptyset\} = 0.$$

Događaji $A_n = \{X < n\}$, $n \in N$, čine monotono rastućiući niz i $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. Iz neprekidnosti vjerovatnoće u odnosu na rastući niz događaja slijedi

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = \lim_{n \to \infty} F(n) = F(\infty) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P\{\Omega\} = 1.$$

c) **Za** $\forall x \in R$ **važi** $F(x-0) = F(x)$ **tj. funkcija** $F(x)$ **je neprekidna sa lijeve strane u svim tačkama.** Dokažimo ovo tvrđenje.

Neka je x proizvoljan realan broj i neka je $x_n = x - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Za niz događaja $A_n = \{X < x_n\}$ važi $A_n \uparrow$ i $\{X < x\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Na osnovu neprekidnosti vjerovatnoće u odnosu na monotono rastući niz događaja, imamo

$$F(x) = P\{X < x\} = P\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\} = \lim_{n \to \infty} P\{X < x_n\} = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = F(x-0).$$

d) **Funkcija raspodjele** $F(x)$ **ima najviše prebrojivo tačaka prekida.** Uspostavićemo 1-1 preslikavanje između skupa tačaka prekida i skupa $\mathbb{Q}$ odakle će slijediti tvrđenje. Neka je x_0 proizvoljna tačka prekida. Preslikajmo x_0 u neku racionalnu tačku q_0 sa polusegmenta $[F(x_0), F(x+0))$. Upravo formirano preslikavanje je zbog disjunktnosti polusegmenata injektivno.

e) Neka je $[a, b)$ proizvoljan segment na realnoj pravoj. **Tada je**

$P\{X \in [a,b)\} = F(b) - F(a)$. Dokažimo.

$$\{\omega :\ X(\omega) \in [a,b)\} = \{a \leqslant X < b\} = \{X < b\} \setminus \{X < a\},$$

dobijamo

$$P\{X \in [a,b)\} = P\{\{X < b\} \setminus \{X < a\}\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a).$$

f) Neka je x_0 proizvoljan realan broj. **Važi:** $P\{X = x_0\} = F(x_0+0) - F(x_0)$. Zaista,

$$P\{X = x_0\} = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x_0 \leqslant X < x_0 + \frac{1}{n}\}\Big) = \lim_{n\to\infty}\big[F(x_0 + \frac{1}{n}) - F(x_0)\big] = F(x_0+0) - F(x_0).$$

g) Neka je F_X funkcije raspodjele vjerovatnoće slučajne promjenljive X. Neposredno iz f) slijedi: funkcija F_X je neprekidna u tački x_0 ako i samo ako je $P\{X = x_0\} = 0$.

Primjer 4.14 *Neka je $q_n, n = 1,2,...$ jedno nizanje racionalnih brojeva sa $\mathbb{R}$ i neka je X slučajna promjenljiva sa raspodjelom*

$$p_n = P\{X = q_n\} = \frac{1}{2^n}, n = 1,2,..$$

Imamo,

$$F(x) = \sum_{n: q_n < x} p_n.$$

Skup tačaka prekida funkcije $F(x)$ je već pomenuto nizanje racionalnih brojeva. Dakle, funkcija $F(x)$ je monotono rastuća i njen skup tačaka prekida je svuda gust na $\mathbb{R}$. ◄

Kratak izvod iz Teorije mjere

Generalni skup ćemo označavati sa S.

Definicija 4.6 *Nenegativna σ aditivna funkcija skupa na σ polju $\mathcal{V}$ se naziva* **mjera**. *Ako na σ polju $\mathcal{V}$ postoji mjera, skupovi sa $\mathcal{V}$ se nazivaju* **mjerljivim**, *a par $(S,\mathcal{V})$* **mjerljivim prostorom**.

Vjerovatnoća je normirana mjera na $(\Omega, \mathfrak{F})$.

Definicija 4.7 *Mjera m na polju $\mathcal{P}$ je nenegativna funkcija skupa takva da za disjunktne skupove $A_n, n \in \mathbb{N}$ za koje je $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{P}$ važi $m(\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$.*

Teorema 4.4 (Karateodorijeva teorema o proširenju mjere) *Za mjeru zadatu na polju $\mathcal{P}$ postoji jedinstveno proširenje na $\sigma(\mathcal{P})$.*

Definicija 4.8 *Funkcija* $F : \mathbb{R} \to [0,1]$*: koja je*

1^0 *monotono rastuća,*

2^0 *neprekidna sa lijeve strane i*

3^0 $F(-\infty) = 0, \;\; F(\infty) = 1$

se naziva **funkcija raspodjele.**

Komentar 4.1 *Funkcija raspodjele iz* (**??**) *je bila vezana za konkretnu slučajnu promjenljivu dok se definicijom* (**??**) *opisuju funkcije koje nazivamo raspodjelama. Upotrebu istog termina objasniće posljedica* (**??**).

Bez dokaza navodimo sljedeću značajnu teoremu.

Teorema 4.5 *a) Ako je* P *vjerovatnoća (normirana mjera) na mjerljivom prostoru* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$*, tada je*

$$F(x) = P((-\infty, x)),\; x \in \mathbb{R},$$

funkcija raspodjele.

b) Ako je $F(x), x \in \mathbb{R}$*, funkcija raspodjele, tada postoji jedinstvena vjerovatnosna mjera* $P = P_F$ *(indeksom* F *naglašavamo da je mjera zadata pomoću* F*) na mjerljivom prostoru* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ *takva da za svako* $x \in \mathbb{R}$ *važi*

$$P_F((-\infty, x)) = F(x).$$

b') (ekvivalentno sa b)) Ako je $F(x), x \in \mathbb{R}$*, funkcija raspodjele, tada postoji jedinstvena vjerovatnosna mjera* $P = P_F$ *(indeksom* F *naglašavamo da je mjera zadata pomoću* F*) na mjerljivom prostoru* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ *takva da za svaki polusegment* $[a, b)$ *važi* $P_F([a, b)) = F(b) - F(a)$.

Posljedica 4.1 *Neka je* $F(x),\; x \in \mathbb{R}$ *funkcija raspodjele. Tada postoje vjerovatnosni prostor* $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ *i slučajna promjenljiva* X *na njemu takvi da je* $F_X = F$.

Posljedica 4.2 *Ako je* P *normirana (tj. vjerovatnosna) mjera na mjerljivom prostoru* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$*, tada postoji slučajna promjenljiva* X *takva da je* $P = P_X$.

Posljedica 4.3 *Sa* $P = P_X \longrightarrow F_X$ *se uspaostavlja biunivoka korespondencija između skupa vjerovatnosnih mjera na* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ *i skupa funkcija raspodjele.*

Neka je X slučajna promjenljiva sa raspodjelom P_X i funkcijom raspodjele F_X. Neka je za proizvoljni polusegment $[a,b)$, $\mu_{F_X}([a,b)) := F_X(b) - F_X(a)$. Prisjetimo se da je $F_X(b) - F_X(a) = P_X([a,b))$. Funkciju μ_{F_X} koju smo zadali na polusegmentima proširimo do vjerovatnosne mjere na mjerljivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$. Imamo $\mu_{F_X} = P_X$. Mjera μ_{F_X} se naziva Lebeg-Stiltjesovom. Koristeći uobičajenu notaciju iz teorije Lebegovih integrala imamo

$$P(X^{-1}(S)) = P_X(S) = \int\limits_{X^{-1}(S)} P(d\omega) = \int\limits_S P_X(dx) = \int\limits_S dF_X(x), S \in \mathcal{B}^1.$$

Dakle, zadatak traženja vjerovatnoće sa kojom slučajna promjenljiva "upada" u Borelov skup se može riješiti korišćenjem funkcije raspodjele-treći intagral, u literaturi je poznat kao Lebeg-Stiltjesov.

Komentar 4.2 *U mnogim vjerovatnosnim modelima se ne konkretizuje vjerovatnosni prostor polaznog opita. Centralni zadatak u radu sa slučajnom promjenljivom je određivanje vjerovatnoće sa kojom promjenljiva upada u proizvoljan Borelov skup. Ovaj zadatak je tehničke prirode ako znamo funkciju raspodjele (ekvivalentno, raspodjelu) slučajne promjenljive. Stoga u literaturi često nailazimo na formulaciju: X je slučajna promjenljiva sa funkcijom raspodjele F_X, struktura vjerovatnosnog prostora se ne pominje jer je nebitna za računanje vjerovatnoće $P\{X \in B\}$, $B \in \mathcal{B}^1$.*

Definicija 4.9 *Funkcija F je* **funkcija raspodjele diskretnog tipa** *ako za nju važi*

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i, x \in \mathbb{R},$$

gdje su $p_i, i \in I$, I je konačan ili prebrojiv skup, neki nenegativni brojevi za koje je $\sum\limits_{i \in I} p_i = 1$, a $x_i, i \in I$su neki realni brojevi.

Lako se provjerava da je diskretna funkcija raspodjele funkcija raspodjele.

Teorema 4.6 *Slučajna promjenljiva X je diskretnog tipa ako i samo ako je njena funkcija raspodjele F_X diskretnog tipa.*

Ako je X diskretna slučajna promjenliva sa raspodjelom $P\{X = x_i\} = p_i$ tada je $F_X(x) = \sum\limits_{i: x_i < x} p_i$. Obrnuto, ako je $F_X(x) = \sum\limits_{i: x_i < x} p_i$ tada je $P\{X = x_i\} = p_i$.

Definicija 4.10 *Za slučajnu promjenljivu X kažemo da je* **neprekidnog tipa** *ako je funkcija F_X neprekidna.*

Zbog toga što smo u kursu Analize za sada usvojili samo Rimanov integral, uključujući i nesvojstveni, teoriju koja slijedi ćemo izložiti ograničeni ovom okolnošću. Biće navedeni i rezultati u kojima se pojavljuje Lebegov integral stim da će studenti taj dio potpuno razumjeti kada na trećoj godini studija savladaju teoriju mjere i integrala. Dakle, za sada je dovoljno da se savlada dio u kome se ne pominje Lebegov integral, a dio teksta u kome se pominje može se informativno pročitati.

DEFINICIJA 4.11 *Za slučajnu promjenljivu X kažemo da je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna funkcija g takva da je*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Za funkciju raspodjele slučajne promjenljive apsolutno neprekidnog tipa kažemo da je apsolutno neprekidnog tipa. Gornji integral je nesvojstveni Rimanov.

Slučajne promjenljive apsolutno neprekidnog tipa su neprekidne. Funkcija g se naziva **gustina slučajne promjenljive** X ili prosto **gustina od** X. Jasno, $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = F_X(\infty) = 1$. Iz Analize znamo da u svim tačkama neprekidnosti funkcije g važi $F'(x) = g(x)$.

Neka je $[a, b)$ proizvoljni polusegment na realnoj pravoj i neka je X slučajna promjenljiva apsolutno neprekidnog tipa sa funkcijom raspodjele F i funkcijom gustine g. Imamo

$$P\{X \in [a, b)\} = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} g(t)dt - \int_{-\infty}^{a} g(t)dt = \int_{a}^{b} g(t)dt.$$

U praksi se po pravilu radi sa slučajnim promjenljivima čiji je nosač mjere unija konačno mnogo disjunktnih intervala (mogu biti uključeni i intervali čiji su krajevi $-\infty$ ili $+\infty$; inervali mogu biti i sa otvorenim i sa zatvorenim krajevima). Uz to je odgovarajuća gustina po pravilu neprekidna na nosaču mjere, stim da u krajnjim tačkama intervala može biti registrovan singularitet. Kao što je uobičajeno, i ovdje se neprekidnost vezuje za unutrašnje tačke intervala. Uz gore navedene pretpostvke, iz teoreme o srednjoj vrijednosti integrala, slijedi

$$P\{x_0 \leqslant X < x_0 + \Delta x\} = g(x_0)\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0,$$

gdje je g gustina slučajne promjenljive X, a x_0 je proizvoljna unutrašnja tačka nosača mjere. Važi i tvrđenje u izvjesnom smislu obrnuto prethodnom.

Teorema 4.7 *Neka je nosač mjere slučajne promjenljive X unija konačno mnogo disjunktnih intervala (mogu biti uključeni i intervali čiji su krajevi $-\infty$ ili $+\infty$; inervali mogu biti i sa otvorenim i sa* *zatvorenim krajevima). Ako ne postoji tačka w sa granice nosača mjere takva da je $P\{X = w\} > 0$ i ako je*

$$P\{x_0 \leqslant X < x_0 + \Delta x\} = h(x_0)\Delta x + o(\Delta x),\ \Delta x \to 0,$$

x_0 je proizvoljna tačka iz unutrašnjosti nosača mjere, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija, tada je slučajna promjenljiva X apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom h.

Dokaz se bazira na primjeni Newton-Lajbnicove teoreme.

Preporuka je da se tekst do primjera pročita zbog toga što sadrži korisne informacije koje se mogu usvojiti bez obzira što nismo ovladali ključnim pojmom tj. Lebegovim integralom. Jedna teorema Analize kaže da funkcija raspodjele F ima prvi izvod skoro svuda na $\mathbb{R}$ (u odnosu na Lebegovu mjeru) i za svaki polusegment $[a, b)$ važi ($\mathcal{L}$ je oznaka za Lebegov integral)

$$(\mathcal{L})\int_a^b F'(t)dt \leqslant F(b) - F(a).$$

Takođe, funkcija raspodjele F je apsolutno neprekidnog tipa ako i samo ako za svaki polusegment $[a, b)$ važi

$$(\mathcal{L})\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Takođe, ako za funkciju raspodjele F neke slučajne promjenljive X važi

$$(\mathcal{L})\int_{-\infty}^{\infty} F'(t)dt = 1$$

tada je X slučajna promjenljiva apsolutno neprekidnog tipa i njena gustina je F'.

Takođe, primjenom Karateodorijeve teoreme se dokazuje da za proizvoljni Borelov skup B važi

$$P\{X \in B\} = \int_B dF(t) = (\mathcal{L})\int_B g(t)dt,$$

gdje je X slučajna promjenljiva apsolutno neprekidnog tipa, a g je odgovarajuća gustina. Prvi integral je Lebeg-Stiltjesov, a drugi Lebegov. Znači, raspodjela slučajne promjenljive apsolutno neprekidnog tipa je određena njenom gustinom. U slučaju kada je Borelov skup B unija konačno mnogo intervala, a g neprekidna funkcija, Lebegov integral se svodi na Rimanov.

Teorema 4.8 *Nenegativna Borelova funkcija g je funkcija gustine neke slučajne promjenljive X ako i samo ako važi $(\mathcal{L})\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$.*

Kada su čitaoci upoznati sa Lebegovim integralom, pojam apsolutno neprekidne slučajne promjenljive se definiše na jedan od tri ekvivalentna načina.

Definicija 4.12 *Za slučajnu promjenljivu X kažemo da je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna Borelova funkcija g takva da je*

$$F_X(x) = (\mathcal{L}) \int_{-\infty}^{x} g(t)dt \text{ za } \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Definicija 4.13 *Za slučajnu promjenljivu X kažemo da je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna Borelova funkcija g takva da za svaki polusegment $[a, b)$ važi*

$$P_X([a, b)) = (\mathcal{L}) \int_{a}^{b} g(t)dt.$$

Definicija 4.14 *Za slučajnu promjenljivu X kažemo da je* **apsolutno neprekidnog tipa** *ako postoji nenegativna Borelova funkcija g takva da za svaki Borelov skup S sa $\mathbb{R}$ važi*

$$P_X(S) = (\mathcal{L}) \int_{S} g(t)dt.$$

Primjer 4.15 *Slučajno biramo tačku iz intervala (a, b) i identifikujemo tačku sa njenom apscisom. Odgovarajući vjerovatnosni prostor formiramo u tri koraka. Prvo, za događaje proglašavamo polusegmente sa (a, b) (jer je najlakše provjeriti da li se takav događaj realizovao, tj da li izabrana tačka pripada polusegmentu) a za proizvoljni $[c, d), [c, d) \subset (a, b), P([c, d)) = \frac{d-c}{b-a}$. Zatim formiramo polje $\mathcal{C}$ koje čine konačne unije disjunktnih polusegmenata sa (a, b), a vjerovatnoća se zadaje kao zbir vjerovatnoća polusegmenata koji čine uniju. Pokazuje se da je ovako zadata vjerovatnoća-mjera korektno definisana na $\mathcal{C}$. I na kraju, formiramo $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ gdje je $\Omega = (a, b), \mathfrak{F} = \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_{(a,b)}$ i P je proširenje (jednoznačno, teorema Karateodori) sa $\mathcal{C}$ na $\sigma(\mathcal{C})$. Konkretno, ako je $B \in \mathcal{B}_{(a,b)}$ tj B je Borelov skup sa (a, b) tada je $P(B) = \frac{mes(B)}{b-a}$ gdje je mes Lebegova mjera.*◀

Primjer 4.16 *Slučajno biramo tačku iz $G \in \mathcal{B}^n$ tj G je Borelov skup sa $\mathbb{R}^n$. Po analogiji sa primjerom* (**??**)*, $\Omega = G, \mathfrak{F} = \mathcal{B}_G$, a $P(g) = \frac{mes(g)}{mes(G)}, g \in \mathcal{B}_G$, mes je Lebegova mjera na $\mathbb{R}^n$. Ovako zadata vjerovatnoća se naziva geometrijska.*◀

Primjer 4.17 *U slučajnom opitu iz primjera* (**??**)*, formirajmo slučajnu promjenljivu $X(\omega) = \omega$, $\omega \in (a, b)$. Slučajna promjenljiva X je apscisa slučajno izabrane tačke sa intervala (a, b). Realizacije* *promjenljive X čine skup (a,b) (nosač mjere-vjerovatnoće). Za proizvoljni interval $(c,d) \subset (a,b)$ imamo*

$$P\{c < X < d\} = \frac{mes((c,d)\cap(a,b))}{mes(a,b)} = \int\limits_c^d g(t)dt,$$

gdje je

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in (a,b), \\ 0, & t \notin (a,b). \end{cases}$$

Sada je

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^x g(t)dt = \begin{cases} 0, & x \leqslant a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leqslant b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$

Možemo postupiti i drugačije. Naime, imajući u vidu geometriju slučajne promjenljive X nalazimo $F(x)$ a zatim gustinu dobijamo kao izvod od $F(x)$. Za slučajnu promjenljivu X kažemo da ima ravnomjernu (uniformnu) raspodjelu na intervalu (a,b) i koristimo zapis $X : \mathcal{U}(a,b)$. ◄

Komentar. Funkcija gustine je određena do na skup mjere 0. U prethodnom primjeru smo nenulti dio funkcije gustine zadali na (a,b) ali smo nenulti dio mogli zadati i na $[a,b)$ ili $(a,b]$ ili $[a,b]$.

Primjer 4.18 *Slučajna promjenljiva X ima $\mathcal{U}(0,1)$ raspodjelu. Naći raspodjelu slučajne promjenljive $Y = X^2$.*

$$F(t) = P\{Y < t\} = P\{X^2 < t\} = P\{X < \sqrt{t}\} = \sqrt{t},\ 0 < t < 1.$$

Primijetimo, $\int_{-\infty}^{\infty} F'(t)dt = \int_0^1 F'(t)dt = 1$, i posljednji integral se može tretirati ili kao nesvojstveni Rimanov ili kao Lebegov. Dakle, slučajna promjenljiva Y je apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $g(t) = F'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}, 0 < t < 1$.

Primjer 4.19 *Slučajna promjenljiva X ima* **eksponencijalnu** *raspodjelu sa parametrom λ, ako je njena gustina $g(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$, $\lambda > 0$. Koristimo notaciju $X : \mathcal{E}(\lambda)$.*

Navedimo model u kome se pojavljuje slučajna promjenljiva koja ima eksponencijalnu raspodjelu. Sijalica počinje sa radom u moment $t = 0$ i radi neprekidno dok ne pregori. Pretpostavimo da je vjerovatnoća da sijalica pregori u toku vremenskog intervala $(t, t+\Delta t)$ uz uslov da nije pregorila do momenta t jednaka $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$. Ova pretpostavka je u saglasju sa onim što se u praksi dešava. Označimo sa X vrijeme rada sijalice do momenta kada pregori. Neka je $Q(t) = P\{X \geqslant t\}$. Imamo

$$Q(t + \Delta t) = P\{X \geqslant t\}P\{X \geqslant t + \Delta t | X \geqslant t\} = Q(t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)].$$

Dobijamo

$$\frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = -\lambda Q(t) + Q(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Nakon traženja granične vrijednosti kada $\Delta \to 0$ dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q(t).$$

Nakon rješavanja, uzimajući u obzir da je $Q(0) = 1$, dobijamo $Q(t) = e^{-\lambda t}$. Dakle $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$, i gustina $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$. Lako se provjerava

$$P\{t < X < t + u | X > t\} = P\{X < u\}.(*)$$

Dakle, eksponencijalna raspodjela ima svojstvo odsustva pamćenja. Dokažimo da je eksponencijalna jedina nenegativna apsolutno neprekidna raspodjela sa svojstvom odsustva pamćenja. $(*)$ je ekvivalentno sa

$$\frac{Q(t) - Q(t + u)}{Q(t)} = 1 - Q(u) \Leftrightarrow Q(t + u) = Q(t)Q(u).$$

Uzimajući u obzir da je funkcija $Q(t)$ neprekidna i ograničena, dobijena funkcionalna jednačina ima rješenje $Q(t) = e^{-\lambda t}, \lambda > 0$, $t > 0$. ◀

Primjer 4.20 *Slučajna promjenljiva X ima* **normalnu** *raspodjelu sa parametrima m i σ^2, ako je njena gustina*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in R.$$

Koristimo notaciju $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. ◀

DEFINICIJA 4.15 *Slučajna promjenljiva X je* **singularnog tipa** *ako je F_X neprekidna i $F'_X(x) = 0$ skoro svuda na $\mathbb{R}$ (u odnosu na Lebegovu mjeru). Za funkciju raspodjele F_X kažemo da je singularnog tipa.*

Kantorova stepenica τ je funkcija raspodjele singularnog tipa. Primijetimo, $(\mathcal{L})\int\limits_0^1 \tau'(t)dt = 0 < \tau(1) - \tau(0) = 1$.

Iz do sada izloženog se vidi da se pripadnost slučajne promjenljive nekom od tipova izražava u terminima pripadnosti odgovarajuće funkcije raspodjele odgovarajućem tipu. Vjerovatnosnu mjeru na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ nazivamo diskretnom, apsolutno neprekidnom ili singularnom u zavisnosti od tipa slučajne promjenljive koja tu mjeru generiše. Postoje slučajne promjenljive čija funkcija raspodjele ne pripada ni jednom od tipova.

Teorema 4.9 *Svaka funkcija raspodjele F se na jedinstven način može zapisati u obliku*

$$F(x) = \alpha_1 F_1(x) + \alpha_2 F_2(x) + \alpha_3 F_3(x)$$

gdje je F_1 funkcija raspodjele diskretnog tipa, F_2 funkcija raspodjele apsolutno neprekidnog tipa a F_3 funkcija raspodjele singularnog tipa, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$.

Neka su a_n tačke prekida funkcije F i neka su odgovarajući skokovi $b_n = F(a_n + 0) - F(a_n)$. Formirajmo funkcije F_d, F_a, F_s.

$$F_d(x) = \sum_{n:a_n<x} b_n,\ F_a(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} F'(t)dt, F_s(x) = F(x) - F_d(x) - F_a(x).$$

Ako je $\sum\limits_{n:a_n<x} b_n = \alpha \neq 0,\ \int\limits_{-\infty}^{x} F'(t)dt = \beta \neq 0, 1 - \alpha - \beta \neq 0$, tada su

$$F_1(x) = \frac{1}{\alpha} F_d(x),\ F_2(x) = \frac{1}{\beta} F_a(x),\ F_3(x) = \frac{1}{1-\alpha-\beta} F_s(x)$$

redom diskretna, apsolutno neprekidna i singularna funkcija raspodjele i važi

$$F(x) = \alpha F_1(x) + \beta F_2(x) + (1 - \alpha - \beta) F_3(x). \quad (*)$$

Ako je neki od brojeva $\alpha, \beta, 1 - \alpha - \beta$ jednak nuli, tada u jednakosti $(*)$ nedostaje odgovarajući sabirak. Jedinstvenost razlaganja je očigledna.◄

Primjer 4.21 *Osobe A i B su dogovorile susret koji će pratiti sljedeći uslovi. Mjesto susreta je fiksirano, svaka osoba na mjesto susreta dolazi u slučajnom momentu između 12 i 13 sati i drugu osobu čeka najviše 20 minuta. Neka je T vrijeme koje u čekanju provede osoba A. Naći funkciju raspodjele slučajne promjenljive T i ET.*

Neka je x vrijeme koje protekne od 12 sati do momenta dolaska osobe A, a y vrijeme koje protekne od 12 sati do momenta dolaska osobe B. $\Omega = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, mjerna jedinica je sat.

1^0 $P\{T = 0\} = P\{(x, y) : x - \frac{1}{3} < y < x\} = \frac{5}{18}$.

2^0 $P\{T < t\} = P\{\{T = 0\} \vee \{(x, y) : x < y < x + t\} \vee \{(x, y) : y < x - \frac{1}{3} \wedge x > 1 - t\}\} = \frac{5}{18} + \frac{5}{3}t - t^2, 0 < t \leqslant \frac{1}{3}$.

3^0 $P\{T = \frac{1}{3}\} = P\{\{(x,y) : y > x + \frac{1}{3}\} \vee \{(x,y) : y + \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\}\} = \frac{5}{18}$. ◄

Dakle,

$$F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \frac{5}{18} + \frac{5}{3}t - t^2, & 0 < t \leqslant \frac{1}{3}, \\ 1, & t > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$\alpha = 2 \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{9},\ \beta = \int_0^{\frac{1}{3}} \Big(\frac{5}{3} - 2t\Big) dt = \frac{4}{9},\ F_s(t) \equiv 0,$$

$$F_d(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \frac{5}{18}, & 0 < t \leqslant \frac{1}{3}, \\ \frac{5}{9}, & t > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$F_a(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ \frac{5}{3}t - t^2, & 0 < t \leqslant \frac{1}{3}, \\ \frac{4}{9}, & t > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Primjer 8. Neka je

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{x}{3} + \frac{2\tau(x)}{3}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

F je funkcija raspodjele i za nju važi

$$F(x) = \frac{1}{3}F_2(x) + \frac{2}{3}F_3(x),$$

gdje je F_2 funkcija raspodjele slučajne veličine koja ima $\mathcal{U}(0,1)$ raspodjelu a $F_3(x) = \tau(x)$. Odgovarajuća vjerovatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ je mješavina apsolutno neprekidne i singularne mjere. Primijetimao, F je neprekidna funkcija i $(\mathcal{L}) \int_{-\infty}^{\infty} F'(t)dt = \frac{1}{3}$.